177

Höhere Analysis

Ma
0. 177
2

J III 98. b

1/24 x

C. A. Coduro 1821.

Ex libris Dumbroff

Anfangsgründe

der

Analyſis

des Unendlichen.

Von

Abraham Gotthelf Käſtner.

Der mathem. Anfangsgr. IIIter Theil; zweyte Abtheil.

Dritte, ſtark vermehrte Auflage. Fünf Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht
1799.

BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

STAATSBIBLIOTHEK
BAMBERG

Vorrede.

Geheimniſſe müſſen doch was ſehr Reizendes für den menſchlichen Verſtand ſeyn, weil man ſelbſt in derjenigen Wiſſenſchaft dergleichen zu haben geſucht hat, die ſeit tauſenden von Jahren, ihrer Deutlichkeit und augenſcheinlichen Ueberzeugung wegen berühmt geweſen iſt. Man ſieht ohne mein Erinnern, daß ich die Lehre vom Unendlichen in der Mathematik meyne, wie ſie von vielen Schriftſtellern, ſelbſt ſolchen die das Reich der Wiſſenſchaften dadurch erweitert haben, vorgetragen wird. Gröſſen die unterſchieden ſind und doch als gleich angeſehen werden; Unendlich groſſe Dinge die in Vergleichung mit andern Nichts, und unendlich kleine die in Vergleichung mit andern unendlich groß ſind; krumme Linien, die aus geraden Theilchen beſtehen, welche gerade Theilchen man nach Gefallen wieder krümmt wie man will, und unzählich andere ſolche Sätze die wieder die erſten Gründe aller menſchlichen Erkänntniß anzuſtoſſen ſcheinen, ſollen von den Schülern der Mathematik als die erhabenſten Lehren ehrfurchtsvoll angenom-

men werden. Könnte der Aberglauben was mehr von ſeinen Anbetern fordern, wenn er nach Hallers Ausdrucke: mit Rauch die ſchimmernden Gewölber füllt?

Die Alten haben den Nahmen des Unendlichen, und alles was damit einige Verwandſchaft haben könnte, zu vermeiden, eine Sorgfalt angewandt, die unſere Geduld überſchreitet, und Carteſius hat noch dafür mit Zittern das Wort unbegränzt, indefinitum, gebraucht. Auf ein Wort kömmt es nicht an, wenn man nur die Bedeutung deſſelben gehörig beſtimmt. So wie ich ſie im Anfange gegenwärtigen Werkes beſtimmt habe, ſcheint mir alles deutlich zu ſeyn, und die Geheimniſſe des Unendlichen, die manchem Schriftſteller unbegreiflich geſchienen haben, weil unſer endliche Geiſt das Unendliche nicht faſſen könne, verwandeln ſich theils in ſehr offenbahre Sätze, theils in Wortſpiele.

Da ſind es keine Wortſpiele, wenn man ſie als Redensarten anſieht, die etwas kurz und nachdrücklich ſagen, das man ſonſt viel weitläuftiger geſagt hat. Wie ſich der kühne Ausdruck eines Dichters, von dem vielleicht logiſch richtigern, aber trockenen Vortrage des Philoſophen unterſcheidet, ſo iſt ohngefähr die Rechnung des Unendlichen von den Beweiſen der Alten unterſchieden: Auch hat das feſte Land ſie zuerſt von einem Geiſte gelernt, bey

dem

dem ſich der Witz des Dichters, die Einſicht des Philoſophen, die Gründlichkeit des Geometers und die Beleſenheit des Polyhiſtors vereinigten. In der erſten Probe die er von ſeinen Entdeckungen durch die Rechnung des Unendlichen gegeben hat, in ſeiner Quadratur des Kreiſes *) hat er ſchon angezeigt wie wir das Unendliche, von unſern eingeſchränkten Kräften ungehindert, faſſen. Wir ſtellen uns nähmlich nicht alle ſeine Theile vor, aber wir kennen das Geſetz, das alle dieſe Theile gemeinſchaftlich beobachten. Von der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ kennen wir nie alle Glieder, aber daß jedes Paar nächſte Glieder

$$+ \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}$$ heiſſen muß, begreifen wir vollkommen.

Vermittelſt des newtoniſchen Parallelogramms finden wir aus einer gegebenen Gleichung, die erſten Glieder einer unendlichen Reihe, und das Geſetz ihres Fortganges, dadurch ſind die übrigen Glieder alle beſtimmt; es ſteht nicht bey uns wie ſie beſchaffen ſeyn ſollen, wenn wir die erſten feſtgeſetzt haben; Für die erſten könnten wir andere und andere annehmen, und dadurch andere und andere Reihen erhalten: Iſt es ſo was Ungereimtes, als der Freygeiſt, und der zu weichherzige From-

*) Act. Er. Lipſ. Febr. 1682.

me uns bereden wollen: daß unſer Schickſaal für eine Ewigkeit, durch das gegenwärtige Leben beſtimmt wird? können unſere jetzigen Jahre nicht die erſten Glieder in den Theilen einer Gleichungsreihe ſeyn, *) dadurch alle die folgenden ohne Ende beſtimmt werden?

Paucula iam ſeries monſtrat primordia naſcens
  Lege ſua partes haec ſine fine regunt:
Qualiter a vita quam bis ſex luſtra coercent
  Aeua tenent formam non numeranda ſuam.

Sobald wir ſtatt des Geſetzes des Fortganges unendlicher Theile, alle Theile ſelbſt zu faſſen glauben, ſobald wir uns das Unendliche als etwas wirkliches und ſchon vorhandenes vorſtellen, ſobald wiederſprechen wir der Erklärung eines wirklichen Dinges. Beſtimmt ſeyn gehört zu des wirklichen Weſen, aber beſtimmt ſeyn heiſſt, ſich angeben laſſen, und alſo endlich ſeyn. Dieſe Erinnerung hat Barrow **) gemacht, aus deſſen geometriſchen Lectionen Newton gewiß, und vielleicht auch Leibniz die erſten Begriffe der Rechnung des Unendlichen geſchöpft hat. Gegentheils ſind die unendlich kleinen oder groſſen Gröſſen, ihrer Natur nach, nicht zu beſtimmen wie ſich Hauſen

*) Alg. 649.

**) Deſultoriam et indeterminatam quantitatem habere, eſt habere nullam; eſt enim aliquid determinate, quicquid eſt, quod vbique eſt, nuſquam eſt. BARROW lect. Mathem. anni 1666. quinta p. 262. ed. Londn. 1684.

ſen ausdruckt, *) der nie vergaß ſeine Zuhörer zu erinnern, daß im Unendlichen geſchehen, niemals geſchehn heiſſt, und der Ort wo eine Parallele mit der andern, die Hyperbel mit der Aſymptote, zuſammenfällt, nirgends iſt.

In den Geſprächen in denen Galiläus die Geſetze des Falles zuerſt gelehret, und die Feſtigkeit der Körper zu unterſuchen angewieſen hat, **) finden ſich viel ſeltſam klingende Sätze vom Unendlichen ***) und er läſſt ſeine Leſer in aller

*) Natura ſua indeterminabilis. HAVSEN El. Ar. Schol. Prop. 20.

**) Diſcorſi e dimoſtrazioni matematiche intorno à due nuoue ſcienze &c. (ed. Elſev. 1638; 4to) dialogo I.

***) Ich will einen davon beybringen, den Stedler (Fränkiſche Acta Erud. & Curioſa X. Samml. VII Art.) vorgetragen hat, doch ohne einmahl das Buch des Galiläus anzuzeigen, darinnen er ſich findet. „Jedes Kreiſes Umfang ſoll „ſeinem Mittelpuncte gleich ſeyn.„ Ich will bey meinem Vortrage zum voraus ſetzen, daß man den 66. Satz meiner Geometrie, und die dazu gehörige 127 Fig. vor Augen habe. Ein Kreis der QH zum Halbmeſſer hat, iſt ſo groß als der Ring zwiſchen den beyden Kreiſen die QE und QL zu Halbmeſſern haben. Aber wenn QL in KG fällt, ſe verwandelt ſich der Kreis in den Mittelpunct K, weil $QH = 0$; und der Ring in den Umfang eines Kreiſes mit KG; weil $QE = QL$ alſo iſt der Mittelpunct dem Umfange gleich. So ſchlieſſt Salviati beym

aller der Verwirrung, in welche ſie durch ſeine Spitzfündigkeiten können ſeyn gebracht worden; wie

Galiläus (a. a. O. 28. S.) Aber aus $QH^2 = QL^2 - QE^2$ oder $QH^2 . \pi = (QL^2 - QE^2) . \pi$ folgt für $QE = QL$ nichts als $QH = 0$ und $0 = 0$, ob ſich alſo wohl die Gleichheit des Kreiſes und des Ringes bis auf den Augenblick da beyde verſchwinden erhält, ſo iſt es doch nicht erlaubt den Mittelpunct K als den letzten unter den immer abnehmenden Halbmeſſern QH; und den Umfang eines mit KG beſchriebenen Kreiſes als den letzten unter den immer abnehmenden Ringen zu betrachten. Wenn ſich eine Gröſſe durch beſtändige Abnahme in eine andere verwandelt, ſo muß ohne Zweifel der Unterſchied zwiſchen beyden immer kleiner und kleiner werden. Aber man kann ſich keinen Unterſchied und folglich auch keinen immer abnehmenden Unterſchied zwiſchen K und QH; oder zwiſchen dem Umfange und dem Ringe vorſtellen.

Wenn es erlaubt iſt, von der beſtändigen Verhältniß zwoer veränderlichen Gröſſen, auf die Verhältniß deſſen zu ſchlieſſen, das noch bleibt, wenn die Gröſſen nicht mehr ſind, ſo will ich mit leichter Mühe noch gröſſere Ungeheuer, z. E. einen Punct der ſich ſelbſt nicht gleich iſt, zum Vorſcheine bringen. In der erſten der zu gegenwärtigem Werke gehörigen Figuren, ſey TM eine gerade Linie die mit TP einen Winkel von 30 Gr. macht: So iſt allemahl $MP = \frac{1}{2} TM$ wo auch M genommen wird; Man laſſe alſo MP immer näher an T rücken, bis ſie endlich in T fällt, ſo verwandelt ſich MP ſowohl als TM in T; und es iſt alſo

wie ich glaube aus einem philoſophiſchen Muth-willen. Denn ſonſt würde er ohne Zweifel dieſe

alſo der Punct T als die letzte MP betrachtet, halb ſo groß als vollkommen eben derſelbe Punct T, als die letzte TM betrachtet.

Ich wollte daß ich hiebey nicht erinnern müſſte, daß man aus der Gleichung 2.o = 1.o nicht etwa ſchlieſſen ſoll: ein Nichts könne halb ſo groß als ein anderes Nichts, oder o: o = 1: 2 ſeyn. Die Gleichung ſagt ſoviel ich einſehe nur ſoviel: daß Nichts und Nichts dazu auch noch Nichts iſt. Aus 2. y = 1. x folgt y: x = 1: 2; wenn man aber hier o ſtatt y und x ſetzt, ſo bedeutet 2. o. nicht ſo etwas wie 2y bedeutet. Dieſes heiſſt ein Ding zweymahl nehmen, und jenes, **Nichts** zweymahl nehmen. Wollte man ſich verſtatten ein **Nichts** hier ſtatt **Nichts** zu ſetzen, und das Nichts wie ein Ding zu betrachten das man zweymahl nähme, ſo würde man ſich den Erinnerungen ausſetzen die Herr Premontval in den Mem. de l'Ac. R. de Pruſſe 1754; 421. und 433 S. wieder den Wolfiſchen Beweis vom Satze des zureichenden Grundes gemacht hat. Oder, um die Sache weniger metaphyſiſch vorzutragen: Man würde den Grund der erhabenſten Rechnung, mit dem Witze eines alten deutſchen Formenſchneiders Johann Daniel Müllers legen, der nach der Mitte des vorigen Jahrhunderts gelebt hat. Ich beſitze von ihm den **Niemand** nach dem Leben abgebildet, und in ſchönen deutſchen Verſen alles zu ſeinem Lobe und Tadel geſagt, was Niemand thut, oder gethan haben will. Bey dieſem Niemande, und bey den zwey Nichtſen deren eines

dieſe Knoten eben ſo leicht aufgelöſet haben, als er ſie geknüpft hat: dieſes erhellt aus der richtigen Erinnerung auf der 36 S. ſeines Werkes, daß die Frage, ob eine Linie nur eine endliche Menge Theile oder unendlich viel enthalte ſich ſo beantworten läſſt: Sie enthalte jede gegebene Zahl von Theilen.

Der ältere Sturm hat die unbegreiflichen Lehren der Mathematik in einer eigenen Abhandlung geſammlet. *) Sie beruhen alle auf dem Unendlichen, und werden nur durch den Vortrag unbegreiflich. Die Gleichheit der Parallelogrammen auf einer Grundlinie zwiſchen einerley Parallelen kömmt hier auch vor. Die hätte ich nun würklich hier nicht geſucht: Weil ich ſie aber doch hier fand, ſo ſuchte ich da noch eine andere eben ſo groſſe Unbegreiflichkeit, und die fand ich nicht: Es war die Ochſenhaut der Dido, die in Riemen zerſchnitten, einen Umfang gab, in dem Carthago ſtehen konnte.

Der

eines noch einmahl ſo groß als das andere iſt, fällt mir ein lateiniſches Heldengedicht ein, damit ich dieſe lange Anmerkung ſchlieſſen will

Nullus et Nemo
Mordebant ſe in ſacco:
Nullus clamabat
Nemo audiebat.

*) De Matheſeos incomprehenſibilibus. v. Io. Chriſtoph. Sturmii praelect. Acad. ed. a Dan. Algoewero 1722.

Der P. Boſcowich hat eine neue Sammlung von den Geheimniſſen, und ſelbſt Ungereimtheiten des Unendlichen gemacht.*) Sie finden aber nur alsdenn ſtatt, wenn man eine unendliche Gröſſe als etwas wirklich vorhandenes anſieht, und wie ſich der P. Boſcowich ausdruckt ein indefinitum abſolutum annimmt. Nimmt man nur Gröſſen die unendlich wachſen oder abnehmen können, unbeſtimmt an, ſo läſſt ſich wie er ebenfalls erinnert, alles ohne Schwierigkeit erklären. Daß der Gebrauch des Unendlichen ſo vielen Einwendungen iſt ausgeſetzt geweſen, rührt nach Fontenellens Gedanken **) daher, weil die Geometrie von der Seite wo das Unendliche in ihr vorkömmt, mit der Naturlehre, mit dem innern Weſen der Körper zuſammenhängt, das uns ſo unbekannt iſt. Dieſer Einfall, hat wie viel andere dieſes Schriftſtellers in dieſem Buche, mehr Witz als Gründlichkeit, wenn anders wahrer Witz ohne Gründlichkeit ſeyn kann. Ich müſſte mich ſehr irren, wenn ihm nicht ein Einfall eines Deutſchen an Scharfſinnigkeit und Wahrheit weit vorzuziehen wäre. Fontenelle

*) De transformatione locorum geometricorum; §. 880. ſequ. am Ende ſeiner Anfangsgründe der Kegelſchnitte die den dritten Theil ſeiner Elementorum Matheſeos (Rom 1754) ausmachen.

**) Elemens de la géometrie de l'infini; préf.

tenelle nimmt Gröſſen an, die zwiſchen die endlichen und unendlichen fallen; Es ſind die, die wir durch $\infty\frac{1}{2}$ u. d. g. ausdrucken; durch dieſe meynt er, geſchehe der Uebergang aus dem Endlichen ins Unendliche. Bey dieſen Brücken aber die aus dem Endlichen ins Unendliche führen, hat er, wie Hauſen ſcherzte, nicht bedacht, daß auf ſie aus dem Endlichen zu kommen, wieder andere Brücken nöthig ſind.

Daß die Geometrie das Unendliche aus der Naturlehre haben ſollte, iſt ſo unrichtig, daß man vielmehr das Unendliche aus der Geometrie in die Naturlehre durch Schlüſſe hat bringen wollen, von denen ich ſchon anderswo meine Gedanken eröffnet habe. *) Mit dieſen Schlüſſen haben ſich ſchon die ältern Philoſophen ſo verwirrt, daß Fromond ein Buch in dem er viel dergleichen geſammlet hat, mit dem Nahmen eines Labyrinths beleget. **) Blancan hat bey Gelegenheit der Schrift des Ariſtoteles von untheilbaren Linien, erinnert, ***) daß die Unterſuchung ob untheilbare Weſen, und wie ſie in der Natur vorhanden ſind, aus andern Gründen als aus geometriſchen geführt wer-

*) Anfangsgr. der Geom. 3. Erkl. Anm.

**) Liberti Fromondi Labyrinthus, ſ. de compoſitione continui liber vnus, philoſophis, mathematicis, theologis vtilis et iucundus. Antu. 1631.

***) Blancani loca Ariſtotelis mathematica p. 209.

werden muß: Eine Erinnerung die manche Beſtreiter der Monaden wohl hätten leſen mögen, ehe ſie falſche Schlüſſe für geometriſche Beweiſe hätten drucken laſſen.

Maclaurin hat in ſeinem Treatiſe of Fluxions alle Nebel der eingebildeten Geheimniſſe des Unendlichen zerſtreut. Man könnte auf ſein Buch den Titel einer ſehr berüchtigten Schrift parodiren, und es Infinity not myſterious nennen. Nur bringt die ſynthetiſche Methode, die er nach Art der Engländer durchgängig braucht, zweyerley Unbequemlichkeiten hervor. Die erſte, die groſſe Weitläuftigkeit, entſchuldiget er ſelbſt damit, daß man bey Kunſtgriffen die uns die wichtigſten Unterſuchungen ſo nützlich verkürzen, nicht zu weitläuftig im Vortrage ihrer Gründe ſeyn könne. Viele ſeiner Beweiſe, die z. E. verſchiedene Fälle eines einzigen Satzes darthun, ſind auch einander ſo ähnlich, daß man nur einen leſen darf, um ſie alle zu überſehen. Aber bey einem Buche das uns den vortrefflichſten Theil der mathematiſchen Erfindungskunſt lehret, wäre wohl dienlich geweſen, ſelbſt den Vortrag der Gründe ſo einzurichten daß man ſähe wie ſie erfunden worden ſind.

Ich habe in gegenwärtigem Werke mich meiſtens der Methode der erſten oder letzten Verhältniſſe bedient, die Newton in ſeinen principiis gebraucht hat. Ohngeachtet ich gewieſen

wieſen habe, wie ſich die gewöhnlichen Redensarten der Rechnung des Unendlichen rechtfertigen laſſen, ſo habe ich doch ſie ſelbſt wo es ohne allzugroſſe Weitläuftigkeit hat geſchehen können zu vermeiden geſucht, oder doch allemahl ſo gebraucht, daß man ſieht wie ſie nur Abkürzungen des Vortrages ſind. Ein Frauenzimmer das die Natur vollkommen wohl gebildet hatte, giebt ſich zuweilen durch eine Kleidung nach der Mode ein ungeſtaltes Anſehen: und die Rechnung des Unendlichen, ſcheint in der Hülle ſolcher Redensarten Fehler an ſich zu haben, die dadurch nicht bedeckt werden, daß ſie dem Mathematikverſtändigen unerſchöpfliche Sätze von Erfindungen darbietet; Denn für die Augen eines Geiſtes dem nur Wahrheit ſchön iſt, würde ſie doch allemahl eine häßliche Reiche ſeyn. Zum Glücke ſind es nur Fehler ihrer Kleidung; zuweilen hat ſie ſich ungeſchickter Schneider bedient, zuweilen hat ſie mit Willen in der Eil eine Salope um ſich geworfen; und der Geometer kann ſo entzückt als Ovid ſagen:

Vt ſtetit ante oculos poſito velamine noſtros
 In toto nuſquam corpore menda fuit.

Göttingen;
im März 1761.

Erin-

Erinnerung
bey der zweyten Ausgabe.

Bey dem Gebrauche den ich von dieſem Buche zum Unterrichte machte, gab ſich unter andern ſogleich Gelegenheit die vielen Druckfehler zu bemerken die in die erſte Ausgabe eingeſchlichen ſind. Den gröſſten Theil der Anzeige derſelben bin ich meinen Zuhörern ſchuldig. Ich erwähne dieſen Umſtand deßwegen, weil man die Druckfehler die in mathematiſchen Büchern häufiger vorkommen als in andern, auch da für viel gefährlicher zu halten pflegt.

In trigonometriſchen, aſtronomiſchen, oder andern Tafeln, die man nicht nachrechnen mag, iſt das letzte freylich wahr, und doch kann man auch bey ſolchen Tafeln, aus der Ordnung in der die Zahlen fortgehen müſſen u. d. gl. ex ingenio Verbeſſerungen machen, die ſicherer ſind als Bentleys Verbeſſerungen des Horaz.

In einem Lehrbuche, pflegt allerdings der Schüler anzuſtoſſen, wenn ſeine Rechnung ihm was anders giebt als er gedruckt findet. In dem Falle, rechne er nur aus dem was er herausgebracht hat weiter fort. Stimmt das, was ihm ſeine fernere Rechnung giebt, mit den fernern Lehren des Buches überein, ſo

hatte

hatte er recht gerechnet, und der Zwiſt zwiſchen ihm und dem Buche rührte von einem Druckfehler her, wie man das Ding nennt, dafür doch der Drucker gar nichts kann, ſondern der Setzer, und oft auch der nicht, ſondern der Autor der zu gelehrt ſchreibt.

Indem ich aber dieſes Buch erklärte muſſten mir nothwendig auch Stellen in die Augen fallen, wo durch Aenderungen im Ausdrucke und Vortrage die Sache konnte erleichtert werden, wo ſich die Unterſuchungen ohne Schaden der Gründlichkeit und Vollſtändigkeit abkürzen lieſſen.

Endlich konnten einige neuere Schriften beſonders Hr. Eulers Inſtitutiones Calculi Integralis *) mir Materie zu Vermehrungen darbieten.

Bey den Veränderungen die ſich ſolchergeſtalt machen lieſſen, konnte ich gleichwohl, weder Ordnung des Vortrages, noch Zahlen der Abſätze, beträchtlich ändern, wenn ich nicht ein neu Buch machen wollte, und dazu hatte ich keine Luſt, weil ich noch nicht ſehe daß ich das neue ſehr viel beſſer machen könnte. Auch konnte ich freylich nicht alles in dieſes Buch bringen was von der Rechnung des Unendlichen geſchrieben iſt. Hr. Euler hat in fünf ſtarken

*) Zu St. Petersburg gr. 4. Vol. I. 1768. 542. S. Vol. II. 1769. 526. S.

ſtarken Quartbänden *) nur einen Anfang gemacht ſie vorzutragen, und ich muſſte nach meinen Abſichten, denen die ſich meines Buches bedienen wollen, von viel mehrerley Dingen, als in dieſen Bänden vorkommen, wenigſtens Begriffe geben.

Ich habe alſo die Vermehrungen die mir nöthig ſchienen, wo es ſich am bequemſten thun lieſſe eingeſchoben. Hievon und von andern Verbeſſerungen, will ich das wichtigſte anzeigen, häufige Kleinigkeiten übergehe ich.

Beym 9. Abſ. iſt der Beweis erleichtert.

Im 144 u. f. iſt die Uebereinſtimmung zwiſchen den Coefficienten des binomiſchen Satzes und der höhern Differentiale gewieſen, und daraus der Ausdruck einer Gröſſe durch höhere Differentiale, hergeleitet worden. Ich habe dadurch vermieden was ich in der vorigen Ausgabe nöthig hatte, den unbeſtimmten Binomialcoefficienten für einen unendlichen Exponenten anzugeben. Die Lehre von den Logarithmen 213 u. f. §. habe ich hier meiner Einſicht nach viel beſſer abgehandelt.

Die

*) Introductio in Analyſin infiniti Lauſ. 1748. 2 Theile 718 S. Inſtitutiones calculi differentialis Petrop. 1755. 880 S. und die angef. Inſt. calc. Int. Und noch: Inſt. calc. int. Vol. III. 1770; 639 S.

Die wichtige Integration 248 iſt ordentli=cher und ausführlicher vorgetragen.

Daß jede Zahl unzähliche Logarithmen habe, iſt 332 §. aus der Vergleichung der Kreisbogen mit Logarithmen hergeleitet worden. Dieſer Beweiß wird leichter und kürzer als der den Hr. Euler gegeben hat.

Die Integrirung irrationaler zweytheilichten Differentiale habe ich 399 §. nach Hr. Eulern vorgetragen, ſtatt eines Verfahrens in der vorigen Ausgabe das ich 404 §. anzeige.

Bey den 494 u. f. Abſ. iſt vieles erläutert worden.

Die beyden Anhänge von der kepleriſchen Aufgabe und vom Schwerpuncte, haben auch Verbeſſerungen erhalten.

Weil einiges nicht genug Brauchbare weggeblieben, anderes kürzer gefaſſt iſt, und dieſe Ausgabe etwas kleinere Schrift hat als die vorige, ſo beträgt ſie der angezeigten Vermehrungen ohngeachtet 11 Octavſeiten weniger.

Göttingen;
im September 1770.

A. G. Käſtner.

Erin=

Erinnerung

wegen der dritten Ausgabe.

Die wichtigſten Vermehrungen ſind im Verzeichniſſe des Innhalts * mit angedeutet. Eine ſehr beträchtliche iſt Variationsrechnung mit derſelben Anwendung auf Gröſſte und Kleinſte, dazu auch eine neue Kupfertafel.

Die kepleriſche Aufgabe, welche ſich am Ende beyder vorigen Auflagen befand, iſt weggeblieben.

Ich rechtfertige mich deßwegen 344 §. gegenwärtiger Ausgabe, dagegen habe ich in den folgenden Abſätzen beygebracht wie der elliptiſche Ausſchnitt aus dem Brennpuncte durch Sinus der Vielfache des Winkels am Brennpuncte ausgedruckt wird.

Den Schwerpunct durch Integriren zu finden, habe ich beybehalten und da noch Unterſchiednes zugeſetzt.

Göttingen
im October 1798.

A. G. Käſtner.

Innhalt.

Innhalt.

Gründe der Lehre vom Unendlichen	§	Seite
Eine Gröſſe wächſt unendlich	1	1
nähert ſich einer Gränze unendlich	7	3
Ordnungen der unendlich groſſen und unendlich kleinen	11	6
Gründe der Differentialrechnung.		
Verhältniß der Differentiale	13	10
* Differentialgleichung zwiſchen einer Gröſſe und der durch deren Potenzen ſie gegeben iſt	20	16
Grundlehren vom Differentiiren	21	20
Von der Fluxionenrechnung	31	29
* Zur Geſchichte des Streites über die Erfindung	44	41
* Differentiale, erſte und letzte Verhältniſſe, toleranter vera	45	51
Bewegung gehört in die Geometrie	X	56
Binomiſcher Lehrſatz auch für gebrochne und verneinte Exponenten	46	60
Potenz einer unendlichen Reihe	56	70
Tangenten	63	79
* Bey gleichartigen Gleichungen	91	91
Normallinien	92	92
* Gleichlaufende krumme Linien	95	93

 Win=

	§	Seite
Winkel der Elemente eines Kreiſes mit einander	96	98
Tangente der Muſchellinie	97	99
*Winkel der Linien aus einer Ellipſe Brennpuncten mit der Tangente	98	101
*Krumme Linien die einen Strahl nach zwo Reflexionen zurückbringen	99	105
*Ellipſen die Scheitel und Brennpunct gemein haben	101	107
Tangente der Cykloide	102	108
Tangenten an Linien deren Ordinaten aus einem Puncte gehn	104	110
Paraboliſche Spirale	107	112
Aſymptoten	108	113
Höhere Differentiale	120	120
Differentiallinien	127	124
Unbeſtimmtes Glied einer Reihe durch höhere Differentiale	144	131
Gröſſte und Kleinſte	152	135
Parallelepiped, von gegebnem Innhalt, gegebner Seite, und kleinſter Fläche	157	143
Kürzeſte gerade Linie an eine algebraiſche krumme	158	144
Gröſſte oder Kleinſte ohne Rechnung des Unendlichen	159	146
Gröſſte und Kleinſte aus der Lage der Tangente wo dy:dx unendlich wird	IX	148
*Cylinder von gegebenem Innhalte wo krumme Fläche und ein Boden ein Kleinſtes ſind	161	148
Wo kr. Fläche und beyde Boden ein kleinſtes ſind	162	153
Paraboliſche Linien welche die		

Lehre

	§	Seite
Lehre der Gleichungen erläutern	163	156
Beugungspunct, Schlangenpunct	III	157
Dieſer Linien Differentiallinien und gröſſte oder kleinſte Ordinaten	164	158
Zahl der bejahten und der verneinten Wurzeln	169	163
Von gleichen Wurzeln	172	164
Von unmöglichen. Sie ſind allemahl paarweiſe da.	174	167
Wieviel ihrer ſind	175	168
Anwendung auf die kubiſchen Gleichungen	185	178
Zahl der bejahten und der verneinten Wurzeln aus Abwechslungen und Folgen	186	180
Gränzen der Wurzeln	194	187

Integralrechnung.

Integral oder Summe	201	194
Quadratur krummer Linien	205	195
Quadratur der Parabel	208	198
Einer paraboliſchen krummen Linie	210	201
Einer höhern Hyperbel	211	202
Pluſquam infinita	XIII	206

Rechnung des Unendlichen auf Logarithmen angewandt.

Logarithmiſche Linie	213	207
* Mit verneinten Ordinaten giebt keine Logarithmen verneinter Gröſſen	XIX	213
Unterſchiedne logarithmiſche Syſteme	214	215
Subtangente einer logarithmiſchen Linie unveränderlich	215	216

 Diffe-

	§	Seite
Differential eines Logarithmen	217	219
Logarithme einer Zahl zwiſchen 1 und 2	220	221
Dieſe Zahl aus ihrem Logarithmen	221	
Ordinate der Subtangente gleich	222	224
Zahl e		225
Reihe für Logarithmen die ſich ſchneller nähert	223	225
Für jede ganze Zahl Logarithmen zu finden	224	227
Logarithmen der erſten 10 Zahlen	226	229
Logarithmen in zwey Syſtemen verhalten ſich wie der Syſteme Subtangenten	227	231
Natürliche in briggiſche zu verwandeln	231	232
Zahl als eine Potenz von e	232	233
*Logarithmicae obliquangulae, curua Beauniana		234
Logarithmiſche Linie aus der Hyperbel	233	234
*Tafeln hyperboliſcher Logarithmen	XI	239
*Wie neperiſche Logarithmen mit den natürlichen zuſammenhängen	235	240
*Logarithmen nach Nepers Art	IX	245
Exponentialrechnung	236	251
Logarithme einer unendlichen Zahl iſt unendlich klein von einer niedrigern Ordnung	244	260
Allgemeine Formeln zuſammengeſetzte Differentiale zu integriren	245	260
Umſtände unter denen ſich ein gewiſſes irrationales Differential durch eine unendliche Reihe integriren läſſt	248	262

Ver=

	§	Seite
Verwandlungen	257	268
Irrationale Differentiale	259	269
Gebrochne Functionen	260	270
Verkehrte Methode der Tangenten	262	
Rectification	266	272
Rectification der neiliſchen Parabel	268	273
* Ihr Zuſammenhang mit Quadratur der apolloniſchen	271	275
*Unbeſtimmte algebraiſche Rectification	272	277

Quadraturen und Rectificationen zum Kreiſe.

	§	Seite
Fläche für Abſciſſe aus dem Mittelpuncte	273	278
Für Abſciſſe vom Scheitel an	275	281
Bogen aus Sinus	281	285
Sinus aus Bogen	285	290
Bogen aus Querſinus	287	295
Querſinus aus Bogen	293	300
Bogen aus Coſinus	296	303
Bogen aus Tangente	299	305
* Reihen die ſich nicht nähern, obgleich ihre Glieder immer kleiner werden	300	307
Tangente aus Bogen	301	312
Cotangente aus Bogen	302	314
Secante aus Bogen	303	315
Coſecante aus Bogen	304	316
Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe	306	317
* Machins Reihe	308; V	324
Sinus aus Bogen	310	326
Berechnung der trigonometriſchen Linien	311	327
Sinus und Coſinus aus Bogen	314	330

	§	Seite
Ausſchnitte der Hyperbel	317	334
Vergleichung mit Ausſchnitten des Kreiſes	322	342
Vervielfältigung der Winkel vermittelſt der Tangenten	331	348
Jeder Zahl gehören unzählich viel Logarithmen	332	356

Allgemeiner Ausdruck der Seiten ordentlicher Vielecke.

	§	Seite
Umfang des Kreiſes durch Logarithmen	333	361
Tangente von $\frac{1}{n}$ des halben Umfangs	334	362
Gleichung zwiſchen Sinus und Coſinus des einfachen und vielfachen Winkels	335	363
Reihe die den Sinus durch den Bogen giebt, in Factoren zerfällt	336	364
Reihe für den Coſinus zerfällt	338	369
Potenzen von e mit unmöglichen Exponenten	339	373
Hyperboliſcher Logarithme des halben Umfangs	340	374
Logarithme eines Sinus oder Coſinus	341	375
*Potenzen eines Coſinus, durch Coſinus des vielfachen Bogens	342	377
*Fläche der Ellipſe für Abſciſſe aus dem Mittelpuncte	343	378
*Ausſchnitt aus dem Brennpuncte	344	380
*Von Keplers Aufgabe		381
*Ausſch. a. d. Brennp. durch Winkel am Brennpuncte	345	383
*Ueber Rectification der Ellipſe	346	389

Der

	§	Seite
Der Hyperbel	VI	392
*Rectification der Parabel	347	393
*Summe von Tangente und Secante	XVI	397
*Differential des paraboliſchen Bogens rational zu machen	XXXII	401
*Rectification durch Reihen	348	402
*Rectif. der Parabel auf Quadratur der Hyperbel	VII	404
Zerlegung gebrochner Functionen in einfache	349	405
Gerade oder ungerade Functionen	350	406
Wenn der Nenner zweene Factoren hat, die keinen gemeinſchaftlichen haben, Zerlegung in zween Brüche	358	411
Zerlegung aus einem gegebenen einfachen Factor des Nenners	361	414
Zerlegung wenn der Nenner eine Potenz iſt	365	417
Wenn er ein Product aus einer Potenz in einen andern Factor iſt	368	422
Werthe von Functionen die unter gewiſſen Umſtänden unbeſtimmt ſcheinen	372	428
Integrirung der rationalen Differentiale	385	437
Erfindung der dreytheilichen Factore	389	445
Anwendung auf Integrationen	397	454
Algebraiſche und tranſcendentiſche Integrale	398 VI	463
Integrirung der Differentiale die eine zweytheiliche Irrationalgröſſe enthalten	399	464
Ein Integral auf ein andres zu bringen	400	467

Inte=

	§	Seite
Integrirung der Differentialglei⸗chungen wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind		479
Separare indeterminatas	405	
Wenn die Integralgleichung algebraiſch oder tranſcen⸗dentiſch wird?	407	480
Die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern, wenn nicht y ſelbſt vorkömmt, nur erſte Differentiale	411	481
Differentialgleichung durch Qua⸗dratur conſtruiren	V	484
Eine allgemeine Differentialglei⸗chung in welcher die veränder⸗lichen Gröſſen von einander ge⸗ſondert werden	412	484
	IX	488
Integration gleichartiger Gleichungen	413	488
Umſtände unter denen ſich eine Glei⸗chung in eine gleichartige verwan⸗deln läſſt	417	494
Integrirung vermittelſt des newto⸗niſchen Parallelogramms	419	496
Nicolaus Bernoullis Methode	465	540
Differentiale für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe	471	548
Ueber Differentiale der Func⸗tionen die zwo veränderliche Gröſſen enthalten	477	551
Merkmahl ob eine Differential⸗gröſſe aus Differentiation einer endlichen entſtanden ſeyn kann	486	557
Von Differentialen der Functio⸗nen die drey veränderliche Gröſſen enthalten	487	558

Anwen⸗

	§	Seite
Anwendung auf Differentialgleichungen	494	563
Die Integralgleichung zu finden	498	568
Veränderlicher Factor	500	570
* Differentielles partielles	503	573
* Integrale particulare	504	575
* Conſtans infinita	IV	576

Fernere Anwendung der Rechn. d. Un. auf krumme Linien.

Quadraturen und Rectificationen wenn die Ordinaten aus einem Puncte gehn	505	579
Fläche der archimediſchen und a. Spiralen	506	584
Differential des Bogens	509	586
Logarithmiſche Spirale	510	587
* Conſtruction derſelben	VI	589
Krümmungswinkel	511	595
Spitze, Rückkehrpunct zwo Arten	516	596
Krümmungswinkel zu finden	518	597
Rückkehrpunct zu finden	520	603
Ob die krumme Linie hohl oder erhaben iſt	521	605
Unendlich groſſer Krümmungswinkel	528	612
Krümmung bey Ordinaten aus einem Puncte	530	613
Wendungspunct	532	615
Für parallele Ordinaten	533	616
Spitze von der zweyten Art	VIIII	619
Für Ord. a. einem P.	536	
Wenn bey parallelen Ordinaten für $dy = 0$ ein Wendungspunct iſt?	537	621
Krümmungskreis	538	622
Halbmeſſer der Krümmung	543	623
Fragen die mit dem Krümmungskreiſe zuſammenhängen	552	636

	§	Seite
Krümmungshalbmeſſer bey Ordinaten aus einem Puncte	555	638
Für die Radlinie	557	639
Rectification, Gleichungen und Quadratur der Radlinie	559	642
Algebraiſche Räume, wo die Quadratur allgemein tranſcendentiſch iſt. Monden	VIII X	645
Wie Aenderung der Krümmung gemeſſen wird	560	645
Evolution	563	647
Jeder algebraiſchen Linie Evolute iſt algebraiſch	570	651
Wenn ſich die Evolute algebraiſch rectificiren läſſt	571	652
Linien zu finden die aus Abwickelung entſtehn	575	653
Quadraturen und Rectificationen laſſen ſich durch Abwickelung finden	577	656
Krumme Linien zu finden die ihren Evoluten ähnlich ſind	578	658
Ordentlich	589	663
Logarithmiſche Spirale	VII	666
Verkehrt	590	668
Verkehrt ähnlich und gleich, Cycloide	VIIII	671
Verkehrt ähnlich und nicht gleich	XIII	674
Geſchichte dieſer Entdeckungen	592	676
Gleichung zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikel auf die Tangente	593	677
Halbmeſſer der Krümmung durch Ordinate u. Perpendikel	596	679
Für Kreis und Punct	597	681

Aus

	§	Seite
Aus der Gleichung zwiſchen Ordinate und Perpendikel eine zwiſchen Ordinate und Winkel	598	680
Hyperboliſche Spirale	599	681
Aus der Gleichung zwiſchen Ordinate und Winkel eine zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten	601	687
Differential der Fläche eines runden Körpers	606	691
Für runde Körper die von Kegelſchnitten beſchrieben werden	607	692
*Dieſe Differentiale zur Integration bequemer ausgedruckt und integrirt	608	693
*Eine Parabel dreht ſich um ihre Axe	I. Satz	695
*Sie dreht ſich um Tangente am Scheitel	II. S.	696
*Eine Ellipſe dreht ſich um ihre groſſe Axe	III.	698
*Um ihre kleine Axe	IV.	701
*Fläche der Erde als eines eingedruckten Sphäroids in Quadratmeilen	V.	706
*Eine Hyperbel dreht ſich um ihre groſſe Axe	VI.	711
*Um ihre kleine Axe	VII.	714
*Geſchichte der Unterſuchungen	VIII.	716
Innhalt eines runden Körpers	609	718
Von Kegelſchnitten	610	719
Verhältniß von elliptiſchen Sphäroid, Kugel und umſchriebenen Cylinder	V	720
Konoiden unendlicher Parabeln	611	721
Runder Körper von der Kiſſoide	612	722
Unendlich lange Körper, endlich oder unendlich	614	723

Hyper-

	§	Seite
Hyperbel dreht ſich um die Aſymptote	615	724
Hufförmige Abſchnitte cylindriſcher Körper	617	727
Körperlicher Innhalt	618	
Fläche	621	731

Abſchnitte runder Körper.

Geſtalt des Schnittes	626	733
Der beſchreibenden Linie ähnlich	627	734
Innhalt eines ſolchen Abſchnittes zwiſchen parallelen Ebenen	629	735
Von der Fläche des ungleichſeitigen Kegels	630	738

Schwerpunct durch Integralrechnung zu finden.

Bey einer gegebenen ebenen Figur	1	740
Halbe Parabel	2	741
Dreyeck	3	742
Ganze Parabel	4	743
Kreisabſchnitt	5	743
Kreisausſchnitt	7	744
Schwere Kreisſcheibe, mittlerer Halbmeſſer wenn ſie ſich dreht	9	745
Bogen einer krummen Linie	11	747
Runder Körper	14	748
Pyramide, kegelartiger Körper	17	749
*Fläche oder Körper, ein Product aus dem Wege des Schwerpuncts in die beſchreibende Gröſſe	21	751
*Pappus, Guldin, Wolf	22	752
Schriftſteller vom Schwerpuncte	24	753

*Alles folgende iſt bey der dritten Ausgabe hinzugekommen.

Varia:

Variationsrechnung mit ihrer Anwendung.

	§	Seite
Variirte krumme Linie	3	760
Variationen und Differenzen. Die erſten, unendlich klein	4	760
Die Linie welche variirt iſt ganz unbeſtimmt	5	
Unterſchied der Variationen ſo groß als Variation des Unterſchiedes	7	762
Variation vom Differentiale ſo groß als Differential der Variation	12	763
Variation eines Products	18	764
Eines Quotienten	19	765
Der Quotienten der Differentiale von Ordinate und Abſciſſe	21	
Die Abſciſſe ſoll nicht variiren	25	767
Variation einer Function von x, y, und derſelben Differentialen	29	768
Variationen von Integralen	31	770
Einfaches und verwickeltes Integral	32	773
	33	
Summe von Variationen	34	
Variation des Integrals ſo groß als Integral der Variation	35	
Variation eines einfachen Integrals	38	775
So dargeſtellt daß keine Differentiale der Variationen der Coordinaten nach einem Summationszeichen ſtehn	39	778

	§	Seite
Was folgt wenn die Variationen ſich wie die Differentiale verhalten	X	780
Durch drey Coordinaten iſt eine krumme Fläche gegeben, auch eine Linie auf ihr, Unterſchied dieſer beyden Vorſtellungen. Doppelte Relation	45	784
Variationen als Differentiale betrachtet	47	789
Erweiterung der Unterſuchungen über Gröſſte und Kleinſte	I	788
Euler Meth. inu. lin. curu.	3	789
Fragen von Gröſſten und Kleinſten.		
Erſte Gattung, $N = o$;	I	791
Ein Integral das keinen gröſſten oder kleinſten Werth hat	I. Ex.	792
Integral das, ein Gröſſtes oder Kleinſtes geſetzt, eine Parabel giebt	II. Ex.	792
Ob es Gröſſtes oder Kleinſtes iſt, aus einer einzigen Probe entſchieden	8	794
Wenn Variationsr. nöthig iſt, muß das Integral weder algebraiſch noch tranſcendentiſch ſeyn, ſondern eine functio indeterminata	9	794
Zweyte Gattung $N = \frac{dP}{dx}$	I	795
In welchem Falle ſich eine algebraiſche Gleichung findet	5	796
$M = o$	8	796
$N = o$	II	797

M =

	§	Seite
M = N	13	797
Wenn jede Linie der Frage genug thut?	17	798

Raum durch kürzeſte krumme Linie einzuſchlieſſen.

	§	Seite
I. Aufgabe	1	799
Die Fläche läſſt ſich nicht nach Gefallen annehmen	15	803
Umfang eines Kreiſes die kürzeſte Linie welche eine Fläche von gegebner Gröſſe einſchlieſſt	20	804
II. Aufgabe	1	805
Die Brachyſtochrone	1	811
Geſchichte	40	825
Runder Körper welcher den kleinſten Wiederſtand leidet	1	829
Geſchichte	7	831
Kürzeſte Linie auf einer gegebenen krummen Fläche	1	834
Geſchichte	42	842
Gröſſtes Vieleck in gegebener Menge gegebener geraden Linien	1	843
Was die Analyſis eigentlich hie lehrt	42	854

Zur Geſchichte der Variationsrechnung.

	§	Seite
Hugens Lichtwellen	1	857
Krumme Linie die eine Reihe Cykloiden ſenkrecht durchſchneidet	2	858
Trajectorien	4	860
Variirende logarithmiſche Linien	5	860
Differentiatio de curua in curuam	11	863

Zwiſt

	§	Seite
Zwiſt zwiſchen Jac. und Joh. Bernoulli	12	864
Iac. Bern. ſolutio probl. iſoperimetrici	14	865
Joh. Bern. Methode	17	867
Fontaine brauchte zuerſt Variationsrechnung	19	869
Le Grange	20	870
Leonh. Euler	21	871
Friſius	22	873
Ferronius	23	874
Analytiſche Rechnungen ſollten durch geometriſche Betrachtung der Figuren erläutert werden.	25	875

Gründe

Gründe der Lehre
vom
Unendlichen.

1. **Erkl.** Eine Gröſſe wächſt unendlich (creſcit in infinitum) wenn ſie gröſſer werden kann, als jede endliche Gröſſe, die ſich angeben, oder mit beſtimmten und gegebenen Gröſſen von ihrer Art vergleichen läſſt, (quantitas in infinitum creſcens, dabili aut adſignabili quauis fieri poteſt maior.

Dergleichen iſt m Alg. (348).

2. **Anm.** Eine Gröſſe kann ohne Ende, (ſine fine) wachſen, ohne unendlich zu werden, wie die Summe der Glieder der Reihen Alg. (108). Sie kann nähmlich immer weniger und weniger wachſen, oder immer geringere und geringere Vermehrungen bekommen, die ohne Ende hinzugeſetzt doch eine gewiſſe beſtimmte Gränze nie erreichen oder überſteigen.

3. Zuſ. Bekömmt eine Gröſſe, ohne Aufhören immer gleiche, oder immer gröſſere Vermehrungen, ſo wächſt ſie unendlich.

4. Zuſ. Eigentlich kann man nicht ſagen: eine Gröſſe iſt unendlich groß. Jede Gröſſe, die iſt, läſſt ſich angeben. Wenn man aber dieſen Ausdruck braucht, ſo ſtellt man ſich gleichſam eine Gränze vor, der ſich die Gröſſe durch die beſtändige Vermehrung (1) immer nähert, und nimmt dieſe Gränze ſtatt der Gröſſe in einem Zuſtande, den man für ihren letzten anſieht, ob es gleich wiederum keinen ſolchen letzten giebt.

So wird die Summe Alg. 108. genommen.

5. Erkl. Kann eine Gröſſe kleiner werden, als jede die ſich angeben läſſt, ſo nimmt ſie unendlich ab oder verſchwindet (euaneſcit) und da ſagt man: ſie werde unendlich klein.

Gränze des Abnehmens läſſt ſich hie keine andre denken als: Nichts. Eine Gröſſe die unendlich klein wird kann alſo der 0 ſo nahe kommen als man will.

Wie eines Bogens der von Nichts bis an den Quadranten wächſt Coſinus (trigon. 3. Erkl. 3. Zuſ.).

Auch ſo das eingebildete letzte Glied Alg. 107.

Man betrachtet hie das Abnehmen nur bis auf Nichts, bis die Gröſſe nicht mehr vorhanden

den iſt, nicht über Nichts hinaus daß ſie verneint würde (Arithm. I. C. 90.) denn da hätte man wiederum Gröſſe, nur der vorigen entgegengeſetzt, und dieſe Gröſſe wüchſe immer.

Der hieſigen Soc. d. W. habe ich 1759. einen Aufſatz de vera infiniti notione vorgelegt. Er findet ſich in Diſſertationes math. et phyſ. quas S. R. Sc. Gott. annis 1756.-1766. exhibuit Abrah. Gotth. Kaeſtner. Altenb. 1771. p. 35. Die Abhandlung de lege continui in natura, das p. 142. enthält auch unterſchiednes die Lehre vom Unendlichen betreffend.

6. Zuſ. Wenn $u = \frac{1}{x}$ oder $x = \frac{1}{u}$ und u unendlich wächſt, ſo nimmt x unendlich ab.

7. **Erkl.** Eine Gröſſe nähert ſich einem Werthe unendlich, wenn ihr Unterſchied von dieſem Werthe kleiner als jede Gröſſe werden kann, die ſich angeben läſſt. Der Werth heißt alsdenn ihre Gränze (4). So heiſſt auch eine Verhältniß, der ſich eine andere unendlich nähert, die Gränze dieſer andern.

8. Zuſ. Wenn $y = e + z$ ſich dem Werthe e unendlich nähert, ſo kann für y jeder Werth geſetzt werden, der zwiſchen e und $e + z$ fällt. Man darf alſo z unendlich abnehmen laſſen, und die Gränze die man ſtatt y brauchen kann, iſt e.

9. Aufg. **Wenn** u; eine Gröſſe, die unendlich wächſt, bedeutet und $au + b = z$,

die Gränze, der ſich z unendlich nähert, zu finden.

Aufl. $\frac{au + b}{au} = 1 + \frac{b}{au}$; Wenn nun u unendlich wächſt, ſo nimmt $\frac{b}{au}$ unendlich ab, und $1 + \frac{b}{au}$ nähert ſich unendlich dem Werthe 1; Aber $\frac{au + b}{au} = \frac{z}{au}$. Wenn alſo u unendlich wächſt ſo nähert ſich $\frac{z}{au}$ unendlich dem Werthe 1; das iſt z nähert ſich unendlich dem Werthe au.

Behauptete jemand $\frac{z}{au}$ müſſte von 1 allemahl wenigſtens um e eine Gröſſe die ſich angeben lieſſe, unterſchieden ſeyn; ſo daß nie $\frac{z}{au} < 1 + e$ würde, ſo könnte $1 + \frac{b}{au}$ nie kleiner als $1 + e$ werden; das iſt $\frac{b}{au}$ nie kleiner als e; Wider die Vorausſetzung daß u ſo groß als man will, werden kann, wodurch gewiß $\frac{b}{au}$ kleiner als jede Gröſſe die ſich angeben läſſt wird.

Alſo

Alſo iſt 1 hier eine ſolche Gränze, der ſich $\frac{z}{au}$ unendlich nähert, und die man wie in (4) für erreicht anſieht, wenn man u unendlich nennt.

Dieſes pflegt man ſo auszudrücken:

Wenn u unendlich wird, ſo verſchwindet in Vergleichung mit dem Theile, der u als einen Factor enthält, alles andere, worinnen u nicht als ein Factor befindlich iſt, alſo iſt für $u = \infty$ (das Zeichen des unendlichen) $z = a. \infty$.

10. Zuſ. Wenn n eine kleinere bejahte Gröſſe als m iſt, und $z = au^m + bu^{m-n}$, ſo iſt $\frac{z}{au^m} = 1 + \frac{b}{au^n}$ welches ſo nahe an 1 kommen kann als man will; wenn man u ſo groß nehmen darf als man will; wenn alſo u unendlich wächſt, ſo nähert ſich wiederum $\frac{z}{au^m}$ unendlich der Gränze 1, oder z dem Werthe au^m; oder wenn eine Gröſſe aus verſchiedenen Theilen beſteht, deren jeder eine andere Potenz von u als einen Factor enthält, ſo verſchwinden für $u = \infty$ alle Theile, die niedrigere Potenzen enthalten, in Vergleichung mit den höchſten.

Man trägt den Beweiß dieſes Satzes gewöhnlich ſo vor: $au^m : bu^{m-n} = au^n : b$ wo u ſo groß iſt, daß das zweyte Glied in Vergleichung des erſten für nichts zu achten iſt.

11. Zuſ. $y = au^m$ und $t = bu^{m-n}$ können beyde alle Gränzen überſteigen, d. i. unendlich werden, und doch wird y in Vergleichung mit t unendlich. Es giebt alſo unendlich groſſe Gröſſen von verſchiedenen Ordnungen; da man y von einer höhern Ordnung heiſſt, in Vergleichung mit welcher, die andere t verſchwindet. Ueberhaupt heiſſt hier y ein Unendlich groſſes von der Ordnung m, es mag nun m ein bejahter Bruch oder eine ganze bejahte Zahl ſeyn.

Wenn c der Parameter einer Parabel und (Alg. 349.) $y = c^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$ iſt, ſo wird y, die Ordinate der Parabel ein unendlich Groſſes von der Ordnung $\frac{1}{2}$ wenn die Abſciſſe u ein unendlich Groſſes von der Ordnung 1 wird. Die Abſciſſe wird alſo unendlich mahl gröſſer als ihre Ordinate, denn es iſt $y : u = \sqrt{cu} : u = \sqrt{c} : \sqrt{u}$ wie was Endliches zu der Quadratwurzel von was Unendlichem, welche ohne Zweifel auch unendlich iſt. Die Ordinate iſt nähmlich die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe; alſo allemahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe gröſſer als der Parameter iſt, und folglich ſehr vielmahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe ſehr vielmahl gröſſer als der Parameter iſt.

Auch

Auch iſt $\frac{k}{u^m} : \frac{l}{u^{m+n}} = k. u^m : l$ oder der letzte dieſer beyden Quotienten verſchwindet in Vergleichung mit dem erſten, wenn u unendlich wird. Er nimmt nähmlich ſchneller ab als der erſte, weil die Gröſſe, die unendlich wächſt, in ſeinem Diviſor auf eine höhere Potenz erhoben iſt. Die beyden Quotienten laſſen ſich auch (nach 5) ſo ausdrücken, $k. x^m$ und $l. x^{m+n}$ deren Verhältniß $= k : l. x^n$ iſt, wo das letzte Glied verſchwindet, wenn x unendlich abnimmt, und alſo eben den vorigen Schluß giebt. Alſo hat man **Unendlich kleine** von verſchiedenen **Ordnungen**, da die **höhere** in Vergleichung mit der niedrigen verſchwindet, wie hier der letzte Quotient in Vergleichung mit dem erſten.

Wenn in der Parabel $yy = cx$ die Ordinate y unendlich klein von der erſten Ordnung wird, ſo wird $x = \frac{yy}{c}$ unendlich klein von der zweyten. Weil ſich nähmlich die Abſciſſe wie das Quadrat der Ordinate verhält, ſo nimmt die Abſciſſe viel ſchneller ab als die Ordinate, wenn die Ordinate klein iſt, weil das Quadrat eines eigentlichen Bruches kleiner als der Bruch ſelbſt iſt. Gegentheils wenn x unendlich klein von der Ordnung 1 iſt, ſo iſt y unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$ oder $= \infty^{\frac{1}{2}}$.

Wenn die Abſciſſe eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer = 2 r iſt, x, die Ordinate y heiſſt, ſo iſt die Ordinate $y = \sqrt{}(2rx - xx)$ (Alg. 324.) welche ſich dem Werthe $\sqrt{} 2rx$ unendlich nähert, wenn x unendlich abnimmt, weil $2rx - xx = (2r - x).x$ welches Product ſich unter dieſen Umſtänden dem Werthe 2rx unendlich nähert. Wird alſo x ein unendlich kleines der erſten Ordnung, ſo wird $y = \sqrt{} 2rx$ ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{1}{2}$ und bleibt alſo unendlich gröſſer als x weil $\sqrt{} 2rx : x = \sqrt{} 2r : \sqrt{} x$ wo das letzte Glied in Vergleichung mit dem erſten verſchwindet. Die Abſciſſe nimmt hier aus eben der vorigen Urſache ſchneller ab als die Ordinate.

12. Zuſ. t; y, ſind ein Paar Coordinaten einer krummen Linie zwiſchen denen die Gleichung $t^m = \frac{a^{m+n}}{y^n}$; wo m, n, ganze bejahte Zahlen bedeuten.

Alſo $t = \frac{a^{1+n:m}}{y^{n:m}}$. Da nimmt t immer ab, wenn y wächſt, und wenn y unendlich groß wird, ſo wird t unendlich klein.

Nun $t.y = a^{1+n:m}.y^{1-n:m}$ Wenn n = m, ſo iſt $t.y = a^2$ eine endliche unveränderliche Gröſſe. Die Gleichung gilt nähmlich für die koniſche Hyperbel, (Anal. endl. Gr. 412).

Wenn

Wenn n kleiner iſt als m; ſo wächſt der beyden Coordinaten Product immer wenn y wächſt, und wird unendlich wenn y unendlich wird.

Iſt aber n gröſſer als m, ſo läſſt ſich dieſes Product ſo ausdrucken: $\frac{a^{1+n:m}}{y^{n:m-1}}$ da wächſt der Diviſor wenn y wächſt, das Product nimmt alſo ab, und wird unendlich klein wenn y unendlich wird.

Es ſey $t^3 = \frac{a^4}{y}$ alſo $m = 3$; $n = 1$; $t.y = a^{4:3}.y^{2:3}$ wird unendlich groß, von der Ordnung $\frac{2}{3}$.

Es ſey $t^2 = \frac{a^5}{y^3}$; $m = 2$; $n = 3$ $t.y = \frac{a^{5:2}}{y^{1:2}}$ wird unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Wenn in einem Producte ein Factor immer wächſt, der andre immer abnimmt, ſo muß man auf angezeigte Art unterſuchen, was das Product wird, wenn der eine unendlich wird. Manchmahl geht es auch an, dieſes Product durch ein anderes auszudrucken das ihm immer gleich iſt und der eine Factor nicht verſchwindet wenn der andre unendlich wird. So iſt (Trig. 4. Erkl. 3. Zuſ) $\cos\lambda. \tan\lambda = 1. \sin\lambda$. Wenn in dem Producte linker Hand, die Tangente unendlich wird, verſchwindet der Coſinus,

 das

das Product aber wird das Quadrat des Sinus-totus.

Das heißt (7) wenn ein Winkel von 0 bis 90 Gr. wächſt, ſo nähert ſich das Product aus ſeiner Tangente in den Coſinus, beſtändig dem Quadrate des Sinustotus, und kömmt ſolchem ſo nah als man will, wenn der Winkel ſo nah man will an den rechten kömmt.

In Anal. endl. Gr. 422. X. ſuchte ich aus eben dem Grunde einen andern Ausdruck für das Product g. ſin γ.

Gründe der Differentialrechnung.

13. **Erkl.** Z ſey durch z und beſtändige Gröſſen gegeben, alſo eine Function von z, Z + E ſey eben die Function von z + e, oder Z + E komme heraus, wenn man z + e ſtatt z in die Gleichung zwiſchen Z und z ſetzt. Wenn man nun e unendlich vermindert (5) ſo heiſſt man die Gränze der ſich die Verhältniß E : e unendlich nähert, die Verhältniß der Differentiale von Z und z; auch die unendlich kleinen e; E; die Differentiale von z; Z.

Z; Z + E; ſind zwey nach einander folgende Glieder einer Hauptreihe, und E iſt ihr Unterſchied (Alg. 724.) dieſer kann unendlich abnehmen, wenn e unendlich abnimmt, und läſſt ſich alſo ſelbſt, für dieſe unendliche Abnahme des e nicht beſtimmen. Wenn aber ſeine Ver-

Verhältniß E: e bey einer unendlichen Abnahme des e noch endlich bleibt, ſo läßt ſich dieſe noch angeben.

14. Zuſ. Es ſey Z = PM 1 Fig.; z = AP; Z + E = QN; z + e = AQ und MS mit AP parallel, ſo iſt die Verhältniß E: e = NS: SM und man kann ſich alſo vorſtellen, die Ordinate QN nähere ſich der PM ohne Ende, da denn die Verhältniß NS: PQ ſich der Verhältniß der Differentialien der Abſciſſe und der Ordinate ohne Ende nähert. Wenn man alſo ſetzt mR: Pp ſey die Verhältniß, der ſich die NS: PQ ohne Ende nähert, oder wenn man Pp und mR unendlich klein annimmt, ſo ſind ſolches die Differentialien der Abſciſſe und Ordinate.

Exempel. CMN ſey eine Parabel, der Anfang ihrer Abſciſſen C, falle in A daß die Abſciſſe CP oder AP = z; die Ordinate PM = Z; der Parameter = b; alſo $Z^2 = b. z$; und $(Z + E)^2 = b. (z + e)$ folglich $(Z + E)^2 - Z^2 = b. z + b. e - b. z$ oder $2. E. Z + E^2 = b. e$, wenn die Ordinate PM = Z bleibt, und PQ = e immer abnimmt, ſo nimmt auch NS = E immer ab. Nun iſt $\frac{E}{e} = \frac{b}{2. Z + E}$

In dem Ausdrucke des Quotientens rechter Hand, iſt der Dividend unveränderlich, der Diviſor übertrifft 2. Z immer um was geringeres, je mehr E abnimmt, der wirklichen Unterſchiede

E, e,

E, e, Quotient iſt allemahl kleiner als $\frac{b}{2Z}$, kömmt aber dieſem Werthe ſo nah als man will, wenn E bis auf Nichts abnehmen kann. Kann man nun QN ſo nah als man will an PM rücken laſſen, ſo kömmt der Quotient $\frac{E}{e}$ dem Werthe $\frac{b}{2Z}$ ſo nah als man will, und dieſe Gränze welche durch die endlichen Gröſſen b, 2. Z angegeben iſt, heiſſt der Quotient der Differentiale.

15. Aufg. **Wenn $a^{n-1}. Z = z^n$ die Verhältniß der Differentialien zu finden.**

Aufl. Hier iſt $a^{n-1} (Z + E) = (z + e)^n$; alſo (Alg. 141.).

$$a^{n-1}. \frac{E}{e} = n. z^{n-1} + \frac{n. (n-1)}{1. 2} e. z^{n-2} + \frac{n. (n-1). n-2}{1. 2. 3} e^2 z^{n-3} \ldots + e^{n-1}.$$

Wenn nun in der Reihe rechter Hand z einen gewiſſen Werth behält, ſo kann ſich doch e ohne Ende vermindern, und bis auf nichts abnehmen; dadurch nähert ſich der Werth dieſer Reihe ohne Ende der Gränze $n z^{n-1}$ und folglich iſt die Verhältniß der Differentialien $\frac{E}{e} = \frac{n z^{n-1}}{a^{n-1}}$; oder wenn a = 1; und e das Differential von z heiſſt, das als unendlich klein angeſehen wird,

ſo

ſo iſt das zugehörige Differential von Z; oder $E = n. e. z^{n-1}$.

16. Zuſ. Dieſe Rechnung ſetzt zum voraus, daß z eine gewiſſe Gröſſe hat, e anfangs endlich iſt, und bis auf Nichts vermindert wird. Wäre aber $z = 0$, ſo wäre offenbahr $E = e^n$ was auch e für einen Werth hätte. Dieſe Erinnerung iſt bey einigen, obwohl ſeltener vorkommenden Fällen nöthig, denn ordentlich iſt nicht $z = 0$. S. Jac. Bernoulli Op. n. 103. art. 22. Eul. Inſt. Calc. diff. P. II. c. 14.

Es ſey $a. Z = z^2$; Ein Quadrat deſſen veränderliche Seite $= z$, immer ſo groß als ein Rechteck deſſen unveränderliche Höhe $= a$; veränderliche Grundlinie $= Z$; ſo kömmt der Quotient der Aenderungen bey der veränderlichen Linie $\frac{E}{e} = \frac{2. z}{a} + \frac{e}{a}$. Hat die Seite des Quadrats irgend eine endliche Gröſſe, alſo auch die Grundlinie des Rechtecks, ſo kann man e allemahl ſo klein nehmen als man will und da kömmt $\frac{E}{e}$ dem Werthe $\frac{2. z}{a}$ ſo nah als man will, weil gegen dieſen Werth, $\frac{e}{a}$ ſo klein werden kann als man will.

Wäre aber $z = 0$; folglich auch Z, ſo verwandelte ſich $a. E = 2. e. z + e^2$ in $a. E = e^2$,

das

das gäbe $\frac{E}{e} = \frac{e}{a}$. Nähmlich wenn ein Quadrat entſtehen ſoll, da zuvor keins geweſen iſt, ſo ſind die nach einander folgenden Seiten des Quadrats nicht z; z + e; ſondern o; o + e; und die nach einander folgenden Grundlinien o; E; da werden mit einander nicht Aenderungen der beyden Linien verglichen, ſondern E entſtehende Grundlinie, mit e entſtehender Seite.

17. Anm. Wenn in der Reihe

$$E = nez^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}e^2z^{n-2} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.}e^3z^{n-3}\ldots$$

e eine unendlich kleine Gröſſe bedeutet, ſo verſchwindet jedes folgendes Glied in Vergleichung mit dem nächſtvorhergehenden. Denn das erſte verhält ſich zum zweyten wie $z : \frac{(n-1).}{1.2}e$ das zweyte zum dritten wie $z : \frac{n-2}{3}e$ u. ſ. w. wo jeder Verhältniß letztes Glied, weil es e als einen Factor enthält, in Vergleichung mit dem endlichen z; für nichts zu achten iſt. Alſo wird $E = nez^{n-1}$. So trägt man dieſen Beweis insgemein vor. Man mag nun die unendlich kleinen Gröſſen als was wirkliches, als eine Erdichtung, oder mit Herrn Eulern Inſt. Calc. diff. Cap. III. als o anſehen, ſo wird doch die Auflöſung (15) ihre Richtigkeit behalten. Eigentlich ſucht man bloß die Gränze der Verhältniß E: e in endlichen Gröſſen $nz^{n-1} : 1$ ausgedruckt; Nimmt man nun an, e bedeute was Unendlich kleines, ſo wird E eben dergleichen bedeuten, und man kann ſich alſo ein paar unendlich kleine Gröſſen vorſtellen, welche dieſe Verhält-

hältniß hätten, folglich vermittelſt der Gleichung $E = nez^{n-1}$ eine durch die andere ausdrucken. Dieſe Gleichung iſt in der völligen Schärfe wahr, weil es in völliger Schärfe wahr iſt, daß $nz^{n-1} : 1$ die Gränze der Verhältniß $E : e$ iſt. Aber der Beweis im Anfange dieſer Anmerkung könnte den Verdacht erregen, als wäre dieſe Gleichung nur beynahe wahr, weil man ſagt, die folgenden Glieder der Reihe würden als unendlich klein in Vergleichung mit den vorhergehenden weggelaſſen. Wenn man den Begriff vom unendlich Kleinen, den ich (5) gegeben habe, annimmt, wird dieſer Verdacht verſchwinden. Man kann die Verhältniß $E : e$ der $nz^{n-1} : 1$ ſo ſehr nähern als man will, ſo daß ſich kein Unterſchied zwiſchen beyden angeben läſſt. Gröſſen, zwiſchen denen ſich kein Unterſchied angeben läſſt, ſind ohne Zweifel gleich; und wenn es alſo in völliger Schärfe wahr iſt, daß $E : e = nz^{n-1} : 1$ ſo iſt in eben der Schärfe $E = nez^{n-1}$. Es verhält ſich hier eben ſo wie bey der Summe Alg. 108.

18. Willk. Satz. **Das Differential einer Gröſſe bezeichne man durch den Buchſtaben d vor ſie geſetzt.** So iſt $E = dZ$; $e = dz$; und in (15) $dZ = nz^{n-1} dz$. **Man muß bemerken, daß d hier nicht etwa einen Factor bedeutet, ſondern mit der Gröſſe, die nach ihm folgt, zuſammen ein einziges Zeichen ausmacht. Auch ſchreibt man, Verwirrung zu vermeiden, in jedem Producte das Differential gern zuletzt; z. E. $a.\,dx$ ſtatt $dx.\,a$.**

19. **Erkl.** Wenn eine Gröſſe Z eine Function von z iſt, ſo heiſſt die Verhältniß der Differentiale (13) finden; Z differentiiren. Und aus der Gleichung zwiſchen den endlichen Gröſſen Z und z eine zwiſchen ihren Differentialen

len finden, heiſſt die Differentialgleichung zwiſchen Z und z finden.

20. Aufg. Eine Gleichung enthält auf einer Seite die erſte Potenz von Z allein auf der andern dieſer Gröſſe Werth in Potenzen von z mit Cofficienten angegeben. Der Potenzen Exponenten ſind ganze bejahte Zahlen. Man ſucht die Differentialgleichung.

Aufl. I. Ein Exempel ſey

$$Z = A + B.z + C.z^2 + D.z^3$$

So iſt

$$Z + E = A + B.(z + e) + C.(z + e)^2 + D.(z + e)^3$$

alſo

$$E = \left.\begin{matrix} B. \\ + 2.C.z \\ + 3.D.z^2 \end{matrix}\right\} e + \left.\begin{matrix} C \\ + 3.D.z \end{matrix}\right\} e^2 + D.e^3$$

II. Folglich

$$E = \left(\begin{matrix} B \\ + 2.C.z \\ + 3.D.z^2 \end{matrix} \left.\begin{matrix} + C \\ + 3.D.z \end{matrix}\right\} e + D.e^2 \right).e.$$

III) Hie iſt in e ein Factor multiplicirt der unveränderliche Gröſſen, z, und e enthält. Man nenne ihn = S.

IV) So iſt $\frac{E}{e} = S$.

V) Im Factor S, ſetze man $e = 0$, ſo verwandelt er ſich in $P = B + 2.C.z + 3.D.z^2$.

VI)

VI) Nun ſchreibe man linker Hand in (IV), dZ ſtatt E; dz ſtatt e; So iſt $\frac{dZ}{dz} = P$, oder $dZ = P.\,dz$ die Differentialgleichung.

VII) Dieſes Exempel zeigt das allgemeine Verfahren. Die Reihe für Z in (I) kann mehr Glieder haben, und dann bekömmt auch die Reihe für E mehr Glieder, in denen die Potenzen von e, nach den Exponenten 1, 2, 3, 4... ſteigen; Wenn man alſo den gemeinſchaftlichen Factor e abſondert und damit auf beyden Seiten dividirt ſo iſt wie in (IV) S allemahl eine Reihe deren erſtes Glied kein e enthält, jedes der folgenden eine Potenz von e, die Potenzen ſteigen immer; Setzt man nun $e = 0$, ſo bleibt von S blos das erſte Glied welches nur Potenzen von z und unveränderliche Gröſſen enthält, und das iſt P wie in (V) So iſt $\frac{dZ}{dz}$ durch dieſes P gegeben.

VIII) Befindet ſich in der Reihe für Z, ein Glied $= N.\,z^n$ ſo gibt dieſes in der Reihe für E ein Glied $= n.\,N.\,z^{n-1}.\,e$, und das kömmt in das erſte Glied der Reihe für E. Dieſes erſte Glied enthält alſo ſoviel Theile, ſoviel Glieder die Reihe für Z hat, folglich enthält P auch ſoviel Theile.

IX) Wäre die Reihe für Z unendlich, ſo müſſte, wenn ſie zur Rechnung dienen ſollte, z ein ei-

gentlicher Bruch ſeyn, deſſen höhere Potenzen man weglieſſe und doch den Werth von Z der Wahrheit nahe fände. Eben ſo lieſſe man in P die höheren Potenzen von z weg, den Werth $\frac{dZ}{dz}$ der Wahrheit nahe zu haben.

X) Nähme man in (II) ein z für das $B + 2. C. z + 3. D. z^2 = 0$; ſo wäre $\frac{E}{e} = C + 3. D. z + D. e$ wenn alſo da e und E zuſammen verſchwinden, ſo wäre $\frac{dZ}{dz} = C + 3. Dz$ für dieſen beſondern Werth von z. Das iſt hie ſo was wie die Erinnerung in (16).

XI) Man kann ein ähnliches Verfahren brauchen, wenn auch höhere Potenzen von Z vorhanden ſind. Iſt in einem Kreiſe der Halbmeſſer $= 1$ und die Abſciſſe vom Mittelpuncte gerechnet $= z$ ſo iſt der Ordinate Quadrat $Z^2 = 1 - z^2$; Alſo auch $(Z + E)^2 = 1 - (z + e)^2$ giebt $2. (Z + E). E = -(2. z + e). e$, alſo $\frac{E}{e} = - \frac{2. (z + e)}{2Z + E}$; Läſſt man rechter Hand, e, E; bis auf nichts abnehmen, ſo kömmt $\frac{dZ}{dz} = - \frac{z}{Z}$.

Das ſetzt zum Voraus, Abſciſſe und zugehörige Ordinate ſind beyde von endlicher Gröſſe,

daß

daß jede Aenderung in Vergleichung mit ihr verſchwinden kann. Wäre aber die Abſciſſe $= 0$ alſo die Ordinate $= 1$; ſo könnte dieſe Abſciſſe ſich nicht ſo ändern daß ihre Aenderung gegen ſie verſchwinden könnte, ſondern ſie ſelbſt wäre nichts gegen jede ihrer Aenderungen; Da käme $\frac{E}{e} = \frac{-e}{2+E}$ oder $E^2 + 2.E = -e^2$ daraus $E = -1 \pm \sqrt{(1-e^2)}$; Nähmlich E wäre der Unterſchied zwiſchen den beyden Ordinaten, deren eine $= 1$ der Abſciſſe $= 0$ gehört, die andre $= \sqrt{(1-e^2)}$ der Abſciſſe $= e$. Der Unterſchied iſt doppelt, weil zu jeder Abſciſſe ein Paar entgegengeſetzte ſonſt gleiche Ordinaten gehören.

XII) So erläutern dieſe Rechnungen ſowohl wie Verhältniſſe zwiſchen verſchwindenden Aenderungen angegeben werden, als auch, was ſtatt findet, wenn die Aenderungen nicht in Vergleichung deſſen wovon ſie Aenderungen ſind, verſchwinden können.

21. Zuſ. Wenn eine veränderliche Gröſſe die Summe oder Differenz einiger Veränderlichen iſt, ſo iſt jener ihr Differential die Summe oder Differenz von dieſer Differentialen.

Es ſey $Z = u + x - y$ alſo

$$\begin{array}{r} Z + dZ = u + du + x + dx - y - dy \\ \hline dZ = du + dx - dy. \end{array}$$

 Ich

Ich brauche hie der nächſten Anwendung gemäß, Nahmen und Bezeichnung von Differentialen; es iſt aber klar daß der Satz überhaupt gilt: Iſt $Z = u + x - y$; und bleibt dieſes wahr wie ſich auch dieſe Gröſſen ändern, ſo iſt die Aenderung von Z allemahl = Aenderung von u + Aenderung von x — Aenderung von y, ſo groß auch dieſe Aenderungen ſeyn mögen.

Eben ſo iſt auch von endlichen Aenderungen wahr was in 22; 23; von Differentialen geſagt wird.

22. Zuſ. Eine veränderliche Gröſſe, und die Summe oder der Unterſchied dieſer veränderlichen Gröſſe und einer beſtändigen, haben einerley Differential.

$$\begin{array}{r} Z = u + a \\ Z + dZ = u + du + a \\ \hline dZ = du \end{array}$$

In dieſem Verſtande ſagt man, es ſey $da = 0$ wenn man nähmlich mit a hätte wie mit x oder y in 21 verfahren wollen.

23. Zuſ. Wenn die Gleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen ſo beſchaffen iſt, daß eine abnimmt, indem die andere wächſt, ſo bekommen ihre Differentiale entgegengeſetzte Zeichen.

$$\begin{array}{r} x + y = a \\ x + dx + y + dy = a \\ \hline dx + dy = o \text{ oder } dx = - dy \end{array}$$

Ein verneintes Differential einer bejahten Gröſſe zeigt alſo ein Abnehmen an, oder es zeigt an, daß dieſe bejahte Gröſſe abnimmt, indem eine andere bejahte zunimmt. Aber eine verneinte Gröſſe nimmt ab, oder wird eine kleinere verneinte, wenn ihr Differential bejaht iſt, ſo wie ſie zunimmt, wenn es verneint iſt. Die gewöhnlichen Regeln der Subtraction zeigen dieſes deutlich.

24. Aufg. Das Differential eines Products $xy = Z$ zu finden, oder ein Gleichung zwiſchen dZ und x; y; dx; dy; zu finden.

Aufl. $4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$; alſo iſt $4\,dZ =$ dem Differentiale von $(x+y)^2$ weniger dem Differentiale von $(x-y)^2$ gleich (21).

Es ſey $x + y = u$; ſo iſt $dx + dy = du$ (21) und $(x+y)^2 = u^2$; und das Differential des Quadrates von $x+y$ ſo groß als $2\,udu$ (aus 18; wenn dorten 2; u; ſtatt n; z; geſetzt wird).

Aber $2\,udu = 2.\,(x+y).\,(dx+dy)$.

Es ſey $x - y = v$ ſo iſt $dx - dy = dv$ (21) und $(x-y)^2 = v^2$ und das Differential des Quadrates von $x - y$ ſo groß als $2\,vdv$ (18)

 $= 2.$

$= 2. (x - y). (dx - dy)$ alſo $4\,dZ = 2. (x + y). (dx + dy) - 2. (x - y). (dx - dy)$

$$\begin{array}{r} 2\,dZ = xdx + ydx + xdy + ydy \\ - xdx + ydx + xdy - ydy \\ \hline dZ \text{ oder } d(xy) = ydx + xdy \end{array}$$

25. I) Ein Beweis nach Art deſſen in (15). Wenn $x.y = Z$; $(x + e). (y + f) = Z + E$ ſo iſt $y.e + x.f + e.f = E$; und

$$1 + \frac{e.f}{y.e + x.f} = \frac{E}{y.e + x.f}$$

In dieſer Rechnung ſind x; y; endliche Gröſſen e, f, ihre Aenderungen, $\frac{e}{x}$; $\frac{f}{y}$ endliche Quotienten, deren jeder aber ſo klein als man will werden kann, wenn e, f, abnimmt, x, y, ungeändert bleibt.

II) Ich ſage: bey dieſem Abnehmen von e, f, läſſt ſich der letzten Gleichung in (I) zweyter Theil linker Hand, ſo klein machen als man will, dadurch kömmt das Ganze was linker Hand ſteht ſo nah als man will an 1; und dieſe 1 iſt die Gränze welcher das was rechter Hand ſteht ſo nahe kommen kann als man will, daß alſo das was rechter Hand ſteht $= 1$ geſetzt werden kann wenn e, f, alſo auch E bis auf Nichts abnehmen können (4).

III) Man ſetze $y.e + x.f = w.e$, ſo iſt

$$y + \frac{x.f}{e} = w$$ eine endliche Gröſſe, durch die endlichen Gröſſen die linker Hand ſtehn gegeben.

IV) Die letzte Gleichung in (I) wird alſo

$$1 + \frac{f}{w} = \frac{E}{y.e + x.f}$$

V) Wenn f, e, beyde abnehmen, ändert ſich w, bleibt aber immer eine endliche Gröſſe weil ſie durch x; y; und den Quotienten der beyden Aenderungen gegeben iſt.

VI) Läſſt man alſo in (IV) linker Hand f unendlich abnehmen, ſo wird $\frac{f}{w}$ ſo klein als man will, und was linker Hand ſteht, kömmt ſo nah als man will an 1, folglich auch der Werth deſſen was rechter Hand ſteht (II) der ſich auch ſo hätte ausdrucken laſſen $\frac{E}{w.e}$, wo der Dividend die Aenderung von Z iſt, der Diviſor das Product aus einer endlichen Gröſſe in die Aenderung von x; und jede der beyden Aenderungen bis auf nichts abnehmen kann.

VII) Setzte man $y.e + x.f = w^*.f$; So käme $1 + \frac{e}{w^*} = \frac{E}{w^*.f}$ der zweyte Theil linker Hand hat zum Diviſor die Gröſſe w^*

welche endlich bleibt wenn auch e bis auf nichts abnimmt. Der Quotient rechter Hand, wenn ſein Diviſor und ſein Dividend bis auf nichts abnehmen, kömmt alſo ſo nah man will an 1.

VIII) So verwandelt ſich nach (18) die letzte Gleichung (I) in $1 = \frac{dZ}{y.dx + x.dy}$, eben wie in (25).

IX) Das Product x. y ändert ſich um x. dy + y. dx + dx. dy, da iſt der dritte Theil unendlich klein gegen jeden der beyden erſten, wird alſo weggelaſſen, und die beyden erſten geben das Differential des Products. So ſteht der Beweis in l' Hoſpital, Analyſe des infiniment petits §. 5. Wolf, El. Analyſ. P. II. §. 12; und andern Lehrbüchern. Die Abſicht meines bisherigen Vortrags war das Weglaſſen zu rechtfertigen.

X) Nimmt von den beyden veränderlichen Gröſſen eine ab z. E. y; ſo iſt ihre Aenderung f, verneint. Selbſt kann von ihnen beyden eine verneint ſeyn z. E. x; ſo iſt Z verneint, wären beyde verneint ſo iſt Z bejaht. Das macht nun keine Schwierigkeit wenn man mit entgegengeſetzten Gröſſen zu rechnen weiß.

XI) Unter ſolchen Umſtänden aber könnte $y.e + x.f = 0$ ſeyn. Da wäre $e.f = E$ und

$1 = \frac{E}{e.f}$. Nähme man an dieſes fände ſtatt indem die Aenderungen bis auf nichts abnehmen, ſo hieſſe es: $dx.dy = dZ$.

Das iſt ſo was wie bey (16) iſt bemerkt worden, und findet nur für einzeln zuſammengehörige Werthe von x; y; ſtatt, wird alſo in der allgemeinen Vorſchrift nicht in Betrachtung gezogen.

XII) Aenderungen die gegen die Gröſſen welche ſich ändern verſchwinden, nennt man Differentiale; So kann man Aenderungen welche gegen die Gröſſen die ſich ändern ſehr klein ſind, beynahe als Differentiale anſehn, und eine Differentialformel brauchen, zwiſchen kleinen Aenderungen, eine Gleichung anzugeben die beynah wahr iſt.

XIII) Das läſſt ſich anwenden zu berechnen wie viel Fehler oder Ungewißheit bey Rechtecken betragen, wenn man bey der Gröſſe ihrer Seiten gefehlt hat oder ungewiß iſt.

Man habe bey einem Rechtecke gefunden: Grundlinie $x = 80$; Höhe $y = 90$, ſo berechnet man das Rechteck $7200 = Z$; Geſetzt aber die eigentliche Grundlinie wäre $80 + 0{,}04$, die Höhe $90 - 0{,}02$ ſo wäre $e = + 0{,}04$; $f = - 0{,}02$ und der Unterſchied zwiſchen dem eigentlichen Rechtecke, und dem gefundnen; $E = y.e + x.f + e.f = 90.\ 0{,}04 -$

 80.

80.0,02 − 0,04.0,02 = + 3,6 − 1,6 − 0,0008; läſſt man den dritten Theil als dx. dy weg, ſo kömmt E = + 2, und das eigentliche Rechteck ſehr beynahe = 7202, in völliger Schärfe = 7201,9992.

26. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{x}{y} = v$ oder das Differential eines Quotientens zu finden.

Aufl. I) $x = vy$; alſo $dx = vdy + ydv$ (24)

und dv oder $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx - vdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

II) Es ſey $\frac{x}{y} = Z$ und $\frac{x+e}{y+f} = Z + E$,

daher

$$E = \frac{x+e}{y+f} - \frac{x}{y} = \frac{x.y + y.e - x.y - x.f}{(y+f).y}$$

oder

$$E = \frac{y.e - x.f}{y^2 + y.f} \text{ und } \frac{E}{y.e - x.f} = \frac{1}{y^2 - y.f}.$$

Kann nun f gegen y davon es die Aenderung iſt, ſo klein werden als man will, ſo kann auch was rechter Hand ſteht ſo nah an $\frac{1}{y^2}$ kommen als man will;

Nähm-

Nähmlich, was rechter Hand ſteht iſt

$$= \frac{\frac{1}{y^2}}{1 - \frac{f}{y}}$$ wo $1 - \frac{f}{y}$ ſo nah an 1 kommen kann als man will.

Folglich kann nun $\frac{E}{y.e - x.f}$ ſo nah an $\frac{1}{y^2}$ kommen als man will.

Das heiſſt man kann $\frac{dZ}{y.dx - x.dy} = \frac{1}{y^2}$ ſetzen oder $dZ = \frac{y.dx - x.dy}{y^2}$.

III) Wenn in einem Bruche Zähler und Nenner ſich ändern, giebt E die Aenderung genau, und dZ beynah, wenn man kleine Aenderungen des Zählers und des Nenners ſtatt dx, dy, ſchreibt.

27. Aufg. Die Differentialgleichung für $\sqrt[n]{u^m} = w$ oder das Differential einer Wurzelgröſſe zu finden, wo m; n; ganze bejahte Zahlen ſind.

Aufl. $u^m = w^n$ alſo $mu^{m-1}du = n.w^{n-1}dw$

$(18) = n.u^{\frac{m}{n}(n-1)} dw$ (Arithm. II. 9; 8;)

$= nu$

$= nu^{m - \frac{m}{n}} . dw$; alſo $\frac{m}{n} u^{\frac{m}{n} - 1} . du = dw$

$= d \left(u^{\frac{m}{n}} \right)$.

28. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{1}{y^r} = y$ oder das Differential von $y = v^{-r}$ (Ar. II. 12.) zu finden.

Aufl. $1 = y . v^r$ folglich $o = y . rv^{r-1} dv + v^r dy$ (23; 24; 18) alſo dy oder $d (v^{-r}) = - ryv^{-1} . dv = - r . v^{-r-1} dv$.

29. Zuſ. Hier kann r einen bejahten Bruch bedeuten (27).

30. Zuſ. Wenn $x^\varepsilon = t$ ſo iſt $\varepsilon x^{\varepsilon-1} dx = dt$; Es mag ε eine ganze bejahte Zahl (18) oder ein bejahter Bruch (27) oder eine ganze verneinte Zahl (28) oder ein verneinter Bruch (29) ſeyn. Eine Irrationalzahl läſſt ſich allemahl als ein Bruch betrachten, (Ar. IIII. 49.). Daher gilt dieſes, was auch ε für eine Zahl iſt. Es kann ſelbſt eine unmögliche Gröſſe ſeyn, weil man von der Rechnung mit unmöglichen Gröſſen keine andern Regeln hier zu beobachten hat, als von der Rechnung mit möglichen. Das Differential einer Potenz, wird nähmlich durch das zweyte Glied der Potenz $(x + dx)^\varepsilon$ beſtimmt (15), ohne daß die folgenden dabey in Betrachtung

tung kommen; und dieſes zweyte Glied hat für alle die genannten unterſchiedenen Werthe von s einerley Ausdruck; (Alg. 627.)

Begriffe von der Fluxionenrechnung.

31. Erkl. Wenn ein Punct p. 2 Fig. die Linie AG beſchreibt, (Geom. 5. Erkl.) und man den Anfang ſeiner Bewegung von einem willkührlichen Orte A an rechnet, ſo heiſſt die Geſchwindigkeit die er an jeder Stelle, z. E. C hat, die Fluxion von AC, und AC die derſelben zugehörige flieſſende Gröſſe (fluens).

32. Zuſ. Wenn ſich das Rechteck, deſſen beyde Seiten a; b; ſind in eines verwandelt, deſſen Seiten a + e; b + f; ſind, ſo iſt die Verhältniß dieſer beyden Rechtecke = ab: (a + e). (b + f). Sollen ſich nun ein paar Linien g; h; eben ſo verhalten; ſo iſt

$$h = \frac{(a + e).(b + f)}{a.\,b}.\,g$$ wo ſich h durch Findung vierter Proportionallinien giebt; denn es ſey a: a + e = b + f: c ſo iſt b: c = g: h (Alg. 501.). Alſo kann man zwey Stücken AC: AG = g: h nehmen, die ſich wie die beyden Rechtecke verhalten, oder überhaupt wenn ſich die Gröſſe eines Rechteckes durch Veränderung ſeiner Seiten verändert, ſo kann man allezeit Linien AC; AG; nehmen, die ſich in der

Ver-

Verhältniß verändern, in der ſich das Rechteck verändert, d. i. man kann die Grösse des Rechtecks in jedem Zuſtande durch ein Stück der Linie AG vorſtellen. Wenn alſo der Punct p, beſtändig Stücken AC; AG, u. ſ. w. beſchreibt, die ſich wie die veränderlichen Grössen des Rechtecks verhalten, ſo wird die Geſchwindigkeit des Punctes an jeder Stelle, der Geſchwindigkeit gleich ſeyn, mit der ſich die Grösse des Rechtecks verändert, oder die Fluxion des Rechtecks ſeyn.

33. Zuſ. Dieſes gilt überhaupt von jeder Fläche, weil jede ſich auf ein Rechteck bringen läſſt (G. 14. S. 7. Z.). Auf eine ähnliche Art erhellt, daß ſich die Veränderungen eines Körpers durch gerade Linien vorſtellen laſſen, und überhaupt daß dieſes für jede veränderliche Grösse ſtatt findet. Man wird alſo verſtehen, was die Geſchwindigkeit, mit der ſich eine Grösse verändert, oder ihre Fluxion, iſt; nehmlich die Geſchwindigkeit eines Puncts, welcher gerade Linien beſchreibt, die ſich allemahl wie dieſe veränderliche Grösse verhalten.

34. Zuſ. Wenn des Punctes Bewegung nicht gleichförmig iſt, ſo verhalten ſich ſeine Geſchwindigkeiten in C und G, wie die Räume, welche mit jeder dieſer Geſchwindigkeiten gleichförmig in gleichen Zeiten könnten beſchrieben werden, welche Verhältniß der Räume alſo mit der

der Verhältniß der Fluxionen von AC und AG einerley iſt.

35. Grundſatz. Wird die Bewegung beſchleunigt, ſo iſt CG gröſſer als der Raum, der mit der Geſchwindigkeit, die der Punct in C hat, gleichförmig in derjenigen Zeit beſchrieben würde, in welcher CG mit der wirklichen Bewegung beſchrieben wird, und kleiner als der Raum, der in eben der Zeit, mit der Geſchwindigkeit, welche der Punct in G hat, gleichförmig beſchrieben würde.

Die Zeit mag T heiſſen, die Geſchwindigkeiten in C und G, will ich durch vC; vG; anzeigen, (velocitas in C; G;) und sTvC mag den Raum bedeuten, der in der Zeit T mit der Geſchwindigkeit in C gleichförmig beſchrieben wird (Spacium tempore T velocitate in C deſcriptum). So wird ſich dieſer Satz ſo ausdrucken laſſen: CG $>$ sTvC und $<$ sTvG.

36. Grundſ. Wird aber die Bewegung vermindert, (motus retardatus) ſo iſt CG $<$ sTvC und $>$ sTvG.

37. Zuſ. Wenn die Veränderung der Bewegung ſtetig iſt, ſo läſſt ſich eine Stelle D, ſo nahe bey C annehmen, daß die Geſchwindigkeiten in beyden Stellen ſo wenig als man will, oder weniger als um jede gegebene Gröſſe von einander unterſchieden ſind, oder der Unterſchied

unter

unter sTvC und sTvD weniger als jede gegebene Gröſſe beträgt. Da nun CD zwiſchen dieſe beyden Räume fällt, (33; 34;) ſo kann man jeden von ihnen für CD annehmen, oder man kann ſich vorſtellen CD werde mit einer gleichförmigen Bewegung beſchrieben.

38. Anm. I. Darauf gründet ſich in der höhern Mechanik die Zerfällung der Bewegungen in gleichförmige. Wenn man ſich den Raum CG in viel kleine Theile getheilet vorſtellt, ſo kommen die Geſchwindigkeiten am Anfange und am Ende eines jeden ſolchen Theiles einander deſto näher, je kleiner dieſe Theile werden, und je gröſſer ihre Menge wird. Weil ſich alſo der Unterſcheid der Geſchwindigkeiten nach Gefallen vermindern läſſt, ſo ſtellt man ſich vor, jeder Theil werde mit der Geſchwindigkeit beſchrieben, die der bewegte Körper am Anfange dieſes Theiles hat, und ſieht alſo die Bewegung durch dieſen Theil als gleichförmig an, ſo daß ſich die Geſchwindigkeit nur am Anfange jedes Theiles verändert, und alſo der folgende Theil mit einer neuen Geſchwindigkeit beſchrieben wird. Dieſes kömmt der Wahrheit deſto näher, je kleiner die Theile werden, und man kann ſich der Wahrheit ohne Ende nähern. Daher zertheilt man den Raum in unendlich kleine Theile, die jeder mit einer gleichförmigen Bewegung beſchrieben werden.

II. Man ſetze der Weg (G 2 Fig., werde mit immer wachſender Geſchwindigkeit innerhalb 10 Secunden durchlaufen, in jeder Secunde ein gewiſſer Theil dieſes Raumes. Die Geſchwindigkeit ändere ſich ſo, daß der bewegte Punct in einer Secunde mit der Geſchwindigkeit die er am Anfange der erſten Secunde hat, 3 Fuß zurücklegen könnte, mit der die

er

er am Anfange der zweyten hat, 5 Fuß, und ſo immer zween Fuß mehr, mit der welche er am Anfange der folgenden Secunde hat. Der wirklich zurückgelegte Weg iſt allemahl gröſſer als der Weg welcher mit der Geſchwindigkeit im Anfange jeder Secunde zurückgelegt werden könnte. Alſo ſind die in den zehn Secunden zurückgelegten Wege zuſammen gröſſer als $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 120$.

Aber der Weg in jeder Secunde iſt auch kleiner als der in eben der Secunde mit der Geſchwindigkeit beſchrieben würde die an ihrem Ende, das iſt: am Anfange der nächſten ſtatt findet. Die Summe der zehn Wege, beträgt alſo weniger als $5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 140$. Das ſchränkt den wirklichen Weg zwiſchen 120 und 140 ein. Theilte man die Zeit in kleinere gleiche Theile, da an jedes Anfange die Geſchwindigkeit um was geringres von der am Anfange des folgenden unterſchieden wäre, ſo bekäme man mehr einzelne Wege, jeden gröſſer als mit der Geſchwindigkeit im Anfange beſchrieben, und kleiner als mit der am Ende; ihre Summen würden näher beyſammen ſeyn als die vorigen beyden, und ſo die Gränzen zwiſchen welche der wirkliche Weg fällt enger zuſammen gerückt. Dieſe Gränzen werden immer enger, je mehr man Zeittheile macht, alſo, ſie ſo enge als man will zuſammen zu bringen, daß man jede für den wirklichen Weg nehmen kann, erfodert nur fernere Rechnung, vielleicht eigne Kunſtgriffe wenn man die Rechnung ſehr weit fortſetzen ſoll. Ein ſolcher Kunſtgriff nun iſt hie: gleichförmige Bewegung in unendlich kleinen Zeittheilen durch unendlich kleine Räume.

39. Aufg. Der Punct m 2 Fig. beſchreibe ES dergeſtalt, daß er ſich in K; L; S; befin-

der, wenn p in C; D; G; iſt, und alſo KL; LS; in denjenigen Zeiten beſchreibt, in denen CD; DG; von p beſchrieben werden. Es verhalte ſich aber beſtändig EK: EL = $AC^n : AD^n$ und EL: ES = $AD^n : AG^n$; oder der Weg des Punctes m von E an gerechnet, verhalte ſich allemahl wie die Potenz n des zugehörigen Weges des Punctes p von A an gerechnet. Man ſucht die Verhältniß der Geſchwindigkeiten beyder Puncte in jedem Paare zuſammengehöriger Stellen, oder die Verhältniß der Fluxionen, der Potenz und der Wurzel.

Aufl. I) Man nenne AD = x; EL = y. Eine willkührliche unveränderliche Linie ſey = a; und $a : y = a^n : x^n$ alſo $y = \frac{x^n}{a^{n-1}}$; ſo iſt y eine Linie deren Verhältniß zu a; n mahl ſo groß iſt als die Verhältniß x: a, und weil x, y, Wege bedeuten, welche p von A, m von E an, in gleichen Zeiten zurücklegen, ſo verhält ſich der zweyte dieſer Wege allemahl wie eine Potenz des Grades n vom erſten.

In zwo gleichen, nach einander folgenden Zeiten, jede = T, beſchreibe der Punct T, die Wege CD = e; DG = f. Alſo, m, die Wege KL, LS; So iſt

$$x^n : (x-e)^n = y : EK$$
$$x^n : (x+f)^n = y : ES.$$

Man

Man nenne die Binomialcoefficienten

$$\frac{n.(n-1)}{1.2} = B;\ \frac{B.(n-2)}{3} = C;\ \text{u. ſ. w.}$$

ſo iſt

$$EK = y.\left(1 - \frac{n.e}{x} + B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 - C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$ES = y.\left(1 + \frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$KL = y.\left(+ \frac{n.e}{x} - B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS = y.\left(+ \frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS - KL =$$

$$y.\left(\frac{n.(f-e)}{x} + \frac{B.(f^2+e^2)}{x^2} + \frac{C.(f^3-e^3)}{x^3} \ldots\right)$$

II) Für LS — KL, wird in jeden Binomialcoefficienten, ein Quotient multiplicirt, deſſen Dividend Potenzen von f, e, enthält die gleiche Exponenten haben, der Diviſor eine Potenz von x, die eben den Exponenten hat; Iſt der Exponent ungerade, ſo iſt der Dividend beyder Potenzen Unterſchied; aber ihre Summe wenn der Exponent gerad iſt.

Iſt alſo e nicht gröſſer als f, ſo iſt LS—KL bejaht, oder LS gröſſer als KL.

III) Wenn des Punctes p Bewegung gleichförmig iſt, ſo iſt e = f; aber kleiner als f; wenn die genannte Bewegung beſtändig beſchleunigt iſt. In dieſen beyden Fällen iſt LS gröſſer als KL, der Weg den m im zweyten Zeittheile zurücklegt, gröſſer als der, den dieſer Punct im erſten Zeittheile zurücklegt.

Iſt des Punctes p Bewegung zwiſchen C und G, immer gleichförmig, oder immer beſchleunigt, ſo iſt immer f = e oder f gröſſer als e, ſo klein man auch den Zeittheil T nimmt.

Alsdann auch immer LS gröſſer als KL ſo klein auch der Zeittheil iſt, folglich des Punctes m Bewegung immer beſchleunigt.

IV) Man nehme alſo an, des Puncts m Bewegung werde nicht langſamer, bleibe immer gleich geſchwinde oder werde ſchneller; in beyden Fällen, wird des Punctes m Bewegung immer ſchneller, alſo iſt der Weg welcher in der Zeit T zurückgelegt wird, mit vK kleiner als KL, mit vD nicht kleiner als CD folglich $\frac{vK}{vD} < \frac{KL}{CD}$ auch der Weg mit vS gröſſer als LS, mit vD nicht gröſſer als DG, folglich $\frac{vS}{vD} > \frac{LS}{DG}$.

Daher

Daher aus (I)

$$\frac{vK}{vD} < y. \left(\frac{n}{x} - \frac{B.e}{x^2} + \frac{C.e^2}{x^3} \ldots\right)$$

$$\frac{vS}{vD} > y. \left(\frac{n}{x} + \frac{B.f}{x^2} + \frac{C.f^2}{x^3} \ldots\right)$$

Können nun e, f, jedes gegen x ſo klein werden als man will, die Stellen C, G, der D, ſo nahe kommen als man will, ſo kömmt jeder Quotient der Geſchwindigkeiten, ſo nah als man will an $\frac{n.y}{x}$.

Zwiſchen dieſe beyden Quotienten, fällt $\frac{vL}{vD}$ weil vL gröſſer iſt als vK und kleiner als vS. Da nun die Gränzen zwiſchen welche nur genannter dritter Quotient fällt, ſo nah als man will an $\frac{n.y}{x}$ kommen, ſo kömmt er ſelbſt ſo nah als man will an dieſen Werth.

Sagte jemand $\frac{vL}{vD}$ ſey $= \frac{n.y}{x} + k$ wo k eine Gröſſe iſt die ſich angeben läſſt, ſo nehme man f ſo klein daß $\frac{vS}{vD}$ kleiner iſt als $\frac{n.y}{x} + k$; Dieſes läſſt ſich thun, weil f bis auf nichts ab-
neh-

nehmen kann. Da nun $\frac{vL}{vD}$ kleiner iſt als $\frac{vS}{vD}$, ſo iſt es auch kleiner als $\frac{n.y}{x} + k$.

Man kann e ſo klein nehmen daß $\frac{vK}{vD}$ gröſſer wird als $\frac{n.y}{x} - k$; und da $\frac{vL}{vD}$ gröſſer iſt als $\frac{vK}{vD}$, ſo läſſt ſich nicht ſagen es werde nicht gröſſer als $\frac{n.y}{x} - k$.

V) Alſo iſt aus (I) $\frac{vL}{vD} = \frac{n.\,x^{n\cdot 1}}{a^{n\cdot 1}}$. Unter der Vorausſetzung daß des Punctes p Geſchwindigkeit nicht abnimmt (III).

VI) Wenn die Geſchwindigkeit von p vermindert wird, ſo muß man drey Gattungen dieſes Falles betrachten.

Erſte Gattung. Die Bewegung von m wird beſchleunigt. So iſt sTvL gröſſer als KL; und sTvD kleiner als CD alſo $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL.}{CD}$ Auch sTvL kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{DG}$; Alſo fällt $\frac{vL}{vD}$ zwiſchen zwo Gränzen, die man durch die Vermin-

derung

derung von e; f; dem Werthe $\frac{n.y}{x}$ ſo nah als man will, bringen kann.

Zweyte Gattung. m bewege ſich gleichför⸗mig, alſo sTvL = KL; sTvD kleiner als DC; und $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; Auch sTvL = LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{f}$; wo wiederum die vorigen Gränzen vorkommen.

VII) Dritte Gattung. Die Bewegung von m wird vermindert. So iſt sTvK gröſſer als KL; sTvD < CD alſo $\frac{vK}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; sTvS kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; $\frac{vS}{vD}$ klei⸗ner als $\frac{LS}{f}$; alſo fällt der Quotient $\frac{vL}{vD}$ wieder⸗um zwiſchen die vorigen Gränzen; weil hier vL gröſſer als vS und kleiner als vK iſt.

VIII) Iſt alſo $y = \frac{x^n}{a^{n-1}}$; und bedeutet vy: vx die Verhältniß der zuſammengehörigen Ge⸗ſchwindigkeiten, ſo iſt überhaupt

$$vy = \frac{n.x^{n-1}}{a^{n-1}}.vx.$$

40. Zuſ. Bey den Potenzen iſt die Verhältniß der Fluxionen und die Verhältniß der Differentialen einerley (39; 18). Und da die übrigen Regeln des Differentiirens aus den Potenzen ſind hergeleitet worden, (24; 26;) ſo wird man ſich leicht vorſtellen, daß es einerley iſt, Fluxionen oder Differentiale zu finden.

41. Zuſ. Wenn ſich nähmlich z (13) mit ungleicher Geſchwindigkeit verändert, d. i. in gleichen Zeiten bald viel, bald wenig ab- oder zunimmt, ſo iſt e eine ſolche Veränderung von z, die mit veränderlicher Geſchwindigkeit iſt erzeugt worden; und eben ſo E. Es werden aber E; e; in einer Zeit erzeugt. Wenn nun dieſe Zeit immer kleiner und kleiner wird, ſo kömmt die Geſchwindigkeit, mit der ſich jede der beyden Gröſſen z; Z; am Ende dieſer Zeit verändert, der Geſchwindigkeit, mit der ſie ſich im Anfange veränderte, immer näher und näher, und dieſe Näherung läſſt ſich ſo weit treiben als man will. Alſo nähert ſich die Verhältniß E; e unendlich der Verhältniß ſolcher Veränderungen, die mit den Geſchwindigkeiten entſtanden wären, mit denen ſich Z, z; am Anfange der Zeit verändern, das iſt, der Verhältniß dieſer Geſchwindigkeiten ſelbſt. So wird durch die unendliche Verminderung der Zeit aus E: e die Verhältniß dZ; dz = vZ: vz.

42. Zuſ. Die Differentiale dZ; dz; ſind nähmlich nicht Gröſſen, um welche Z; z; wirklich wachſen, oder abnehmen, ſondern um welche ſie in einer Zeit wachſen oder abnehmen würden, wenn jedes ſich mit der Geſchwindigkeit zu verändern fortführe, die es am Anfange dieſer Zeit hat. Die Zeit kann alsdenn endlich ſeyn, und ſo groß als man will, da würden dann dZ; dz; endliche Gröſſen ſeyn, die ſich ſo wie die Geſchwindigkeiten verhielten. Denn daß man dZ; dz; unendlich klein annimmt, gründet ſich blos darauf, weil die Verhältniß dieſer beyden Gröſſen, mit der Verhältniß der Geſchwindigkeiten einerley ſeyn ſoll, und man daher die Zeit ſo vermindert, daß durch ihre ganze Dauer jede Geſchwindigkeit als unverändert kann angeſehen werden, (38) da dann die Veränderungen ſelbſt auch immer mit vermindert werden müſſen.

43. Anm. Die Engländer bedienen ſich nach Newton der Fluxionenrechnung. Sie bezeichnen die Fluxion einer Gröſſe mit einem Puncte über ihr: So ſieht die Gleichung am Ende von 39 folgendergeſtalt aus:

$$\dot{y} = \frac{n \dot{x} x^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

44. I) Leibniz hat ſeine Regeln des Differentiirens in den Actis Eruditorum Lipſ. 1684 zuerſt bekannt gemacht Noua methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus... a. a. O. 467 S. Die Brüder Jacob und Johann Bernoulli,

noulli erläuterten dieſe Rechnung und zeigten ihren ungemein groſſen und weitläuftigen Nutzen.

II) Newton hat von ſeiner Rechnung zuerſt etwas öffentlich geſagt in Principiis philoſophiae naturalis mathematicis. Lond. 1687. Libr. II. Sect. 2. Lemma II. momentum oder mutationis velocitas ſind ihm gleichgültig; heiſſen a, b, die Momente oder Geſchwindigkeiten mit denen ſich A, B, ändern ſo iſt A. b + B. a das Moment des Rechtecks A. B.

III) Newtons Beweis iſt: $(A - \frac{1}{2}a).(B - \frac{1}{2}b) = A.B - \frac{1}{4}a.B - \frac{1}{2}b.A + \frac{1}{4}.a.b$ und $(A + \frac{1}{2}a).(B + \frac{1}{2}b) = A.B + \frac{1}{2}a.B + \frac{1}{2}.b.A + \frac{1}{4}.a.b$; Da nun $(A + \frac{1}{2}.a).(B + \frac{1}{2}b) - (A - \frac{1}{2}a)(B - \frac{1}{2}b) = A.a + B.b$ ſo ſchlieſſt N. laterum incrementis totis a et b, generatur incrementum a. B + b. A.

IV) Newton ſagt in dem Satze: caue intellexeris particulas finitas, particulae finitae non ſunt momenta, ſed principia iamiam naſcentia finitarum magnitudinum, neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Nähmlich völlig was (42) von Differentialen geſagt iſt. Aber Newtons Rechnung (III) bleibt richtig a mag gegen A und b gegen B ſo groß ſeyn als man will. Prima naſcentium proportio kömmt da gar nicht in Betrachtung. Es iſt daher auch dieſer Beweis als falſe reaſoning getadelt worden.

Eine

Eine Rechtfertigung die aber nicht befriedigt findet ſich in: Geometry, no friend to infidelity... by Philalethes Cantabrigienſis. Lond. 1734; p. 33 u. f.

V) Bey Optice, Authore Iſ. Newton .. latine reddidit Samuel Clarke Lond. 1706. befindet ſich Enumeratio linear. tertii ordinis, und tractatus de quadratura curuarum. Des letztern erſter Satz iſt: data aequatione quotcunque fluentes quantitates inuoluente inuenire fluxiones. Der Beweis iſt folgendergeſtalt beſchaffen: Ein Theil der Gleichung ſey x^3; Nun ſey o eine ſehr geringe Gröſſe und $o\dot{x}$ das Moment, oder incrementum momentaneum von x; Setzt man $x + o\dot{x}$ ſtatt x in die Gleichung, und zieht die erſte Gleichung von der zweyten ab, ſo bleibt $3 . x^2 . o\dot{x} + 3 . x . oo\dot{x}\dot{x} + ooo\dot{x}^3$, dividirt man alles mit o ſo kömmt $3 . x . \dot{x}^2 + 3 . \dot{x}\dot{x}ox + \dot{x}^3 . o . o$, minuatur quantitas o in infinitum, et neglectis terminis euaneſcentibus reſtabit $3 . \dot{x} x^2$.

VI) Beyde erwähnte Abhandlungen erſchienen zuerſt zu London 1704; Iſaaci Newtoni tractatus duo de ſpeciebus et magnitudine figurar. curuilinear. Dieß ward in Act. Er. Lipſ. 1705. p. 30. recenſirt, und da p. 35. geſagt: pro differentiis Leibnitianis D. Newtonus adhibet fluxiones.. iisque tum in ſuis principiis naturae mathema-

maticis, tum in aliis poſtea editis, elegánter eſt vſus, quemadmodum et Honoratus Fabrius in ſua ſynopſi geometrica motuum progreſſus Cavallerianae methodo ſubſtituit. Der Verfaſſer der Recenſion wird Godofredus Guilielmus Leibnitius genannt in dem Exemplare der Actor. Erud. auf der göttingiſchen Univerſitäts-Bibliothek, wo Nahmen der Recenſenten beygeſchrieben ſind.

VII) Man nahm beygebrachten Ausdruck in England ſo an: Newton ſollte ſeine Methode nach Leibnizen gebildet haben, wie Fabri die ſeinige nach dem Cavallerius. Leibniz erklärte ſich: Er finde das in dem Ausdrucke nicht, auch ſey in den Act. Er mehrmahl geſagt: Man halte Newton für den Erfinder ſeiner Methode... Ich ſchreibe dieſe Erklärung dem Dr. de Neufville nach, der 1734 die Theodicee zu Amſterdam herausgegeben, und ihr Leibnizens Leben vorgeſetzt hat. Das Leben befindet ſich auch, aus dem Franzöſiſchen lateiniſch, mit einigen Zuſätzen, vor: G. G. Leibnitii tentamina Theodicaeae.. verſio noua Frf. u. Leipz. 1739; Der Ueberſetzer iſt Joh. Ulr. Steinhofer. Da ſteht erwähnte Erklärung §. 246. des Lebens, und in den felgenden §. wird die Geſchichte des Streites erzählt den ein freylich nicht recht überlegter Ausdruck veranlaſſt hat.

VIII) Anſtatt ſich mit der Erklärung zu befriedigen: Newton ſey Erfinder ſeiner Methode,

ſuchte

ſuchte man nun zu behaupten: Leibniz ſey nicht Erfinder der ſeinigen, ſondern habe ſie vom Newton.

Von Joh. Keill erſchien in den Philoſophical Tranſactions 1708 eine Abhandlung de legibus virium centripetarum. Da ſagt er: Haec omnia ſequuntur ex celebratiſſima nunc fluxionum arithmetica quam ſine omni dubio primus inuenit dominus Newtonus vt cuilibet, eius epiſtolas a Walliſio editas legenti facile conſtabit, eadem tamen Arithmetica poſtea, mutatis nomine et notationis modo a domino Leibnitio in Actis Eruditorum edita eſt.

Keills Abhandlung ſteht auch bey Iohannis Keill M. D. Introductiones ad veram phyſicam et veram aſtronomiam Lugd Bat. 1725; 4. wo man dieſe Stelle p. 594 leſen kann.

Nun noch Einiges zur Geſchichte dieſes Streites.

IX) Wallis in der Vorrede zum erſten Theile ſeiner Werke (Io. Wallis Opera mathematica tribus voluminibus contenta Oxon. 1699 fol.) meldet, Newton habe ſeine Methode in zween Briefen 1676. an Oldenburgen beſchrieben, welche Leibnizen hätten ſollen mitgetheilt werden.

X) Newton fügt dem (II) erwähnten Lemma, nachſtehendes Scholium bey:

In literis quae mihi cum peritiſſimo geometra G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant,

cum

cum ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et ſimilia peragendi quae in terminis ſurdis aeque ac in rationalibus procederet, et literis tranſpoſitis hanc ſententiam inuoluentibus (Data aequatione quotcunque fluentes quantitates inuoluente fluxiones inuenire et vice verſa) eamdem celarem; reſcripſit vir clariſſimus, ſe quoque in eiusmodi methodum incidiſſe, et methodum ſuam communicauit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis. Vtriusque fundamentum continetur in hoc lemmate.

XI) Newtons Anagramm muß nach der Menge der Buchſtaben die es enthält, weitläuftig geweſen ſeyn, und wer Newtons Wörter herausgebracht hätte, wäre nun auf ein Räthſel gekommen; was fluxiones und fluentes bedeuten? Leibniz eröffnete ſeine Methode treuherzig.

XII) Zwiſchen beyder Verfahren entſtand nachdem noch ein andrer Unterſchied. Angeführtes ſcholium findet ſich auch in der zweyten Ausgabe der principiorum von 1713; da ſteht nach formulis noch: et idea generationis quantitatum. Die dritte Ausgabe erſchien 1726; In ihr iſt dieſes ſcholium weggelaſſen, und an deſſen Stelle eines hingeſetzt da N. erzählt: in einem Briefe an J. Collin 1672. habe er gemeldet, er beſitze eine allgemeine Methode Tangenten zu

ziehen,

ziehen, Gröſſte und Kleinſte zu finden u. d. g. Worinn ſie beſtehe erläutert er da nicht, nennt weder Fluxionen noch Leibnizen.

In Philoſoph. nat. pr. m. auct. Iſ. N. perpetuis commentariis illuſtrata communi ſtudio.. le Seur et Jacquier Genf 1739; im II. B. 60. 61 S. findet ſich im Texte das ſcholium der 3. Ausg. und in der Note das der beyden erſten.

XIII) Newtons beyde Briefe die Wallis (IX) erwähnt, ſtehen in Wallis Op. Math. Volumen 3. Oxon. 1699. p. 622. 639, zwiſchen ihnen ein Brief Leibnizens p. 629; Sie betreffen Reihen für Irrationalgröſſen, vermittelſt des binomiſchen Lehrſatzes den Newton auf gebrochne und verneinte Exponenten erſtreckt, daraus hergeleitete Quadraturen, wie ſchon für die Hyperbel Mercator gegeben hatte, da noch nicht von Fluxionenrechnung und Differentialrechnung geredet ward. Solche Reihen werden in Newtons und Leibnizens Rechnungen gebraucht. Dieſe Rechnungen beruhen ſelbſt auf der Binomialformel (15; 39). Doch kann man eigentlich nicht ſagen daß die Briefe eigentlich erwähnte Rechnungen betreffen.

XIV) Commercium epiſtolicum D. Iohannis Collins et aliorum, de analyſi promota, iuſſu Societatis Regiae in lucem editum Lond. 1712; 4° eine ſehr ſelten gewordne Sammlung, enthält auch nichts als Kunſtgriffe Reihen zu finden, und

ſolche zu brauchen. Die Societät endigt ſie mit dem Urtheile: Newton ſey der erſte Erfinder der Methode über deren Erfindung geſtritten ward, und Keill der dieſes behauptete, habe Leibnizen nicht unrecht gethan.

Keill hatte aber noch etwas mehr Leibnizen nachtheiliches geſagt. (VIII) Dafür iſt nicht der geringſte Grund in den von Wallis und der Societät bekannt gemachten Briefen. In denſelben iſt nichts von dem Anagramm das Newtons von ihm zurückgenommenes Scholium (X) erwähnt, die Nahmen fluentes und fluxiones kommen nur als Erläuterungen in Anmerkungen vor, und Leibnizens Briefen werden immer Anmerkungen beygefügt, die darauf leiten ſollen L. habe ſeine Methode nicht eher gehabt bis er Newtons Methode gekannt, aber das nicht darthun, Leibnizens Brief den Newton als Antwort auf den ſeinigen erwähnt erſcheint gar nicht.

XVI) Newton ſelbſt ſagt (X) Leibniz ſey von ihm in der Vorſtellung unterſchieden, wie die Gröſſen erzeugt worden, nähmlich: Geſchwindigkeiten und Differenzen. Die letzte Vorſtellung, Leibnizens ſeine, iſt leicht zu faſſen; Man verſteht wie ſich x. y ändert, wenn ſich die beyden Factoren in $x + e$; $y + f$; verwandeln, und was dieſe Aenderung wird wenn e gegen x; f gegen y bis auf nichts abnimmt, (25; IX) aber was die Geſchwindigkeit mit welcher das Product

duct ſich ändert zu den Geſchwindigkeiten mit denen jeder Factor ſich ändert für eine Verhältniß hat, das iſt nicht ſo leicht anzugeben. Ich kenne vom Newton ſelbſt nur zweyerley Verfahren dieſes zu leiſten, das eine (III) beweiſt gar nicht was es beweiſen ſoll (IV) und das andere (V) auf dieſen Fall angewandt, ſetzt zum voraus e. f verſchwinde gegen y. f + x. e völlig wie in (25; IX). Newton ſelbſt beweiſt alſo ſeine Regel nicht anders als daß er ſtatt der Geſchwindigkeiten, unendlich kleine Aenderungen ſetzt (IV). Wenn man alſo chicaniren wollte.. was man thun könnte, nicht was man thun ſoll... ſo lieſſe ſich ſagen: Newton habe von Leibnizen die Differentiale abgeſehen, und ſolche in den Ausdruck: Geſchwindigkeiten, überſetzt, den zu verſtehen mehr Nachdenken gehört.

XVII) Das billige Urtheil iſt! Jeder ſey auf ſeine Methode für ſich gekommen, zulänglich war hieben Nachdenken über das Verfahren vorhergehender Mathematiker. So urtheilt auch Eduard Waring Meditationes analyticae Cambridge 1785; man ſ. meine Recenſion Gött. gel. Anz. 1786; 700 S. Selbſt kann man zugeben, Newton der ſich mit höherer Mathematik früher beſchäfftiget hat als Leibniz, ſey auch auf ſeine Methode früher gekommen. Aber der Wiſſenſchaft hat frühere Bekanntmachung und Verbreitung von Leibnizens Methode mehr genutzt.

XVIII) Die Königinn Anna ſtarb d. 1. Aug. 1714. Einige Jahr vor ihrem Tode waren in England Viele dem Prätendenten günſtig, der Nachfolge des Hauſes Hannover zuwider. In dieſe Zeit fällt das Urtheil der Societät (XIV). Ich habe irgendwo geleſen, das möchte wohl Einfluß in das Urtheil der Societät gehabt haben, da Leibniz in hannöveriſchen Dienſten war. Daß ein ſolcher Argwohn doch nicht ganz ungereimt iſt zeigt eine Stelle aus Swifts Briefe an Hunter. Lond. 12. Jan. 1708—9: in Miſcellanies by Dr. Swift and Others, Lond. 1746; 8. Vol. 13; Letters to and from Swift p. 124. You know I believe that poor Dr. Gregory is dead, and Keil ſolicits to be his ſucceſſor; but Party reaches even to ſines and circles, and he will hardly carry it, being reputed a Tory, which he yet utterly denies. Die Torys waren wieder die hannöveriſche Nachfolge.

Keill ward doch Profeſſor Aſtronomiae Savilianus zu Oxford, welches Gregorius geweſen war. Er hat ſich alſo gegen den Vorwurf gerechtfertigt, oder der Vorwurf hat ihm nicht geſchadet.

XIX) Mirifici Canonis Logarithmorum deſcriptio auth. Ioh. Nepero, Bar. Merchiſtonii, Scoto, Edinb. 1614. ſagt bey Erläuterung der erſten Definition: Sit punctus A, a quo ducenda ſit linea fluxu alterius puncti, qui ſit B; fluat

ergo

ergo primo momento B ab A in C.... Das Wort fluere finde ich da nicht weiter, aber in der Folge nimmt N. als Poſtulat an: Cum quolibet motu et tardior et velocior dari poſſit ſequetur neceſſario cuique motui aequiuelocem dari poſſe. Logarithmus ſinus iſt ihm: numerus quam proxime definiens lineam quae aequaliter creuit interea dum ſinus totius linea proportionaliter in ſinum illum decreuit, exiſtente vtroque motu ſynchrono, atque initio aequiueloce. Man ſieht leicht, wie hie ſchon Begriffe von Fluxionen als Geſchwindigkeiten betrachtet liegen.

45. I) In Europa ſind auſer Britannien faſt durchgängig die Leibniziſchen Benennungen und Bezeichnungen eingeführt. Man fand bequemer vor eine veränderliche Gröſſe d zu ſchreiben als über ſie ein Tüpfelchen zu ſetzen. Die Bedenklichkeit läſſt ſich machen daß man d als Factor anſehen könne, deßwegen ſchlug Euler vor, nachdem er den Buchſtaben viel Jahre lang gebraucht hatte denſelben etwas anders zu bilden, wie ohne Zweifel aus Verziehung des Buchſtabens r, das Wurzelzeichen $\surd$ geworden iſt. Die Mißdeutung für einen Factor läſſt ſich leicht verhüten, wenn man nur annimmt als Factor werde er nie vor einen andern Buchſtaben geſetzt als mit dem Multiplicationszeichen; Da kann das Product d. x nicht mit dem Differentiale verwechſelt werden.

II) Wie man die Regeln des Differentiirens bewieſen hat iſt eine Probe (25; IX) der ähnliche man in dort angeführten und andern Lehrbüchern ſehen kann. Wolf a. a. O. §. 5. erläutert den Begriff des Unendlichkleinen mit einem Sandkörnchen, das vom Gipfel eines Berges weggeweht wird, indem man des Berges Höhe miſſt. Man thäte indeſſen Wolfen unrecht wenn man glaubte er ſetze im Ernſte Sandkörnchen: Berg = Unendlichklein: Endlich. Seine Meynung iſt: Das Sandkörnchen verſchwinde in Vergleichung mit dem Berge für unſre Empfindung, daß man ſo Verſchwinden für den Verſtand annehme und Gröſſen bey deren Unterſchiede das ſtatt findet, gleich ſetze, beruft er ſich auf Euklid X. B. 1. Satz, Archimed in der Vorrede zur Quadratur der Parabel, und allen ſeinen Schriften. Wolfs Sandkörnchen iſt alſo ſinnliches Bild des Begriffs vom Unendlichkleinen, wie ein Zug mit Kreide ſinnliches Bild einer Linie iſt. Auch erinnert er, Leibniz ſelbſt habe gewarnt das Unendlichkleine für was wirkliches anzunehmen. Act. Er. 1712; p. 167. wo Leibniz es für eine Redensart erkennt die gehörig verſtanden, als toleranter vera in der Rechnung diene.

III) Da läſſt ſich doch noch fragen, was die gehörige Bedeutung dieſer Redensart iſt? Und das führt auf die Verhältniß von Aenderungen, deren

deren jede in Vergleichung mit der Gröſſe welcher ſie gehört, verſchwindet.

IV) Auch zwiſchen endlichen veränderlichen Gröſſen, giebt es oft eine Gränze der ihr Verhältniß ſo nah kömmt als man will. So iſt (An. endl. Gr. 109.) für $(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots) : (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots)$ die Gränze $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1,5 : 1$.

V) Weil $\sin \varphi : \sin \frac{1}{2} \varphi = 2 . \cos \frac{1}{2} \varphi : 1$ ſo ändert ſich die Verhältniß der beyden Sinuſſe von $2 : 1$ bis $\sqrt{2} : 1$ indem ſich der ganze Winkel von 0 bis 90 Gr. ändert. Betrachtet man alſo nur dieſe Reihe von Aenderungen des ganzen Winkels, ſo kann man ſagen: Der Sinuſſe erſte Verhältniß ſey $2 : 1$, letzte $\sqrt{2} : 1$; In der That iſt was man ſo erſte Verhältniß nennt, nur eine Gränze der die Verhältniß der Sinuſſe ſo nah kommen kann als man will, wenn der ganze Winkel ſo klein kann genommen werden als man will; denn $\sin 0 = 0$ heiſſt doch gewiß: kein Winkel hat keinen Sinus; und die Hälfte keines Winkels hat auch keinen Sinus, und was dächte man da bey dem Ausdrucke: Der erſte Keinſinus iſt noch einmahl ſo groß als der andre Keinſinus? Aber, wenn die wirklichen Winkel immer abnehmend, in der Verhältniß $2 : 1$ bleiben, ſo kömmt ihrer Sinuſſe Verhältniß dieſer Verhältniß $2 : 1$ ſo nah als man will. Wenn die Winkel aufhören zu ſeyn, ſo hören auch die Sinus auf zu ſeyn, und beyde Verhältniſſe hören

auf zu ſeyn. Man kann alſo auch die Verhältniß der Sinuſſe 2 : 1 die letzte nennen, wenn man auf ſie durch Abnehmen der Winkel kömmt, eben wie ſie die erſte heiſſen kann, wenn ſie beym Entſtehen der Winkel vorkömmt.

VI) Auch ſo, iſt dx : dy, die letzte, oder die erſte Verhältniß von e : f nachdem man von x + e, y + f auf x, y geht, oder von x, y, auf x + e, y + f.

VII) So iſt: erſte oder letzte Verhältniß, eine Redensart, deren eigentliche Bedeutung ſich ganz beſtimmt angeben láſſt, die man alſo als erträglich wahr brauchen darf, auch ſo: Verhältniß zwiſchen unendlich kleinen Gröſſen, die ſich durch endliche Gröſſen angeben láſſt. Aus dergleichen Verhältniſſen habe ich die Regeln des Differentiirens hergeleitet.

VIII) Erſte oder letzte Verhältniſſe braucht Newton häufig Princ. L. I. Sect. I, giebt aber keine Rechnungsart für ſie.

IX) A Treatiſe of Fluxions in two books, by Collin Mac Laurin A. M. Prof. of Mathematics in the Univerſity of Edinburgh; ... Edinburgh 1742; 2 Quartbände; beweiſt die Fluxionenrechnung mit gröſſter Schärfe und ſehr umſtändlich nach Art der Alten. Dieſen zur Nachahmung, werden in den Grundlehren dieſer Rechnung, Sätze und Beweiſe alle mit Worten ausgedruckt, ohne Gebrauch arithmetiſcher

Zei-

Zeichen, noch viel weniger der Rechnung mit bejahten und verneinten Gröſſen. Die Vermeidung des leztern, nöthigt eine Menge von Fällen jeden einzeln zu unterſuchen, die ſich durch + in — verwandelt, in weniger zuſammenziehen lieſſen. Daraus entſteht eine groſſe Weitläuftigkeit, indeſſen braucht man oft nur den Beweis eines Falles durchzugehn ſo überſieht man leicht die andern.

Dieſe Weitläuftigkeit iſt alſo in meinen Augen eine geringere Unbequemlichkeit als die ganz ſynthetiſche Lehrart, in den Beweiſen der erſten Hauptſätze. Ich habe für meinen eignen Unterricht, aufgeſucht wie die meiſten gefunden werden, der Raum geſtattet nur (39) mitzutheilen, man wird daraus ſehn auf was für Weitläuftigkeit die Beobachtung der gröſſten Schärfe und Deutlichkeit führt.

Indeſſen hat es mir nöthig geſchienen dieſe Begriffe von Fluxionen zu geben, von denen in den gewöhnlichen auch gröſſern Anleitungen zur Differentialrechnung gar nichts geſagt iſt. Schon das rechtfertiget mich dieſerwegen, daß einem Liebhaber der Mathematik wichtig iſt, auch die Lehrer jenſeit des Meeres...

penitus toto diviſos orbe Britannos

Virg.

brauchen zu können. Man verſteht ſie ſchlecht wenn man nach Veranlaſſung mehrer Anleitungen zur Differentialrechnung ſich einbildet

ihre Fluxionen und unſre Differentialen ſeyen einerley. Auch erweitern die Fluxionen unſere Begriffe von der Differentialrechnung, zeigen, wie man ſtatt der Verhältniß unendlich kleiner Aenderungen, Verhältniß von Geſchwindigkeiten denken kann.

X) Gegen die Fluxionen hat man eingewandt: Bewegung und was damit zuſammenhängt, Raum, Zeit, Geſchwindigkeit, gehören nicht in die Geometrie, ſondern in die Mechanik; on reproche à Neuton d'avoir introduit dans les mathematiques pures, des idées qui paroiſſent leur être etrangères, telles que celles du temps, du mouvement et de la viteſſe, et il me paroit qu' il valoit tout au moins la peine d' expoſer une partie des mathematiques pures auſſi importante que l' eſt celle des calculs ſuperieurs ſans y introduire des principes de Méchanique dont il paroit qu' elles doivent être independantes, ſagt Hr. L' Huilier, Expoſition elementaire des principes des calculs ſuperieurs. Berlin 1786. §. LXVIII.

XI) Ohne Bewegung, läſſt ſich doch weder eine gerade Linie verlängern noch ein Kreis beſchreiben. Euklid nennt bey dieſen Foderungen, auch in der Definition des Kreiſes, Bewegung nicht ausdrücklich, muß ſie aber doch ſtillſchweigend vorausſetzen.

In Euklids XI. B. 14. Definit. wird eine Kugel zu beſchreiben, ausdrücklich Umdrehung eines Halbkreiſes erfodert.

Bey

Bey dieſen Lehren der Elementargeometrie wird jede Bewegung einzeln betrachtet, und da iſt die Zeit in welcher ſie vollendet wird gleichgültig, folglich kömmt Geſchwindigkeit nicht in Betrachtung.

Archimed in ſeinem Buche von den Schnekkenlinien in der erſten Erklärung, führt eine gegebene gerade Linie um einen Mittelpunct, daß ſie einen Kreis beſchreibt, in gleichen Zeiten gleiche Winkel, und auf ihr, geht ein Punct vom Mittelpuncte aus, beſchreibt in gleichen Zeiten gleiche Stücken von ihr, und kömmt in des Kreiſes Umfang, wenn die Linie ſich um vier Rechte gedreht hat. Das heiſſt ja wohl: die Geſchwindigkeiten der beyden Puncte, des Endpuncts der Linie welcher den Umfang beſchreibt, und des Puncts der ſich auf ihr bewegt, verhalten ſich wie Umkreis zum Halbmeſſer.

Zur Quadratrix erfodert Dinoſtratus daß eines Kreiſes Halbmeſſer ſich gleichförmig dreht und eine gerade Linie immer gleichförmig einer Tangente des Kreiſes parallel fortrückt. Man ſ. meine geometriſche Abhandlungen II. Samml. 23. Abh. 33. §.

So gehörten Bewegung und Geſchwindigkeit in die Geometrie der Griechen.

XII) Aber bey dieſen Definitionen dreht man gerade Linie oder Halbkreis, ohne an Kraft zu denken die allerdings erfodert wird wenn man der definirten Gröſſen ſinnliche Bilder darſtellt;

Für den Verſtand des Geometern ſind ſie nicht Materie, wofern Materie ohne Kraft nicht bewegt wird. Alſo: dieſe Bewegungen werden blos phoronomiſch betrachtet nicht dynamiſch, die letzte Art der Betrachtung: Was für Bewegung entſteht in gegebener Materie aus gegebener Kraft, gehört zur Mechanik.

Dieſen Unterſchied hat auch Hr. Kant beobachtet in ſ. metaphyſiſchen Anfgr. d. Naturwiſſenſchaft. Wenn er im Anfange des erſten Hauptſtücks; Materie das bewegliche im Raume nennt, ſo können ihm da die gerade Linie die den Kreis beſchreibt, der Halbkreis welcher die Kugel beſchreibt, Materie ſeyn; denn dieſes Hauptſtück iſt: Phoronomie, von dem er das zweyte, Dynamik unterſcheidet.

XIII) Freylich trägt man im Anfange der Mechanik Lehren von Zeit, Raume, Geſchwindigkeit vor, aber ſo lange bey dieſen Lehren nicht an Kraft gedacht wird, ſind ſie blos geometriſch. So bekömmt man andre Spirallinien als die archimediſche, wenn man andre Verhältniſſe zwiſchen den Geſchwindigkeiten der Winkelbewegung und des Puncts annimmt. (An. endl. Gr. 596.)

XIV) Die Kön. preuß. Ak. d. Wiſſ. gab auf 1786. als Preißfrage auf: Théorie ſe claire et préciſe de l'Infini Mathematique. Hr. L'Huilier erhielt den Preis durch die (X) angeführte Schrift. Seine Methode iſt im Weſentlichen

ſo

ſo beſchaffen daß er Gränzen angiebt zwiſchen welche eine geſuchte Gröſſe fällt, kann man nun dieſe Gränzen ſo enge zuſammenbringen als man will, ſo giebt jede dieſer verengerten Gränzen die geſuchte Gröſſe an, (wie in 39). Hr. L'H. hat aber nicht nur die Grundlehren auf dieſe Art entwickelt, ſondern häufige Anwendung derſelben gezeigt und ein brauchbares Lehrbuch der Rechnung des Unendlichen geliefert.

Er hat dieſe Arbeit nachdem noch weiter ausgeführt: Principiorum calculi differentialis et integralis expoſitio elementaris... auct. Simone L'Huilier.... Tub. 1795.

XV) Ich veranlaſſte als Preißfrage auf 1782 für hie Studirende: Wie die Rechnung des Unendlichen auf Lehrſätzen und Verfahren Euklids, Archimeds, und Apollonius beruhe. Die Schrift die den Preis erhalten hat iſt: Ioann. Wilhelmi Chriſtiani, Kilonienſis, commentatio qua explicantur fundamenta calculi quem ab infinito nominamus, et oſtenditur quomodo iis quae tradiderunt Euclides, Archimedes, Apollonius Pergaeus, innitatur calculus infiniti. Ihr folgte: *Diſputatio* inauguralis exhibens Supplementa ad commentationem de fundamentis calculi quem ab infinito nominamus.. auct. Io. Wilh. Chr. Kilon. 1793.

Auch vertheidigte Ludolf Hermann Tobieſen aus Huſum zu Göttingen 1793. ſeine Inaugural-

ral-

raldiſputation: Principia atque Hiſtoria inuentionis calculi differentialis et integralis, nec non methodi fluxionum.

Allgemeiner Beweis des Binomiſchen Lehrſatzes durch die Differentialrechnung.

46. Aufg. **Eine Formel für die Ausdrükkung der Potenz einer zweytheilichen Wurzel durch eine unendliche Reihe zu finden, deren Exponent mag bejaht oder verneint, ganz oder gebrochen ſeyn.**

Aufl. I) Die Reihe für die Potenz m jeder zweytheilichten Wurzel zu finden, iſt genug, daß man nur dieſe Reihe für die Potenz von $1 + y$ ſucht (Alg. 144.) Es ſey alſo

$$(1 + y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots + Py^n + Qy^{n+1} + \ldots = w$$

wo man die Coefficienten dieſer Reihe w beſtimmen will. Daß ſie von 1 anfängt, iſt klar, weil ſie für jeden Werth von y und alſo auch für den Werth $= 0$ richtig ſeyn ſoll.

II) Alſo iſt $m.(1 + y)^{m-1} dy = dw$ oder $m.(1 + y)^m . dy = (1 + y) dw$ oder $m w dy = (1 + y) dw$ oder $\frac{(1 + y) dw}{dy} - mw = 0.$

Es iſt aber

dw

$$\frac{dw}{dy} = A + 2.\,B.\,y + 3.\,C.\,y^2 \,\ldots\ldots + n.\,P.\,y^{n-1} + (n+1).\,Q\,y^n$$

$$\frac{(1+y).\,dw}{dy} = \left.\begin{array}{l} A + 2.\,B \\ \quad\;\; + A \end{array}\right\}.\,y + \left.\begin{array}{l} 3.\,C \\ + 2.\,B \\ - m.\,B \end{array}\right\}.\,y^2 \,\ldots\ldots$$

$$- m.\,w = - m - m.\,A$$

$$\left.\begin{array}{l} + n.\,P.\,y^{n-1} + (n+1).\,Q \\ \qquad\qquad\quad + n.\,P \\ \qquad\qquad\quad - m.\,P \end{array}\right\}.\,y^n \,\ldots\ldots$$

Alſo

Alſo iſt (Alg. 624.)

$$A = m;\ B = \frac{(m-1)A}{2};\ C = \frac{(m-2)B}{3};\ldots$$

$$Q = \frac{m-n}{n+1}.\ P.$$

Es erhellt, daß dieſe Coefficienten nach dem Geſetze (Alg. 141.) gemacht werden, weil das dortige a; b; hier 1; y ſind. Folglich gilt dieſes Geſetz für alle Werthe von m; für welche die Regeln zu differentiiren gelten, vermittelſt deren die Coefficienten hier gefunden werden; d. i. für gebrochne, verneinte, und ſelbſt unmögliche (30).

47. Wenn m keine ganze bejahte Zahl iſt, ſo hört die Reihe nicht auf, weil der Zähler eines jeden Coefficienten ein Product aus Factoren iſt, die aus m immer um ganze Zahlen vermindert beſtehen. Daß alſo das Glied b^m (Alg. 141.) oder hier y^m nicht vorkömmt, wie auch deswegen nicht geſchehen kann, weil y hier, wie dorten b, lauter ganze bejahte Zahlen zu Exponenten hat.

48. Anm. Verſchiedene Schriftſteller haben den binomiſchen Lehrſatz durch die Differentialrechnung finden gelehrt, als Euler Inſt. Calc. diff. P. II. §. 72; Colſon Comment. on Newtons Method of Fluxions p. 309. Auch hat Herr Clemm einen Beweis, der dem hier vorgetragenen völlig ähnlich iſt, von Herrn Eulern gelernt, und ſchon 1752. in ſ. lettre ſur quelques paradoxes du calcul analytique bekannt gemacht. S. ſeine erſten Gründe aller mathemat. Wiſſenſchaften 110.

110. §. Die Abſicht derer, die ſolche Anwendungen der Differentialrechnung gemacht haben, kann aber nicht geweſen ſeyn, den Satz dadurch in völliger Schärfe zu erweiſen. Denn ſie haben nicht zuvor dargethan, daß man von den Gründen, auf denen die Regeln der Differentialrechnung beruhen, überzeugt ſeyn könne, ehe man dieſen Satz in ſeiner völligen Allgemeinheit weiß, wie ich (30). Ihr Verfahren kann alſo keine andere Abſicht als eine Uebung dieſer Rechnung haben, auch iſt es ſonſt von dem meinigen weit unterſchieden, auf das ich 1756. gerathen bin, als ich Herrn Huben, der ſich durch ſeine **analytiſche Abhandlung von den Kegelſchnitten** bekannt gemacht hat, einen befriedigenden Beweis von der Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes zu geben ſuchte. Ich verfiel anfangs auf Differentiirung der Logarithmen, weil ich aber dabey nach der Schärfe, die ich ſuchte, ſorgfältig verhüten wollte, daß nichts vorausgeſetzt würde, das ſich ſchon auf den binomiſchen Lehrſatz in ſeiner Allgemeinheit gründete, ſo fand ich für dienlicher alles auf die einfachſte Anwendung der Differentialrechnung zu bringen; So habe ich den Beweis in einem 1758. hier herausgegebenen Programma: theorema binomiale vniuerſaliter demonſtrat. bekannt gemacht; den Beweis für ganze bejahte Exponenten (Alg. 141.) habe ich in einer 1745. zu Leipzig herausgegebenen Schrift Demonſtratio theorematis binomialis mitgetheilet.

49. Anm. Das Geſetz der Coefficienten wenn der Exponent eine ganze bejahte Zahl iſt, ſteht in Stifels Arithmetica integra I B. 5. Cap. daraus ich es in meiner Geſchichte der Mathematik, I. Band 120 S. angeführt habe. Stifels Buch iſt 1544. erſchienen, er giebt ſich nicht als Erfinder dieſes Geſetzes an, ich weiß aber keine frühere Nachricht. Trigonalzahlen nennt er, und deutlich iſt man auf das Geſetz durch Betrachtung der figurirten Zahlen gekommen.

Zunächſt nach Stifeln finde ich es in Clavii Geometr. practica Rom. 1604. Lib. VI. Prop. 19. Beyde Schriftſteller brauchen es zu Ausziehung der Wurzeln.

Seitdem Buchſtabenrechnung eingeführt war, ließ es ſich dadurch bequemer ausdrucken als mit Worten, und die das thaten wurden als Erfinder angeſehn, ohne daß man mehr an die Vorfahren dachte, die eben das, nur anders geſagt hatten. So nennt Io. Bernoulli Op. T. IV. p. 173; Paſcal als den erſten Erfinder, ſagt auch er habe es auch gefunden auf eine einfachere Art als Newton, den die Engländer als Erfinder angeben. Jacob Bernoulli Art. Coniect. P. II. c. 8. p. 131. hat gewieſen, wie es aus der Lehre von den Combinationen flieſſt: Nähmlich a + b verſchiedenemahl mit einander multipliciren heiſſt ſoviel als a und b auf verſchiedene Arten mit einander combiniren, nur mit dem Unterſchiede von Alg. 735; daß hier in einer Verbindung eine Sache zu wiederhohlten mahlen vorkömmt. In dieſer Formel der Potenzen für jeden ganzen Exponenten hat man ſich nun die Freyheit genommen, ſtatt des Exponenten einen Bruch und eine verneinte Zahl zu ſetzen, weil Wurzeln und Quotienten dergleichen Exponenten haben. Ob gleich das letztere nun richtig iſt, ſo hat es mir doch immer geſchienen, als berechtige uns dieſes nicht, in der binomiſchen Formel den Exponenten einem Bruche oder einer verneinten Zahl gleich zu ſetzen, weil dieſe Formel aus dem Begriffe der Multiplication und folglich aus der Vorausſetzung, daß der Exponent eine ganze bejahte Zahl iſt, hergeleitet wird. Daß gründliche Algebraiſten eben dergleichen Bedenken gehabt, erhellt aus ihren Bemühungen, dieſe Erweiterung zu rechtfertigen, ſ. Clairaut Algebra IV. Th. 54. u. f. Art. 286. S. in Mylius Ueberſ. Auch von Segner Elem. Analyſ. finitor. §. 264; 329; Bey dem Verfahren dieſer Gelehrten bleibt mir der Zweifel Alg. 627. übrig. Und eben dieſer Zweifel zeigt, warum die

Dif-

Differentialrechnung einen ſo kurzen und offenbahren Beweis giebt, weil ſie nähmlich von der Reihe, in welche eine Potenz aufgelöſet wird, nicht alle Glieder braucht (30). Es iſt auch einer guten Methode deſto weniger zuwider, die Differentialrechnung hier zu brauchen, weil man die Erweiterung der binomiſchen Formel auf andere als ganze bejahte Exponenten, nicht eher als bey der Rechnung des Unendlichen vorgenommen hat, wovon Newtons analyſis per aequationes infinitas; im Commerc. epiſt. Io. Collins p. 3. und Newtons Briefe daſelbſt p. 49. 67 Proben enthalten.

Den binomiſchen Satz, für alle Arten von Exponenten darzuthun iſt die Bemühung v. Segner. Nouv. mém. de l'Ac. de Pr. 1777. p. 37. L'Huilier Principior. calc. diff. et int. expoſitio Tub. 1795. Caput A. p. V. Henr. Aug. Rothe Theor. binom. ex ſimpliciſſimis Analyſeos finitor. fontibus, Lipſ. 1796. Einladungsſchrift zur Antrittsrede der Profeſſion. Alle drey gründen ſich darauf: Für eine Potenz geht eine Reihe nach dem binomiſchen Geſetz, und auch ſo eine Reihe für eine andere Potenz; beyder Reihen Product giebt beyder Potenzen Product und iſt eine Reihe, die nach dem binomiſchen Geſetze geht.

L'Huilier hat den Beweis mehr entwickelt als Segner. Rothe hat ihn in Hr. Prof. Hindenburgs Zeichen vorgetragen, wo Coefficienten die wievielten ſie ſind und zu welcher Potenz ſie gehören, kurz angedeutet werden. Jeder iſt für ſich auf dieſen Beweis gekommen.

50. **Exempel.** Für $m = -\frac{1}{2}$ ſind die Coefficienten: $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2} : 2 = +\frac{3}{8}$; $+\frac{3}{8}\cdot -\frac{5}{2} : 3 = -\frac{5}{16}$; $-\frac{5}{16}\cdot -\frac{7}{2} : 4 = +\frac{35}{128}$ u. ſ. w. alſo

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}\cdot y^3 + \frac{35}{128}y^4 \ldots$$

Dieſe Reihe multiplicirt mit

$(1+y)^{\frac{1}{2}} =$ (Alg. 625.)

$1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 \ldots$

giebt

$$\begin{array}{lllll} 1 & -\frac{1}{2}\Big\} y & +\frac{3}{8}\Big\} y^2 & -\frac{5}{16}\Big\} y^3 & +\frac{35}{128}\Big\} y^4 \ldots \\ & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{3}{16} & -\frac{5}{32} \\ & & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} & -\frac{3}{64} \\ & & & +\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ & & & & -\frac{5}{128} \end{array}$$

oder = 1 weil ſich alle folgende Glieder aufheben, welches als eine Probe dienet, daß beyder Reihen Coefficienten, ſo weit ſie da ſtehen, richtig ſind berechnet worden.

51. **Exempel.** Für $m = \frac{1}{n}$ iſt $(1+y)^{\frac{1}{n}} =$

$$1 + \frac{1}{n}y + \frac{1.(1-n)}{1.2n^2}y^2 + \frac{1.(1-n)(1-2n)}{1.\ 2.\ 3\ n^3}y^3 \ldots$$

$$+ \frac{1.(1-n)\ldots\ldots(1-(r-1)n)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ r.\ n^r}y^r$$

$$+ \frac{P.(1-rn)}{(r+1).n}y^{r+1}.$$

Wenn der Coefficient bey der Potenz r von y; P heiſſt. Jſt der folgende = Q ſo iſt

$$Q = P\left(\frac{\frac{1}{n} - r}{r+1}\right) = -P.\left(\frac{r - \frac{1}{n}}{r+1}\right)$$ wo das,

was

was in P multiplicirt wird, gewiß ein bejahter eigentlicher Bruch iſt, es mag nun n eine bejahte oder eine verneinte ganze Zahl ſeyn. Alſo iſt, ohne Abſicht auf das Zeichen, jeder Coefficient kleiner als der vorhergehende; und das Zeichen mit betrachtet iſt er dem vorhergehenden allemahl entgegengeſetzt.

52. Exempel. Wenn e eine ganze bejahte Zahl und n (51) eine ganze verneinte Zahl ſeyn ſoll, ſo ſetze man e = − n; dieſes giebt

$$(1+y)^{-1:e} = 1 - \frac{1}{e}y + \frac{1.(1+e)}{1.2\,e^2}y^2 \ldots$$

$$+ \frac{1.(1+e)\ldots 1+(r-1)e}{1.\,2.\,\ldots\ldots\,r.\,e^r} y^r - P.$$

$\frac{r+1:e}{r+1} y^{r+1}$ wo wieder jeder Coefficient kleiner als der vorige und ihm mithin entgegengeſetzt iſt.

53. Wenn m (46) ein eigentlicher bejahter Bruch iſt, ſo ſind m − 1; m − 2; u. ſ. w. lauter verneinte Zahlen: Alſo iſt der zweyte Coefficient $\frac{m.(m-1)}{1.\,2.}$ verneint; dieſer aber mit $\frac{m-2}{3}$ multiplicirt giebt den dritten bejaht, und ſo ſind ferner alle Coefficienten abwechſelnd bejaht und verneint, ſo daß der erſte bejaht iſt.

54. Weil $(1 - y)^m = 1 - m.\, y + \frac{m.\,(m-1)}{1.\;2.} y^2 \ldots$ und alſo wenn $y = 1$ geſetzt wird; $0 = 1 - m + \frac{m.\,(m-1)}{1.\;2}$ u. ſ. w. ſo ſind dieſer Reihe zweytes, viertes u. ſ. f. alle Glieder deren Zahl gerade iſt verneint, wenn m ein bejahter eigentlicher Bruch iſt; denn es ſind bejahte Gröſſen (51) vor denen das Zeichen — ſteht (Alg. 148.) das dritte, fünfte, und alle folgenden ungeraden Glieder aber ſind verneinte Gröſſen (51) vor denen das Zeichen + ſteht, (Alg. 148.) und alſo verneint. Alſo beſteht dieſe Reihe aus einer 1 und lauter verneinten Gröſſen, die alſo zuſammen = — 1 ſeyn müſſen, weil die Reihe = 0 ſeyn ſoll. Hieraus folgt, daß die unendliche Reihe der Binomialcoefficienten, wenn m ein eigentlicher bejahter Bruch iſt, vom erſten, m, an gerechnet, zuſammen = — 1 giebt, welches dient unzählige unendliche Reihen von Brüchen zu finden, deren jede = 1 ſeyn muß.

So iſt (51) $1 = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2\,n^2} + \frac{(2n-1).\,(n-1)}{2.\;\;3.\;\;n^3} + \frac{(3n-1).\,(2n-1).\,(n-1)}{2.\;\;3.\;\;4.\;n^4}$ u. ſ. w.

55. Für einen verneinten Werth von m $= -n$ läſſt ſich ein Schluß wie 54 nicht anbringen. Es wird alsdenn

$$(1-y)^{-n} = 1 + ny + \frac{n.(n+1)}{1.\ 2} y^2 \ldots$$

$$+ \frac{n.(n+1)\ldots(n+r-1)}{1.\ 2 \ldots r} y^r.$$ In allen Gliedern nähmlich deren Zahl gerade iſt enthält der Coefficient eine ungerade Anzahl verneinter Factoren, und in allen deren Zahl ungerade iſt eine gerade; alſo wäre der Coefficient für ſich, dorten verneint, hier bejaht: Aber in allen geraden Gliedern iſt der Coefficient in eine ungerade Potenz, und in allen ungeraden in eine gerade von $-y$ multiplicirt, folglich das Product allemahl bejaht. Folglich beſteht dieſe Reihe, und alſo auch die, welche herauskömmt, wenn $y = 1$ geſetzt wird, aus lauter bejahten Gröſſen. Jede dieſer Gröſſen, wie

$\frac{n.(n+1)\ldots(n+r-1)}{1.\ 2 \ldots\ldots r}$ iſt endlich, wie groß auch r ſeyn mag; alſo machen ihrer unendlich viel eine unendliche Summe, nähmlich $\frac{1}{0^n}$ welches unendlich iſt. (Trigon. 4. Erkl. 4. Zuſ.)

Formel für die Potenz einer unendlichen Reihe (infinitinomium).

56. Aufg. Die Potenz m der Reihe $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 \ldots$ zu finden; wo die griechiſchen Buchſtaben gegebene Coefficienten bedeuten.

Aufl. Man ſetze ſie $= 1 + y$; und ihre Potenz m; $= w = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5$ wo man die groſſen lateiniſchen Buchſtaben ſucht (wie 46). Alſo iſt $m.(1 + y)^{m-1}\, dy = dw$ oder $mwdy = (1 + y).\, dw$.

II) Nun iſt $dy = (\alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 \ldots)\, dz$ und $dw = A + 2Bz + 3Cz^2 \ldots.)\, dz$; alſo

$$\text{III)}\quad (1+y).\frac{dw}{dz} = A \begin{array}{l} + A\alpha \\ + 2B \end{array}\Bigg] z \begin{array}{l} + A\beta \\ + 2B\alpha \\ + 3C \end{array}\Bigg] z^2$$

$$\begin{array}{l} + A\gamma \\ + 2B\beta \\ + 3C\alpha \\ + 4D \end{array}\Bigg] z^3 \quad \begin{array}{l} + A\delta \\ + 2B\gamma \\ + 3C\beta \\ + 4D\alpha \\ + 5E \end{array}\Bigg] z^4 \ldots.$$

$$\text{IV)}\quad \frac{mwdy}{dz} = m\alpha \begin{array}{l} + 2m\beta \\ + mA\alpha \end{array}\Bigg] z \begin{array}{l} + 3m\gamma \\ + 2mA\beta \\ + mB\alpha \end{array}\Bigg] z^2$$

+

$$\left.\begin{array}{l} +\ 4m\delta \\ +\ 3mA\gamma \\ +\ 2mB\beta \\ +\ mC\alpha \end{array}\right] z^3 \qquad \left.\begin{array}{l} +\ 5m\varepsilon \\ +\ 4mA\delta \\ +\ 3mB\gamma \\ +\ 2mC\beta \\ +\ mD\alpha \end{array}\right] z^4 \ \ldots$$

V) Wenn man nun die Coefficienten bey einerley Potenzen von z; (coefficientes terminorum homogeneorum) in III; IV; gleich ſetzt, welches ſo viel iſt, als ob man alles auf eine Seite gebracht hätte, und nach Alg. 624. verführe; ſo erhält man

$A = m\alpha$; $B = \dfrac{(m-1)\,A\alpha + 2m\beta}{2}$; $C =$ $(m-2)\,B\alpha + (2m-1)\,A\beta + 3m\gamma) : 3$; $D = (m-3)\,C\alpha + (2m-2)\,B\beta + (3m-1)\,A\gamma + 4m\delta) : 4$; $E = (m-4)\,D\alpha + (2m-3)\,C\beta + (3m-2)\,B\gamma + (4m-1)\,A\delta + 5m\varepsilon) : 5$.

VI) Wenn man das Geſetz, das dieſe Coefficienten beobachten, bemerkt, ſo wird man folgenden Ausdruck für den nächſten daraus ſchlieſſen:

VII) $F = (m-5)\,E\alpha + (2m-4)\,D\beta + (3m-3)\,C\gamma + (4m-2)\,B\delta + (5m-1)\,A\varepsilon + 6m\zeta) : 6$.

VIII) Dieſe Vermuthung zu rechtfertigen, und eine allgemeine Formel bequem herauszubringen; will ich jeden Coefficienten der Reihe $1 + y$ mit λ, und mit Beyfügung ſeiner Zahl

bezeichnen; ſo daß $\alpha = \lambda 1$; $\beta = \lambda 2$; und die zu z^n und z^{n-1} gehören, λn und $\lambda (n-1)$ heiſſen. Eben ſo bedeute L mit beygefügter Zahl, jeden Coefficienten der Reihe w; ſo daß $L 1 = A$; $L 2 = B$; und $L n$ und $L (n-1)$ zu z^n und z^{n-1} in dieſer Reihe gehören.

Dieſem gemäß bedeuten λo und $L o$ jedes $= 1$. Aber $\lambda - 1$; $L - 1$ u. ſ. w. rückwärts ſind jeder $= o$.

Die beyden im griechiſchen und im lateiniſchen Alphabete gleichgültige Buchſtaben, bedeuten alſo jeder, überhaupt einen Coefficienten ſeiner Reihe, und zu welcher Potenz er gehört, zeigt die Zahl an die ihm beygeſchrieben iſt.

Das Zeichen, für ein Product aus dem Buchſtaben in die Zahl anzuſehen, wird leicht verhütet, wenn zwiſchen ein Paar Gröſſen die multiplicirt werden, allemahl das Multiplicationszeichen ſteht. So laſſen ſich die Reihen folgendergeſtalt ausdrücken:

$$1 + y = 1 + \lambda 1 . z \ldots + \lambda r . z^r \ldots + \lambda n . z^n \ldots$$

$$w = 1 + L 1 . z \ldots + L r . z^r \ldots + L n . z^n \ldots$$

$$\frac{dy}{dz} = \lambda 1 \ldots + r . \lambda r . z^{r-1} \ldots + n . \lambda n . z^{n-1}$$

$$\frac{dw}{dz} = L 1 \ldots + r . L r . z^{r-1} \ldots + n . L n . z^{n-1}$$

IX. Man ſuche den Coefficienten des Products $(1+y).dw:dz$ bey z^n.

In der Reihe $dw:dz$ ſteht vor jeder Potenz von z; ein Product aus einer Zahl die um 1 gröſſer iſt als der Exponent, in L mit eben der Zahl.

Alſo iſt ein unbeſtimmtes Glied dieſer Reihe $=(n-r+1).L(n-r+1).z^{n-r}$.

Dieſes unbeſtimmte Glied, mit der Reihe für $1+y$ unbeſtimmten Glieder $\lambda r.z^r$ multiplicirt, giebt zum Producte $(n-r+1).L(n-r+1).\lambda r.z^n$ Das Glied des Products $(1+y).dw:dz$ das die Potenz n von z enthält, iſt die Summe aller Producte, aus einem Gliede der Reihe $dw:dz$ das die Potenz $n-r$ enthält, in ein Glied der Reihe $1+y$ das die Potenz r enthält.

Nähmlich der Reihe $dw:dz$ Glieder in denen z die Potenzen $n; n-1; \ldots n-r \ldots 0$ hat, jedes nach angezeigter Ordnung in eines der Glieder der Reihe $1+y$ multiplicirt, wo ſich die Potenzen $0; 1; \ldots r \ldots n$ befinden.

In jedes dieſer Producte verwandelt ſich vorhin angegebenes Product aus der beyden Reihen unbeſtimmten Gliedern, wenn man r von n an durch alle ganze Zahlen bis an 0 abnehmen läſſt; auch giebt dieſe Verwandlung den jedesmahligen Coefficienten jedes einzelnen Products.

Die Summe aller dieſer Coefficienten oder der Coefficient des ganzen Products bey der Potenz n von z; iſt alſo $= 1 . L1 . \lambda n + 2 . L2 . \lambda (n - 1) + 3 . L3 . \lambda (n - 2) \ldots\ldots + (n - r + 1) . L (n - r + 1) . \lambda r \ldots\ldots + n . Ln . \lambda 1 + (n + 1) . L (n + 1) . 1$.

X) Man ſuche den Coefficienten des Products $w dy : dz$ bey z^n. Er beſtehet eben wie in IX; aus den Producten jedes Coefficienten der Reihe $dy : dz$; die zu den Potenzen n; $n - 1$; ... $n - r$; .. 0 gehören, in einen der Coefficienten der Reihe w; die zu den Potenzen 0; 1; ... r; .... n gehören. Er iſt alſo $(n + 1) \lambda (n + 1) . 1 + n . \lambda n . L1 + (n - 1) . \lambda (n - 1) . L2 \ldots + r . \lambda r . L (n - r + 1) \ldots\ldots + 2 . \lambda 2 . L (n - 1) + \lambda 1 . Ln$.

XI) Weil nun $\frac{m . w . dy}{dz} = \frac{(1 + y) . dw}{dz}$ (II) ſo ſind in der Reihe linker Hand, und in der rechter Hand, die Coefficienten gleich, die zu einerley Potenz von z gehöre, alſo auch zu der n.

Man multiplicire den in (X) gefundenen Coefficienten, die Glieder rückwärts geordnet mit m, ſo kömmt $m . \lambda 1 . Ln \ldots + m . r . \lambda r . L (n - r + 1) \ldots + m . (n + 1) . \lambda (n + 1) . 1$.

Das beträgt ſo viel als der Coefficient in (IX) auch rückwärts geordnet oder als $(n + 1)$.

L

$L(n+1).\,1 \ldots (n-r+1).\,L(n-r+1).$ $\lambda r \ldots + 1.\,L1.\,\lambda n.$ Beyde gleich geſetzt kömmt $(n+1).\,L(n+1).\,1 = (m-n).\,L\,n.\,\lambda 1 \ldots + (m.r - n + r - 1).\,L(n-r+1).\,\lambda r \ldots + m(n+1) \ldots \lambda(n+1).$

XII) Wenn man hier, was zur rechten Hand des Gleichheitszeichens ſteht, mit $n+1$ dividirt, ſo erhält man einen allgemeinen Ausdruck für $L(n+1)$ durch die gleich anfangs gegebenen Coefficienten der Reihe $1+y$ und durch die ſchon gefundenen vorhergehenden der Reihe w; wo ſich dann zeiget, daß das (VI) beobachtete Geſetz allgemein iſt.

XIII) Dieſer allgemeine Coefficient (XII) deſſen Nenner $n+1$ iſt, hat zum allgemeinen Gliede des Zählers $(mr - n + r - 1).\,L(n-r+1).\,\lambda r$, welches alle Glieder des Zählers giebt, wenn man nach der Ordnung $1;\ 2;\ldots n+1$ ſtatt r ſetzt.

XIV) Wenn man ſtatt A; B; u. ſ. w. ihre Werthe ſetzt, ſo findet ſich

$$A = m\alpha$$

$$B = \frac{m.(m-1)}{1.\;2.}\alpha\alpha + m\beta$$

$$C = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\;2.\;3}\alpha^3 + m.(m-1).$$

$\alpha\beta + m\gamma$ u. ſ. w. die folgenden Coefficienten aber werden immer mehr und mehr

zu-

zuſammengeſetzt, wie man beym Wolf El. analyſ. fin. §. 102. ſehen kann; und ich zweifle, ob ſich das Geſetz des Fortganges der auf dieſe Art ausgedrückten Coefficienten mit gehöriger Schärfe würde erweiſen laſſen. Selbſt zum Gebrauche iſt mein Ausdruck bequemer, weil man doch einen Coefficienten nach dem andern berechnet, und es alſo am bequemſten iſt, wenn die folgenden nicht ganz von neuem, ſondern vermittelſt der ſchon berechneten vorhergehenden gefunden werden.

XV) Die allgemeinſte Reihe $\pi u^e + \alpha u^{e+w} + \beta u^{e+2w} \ldots$ läßt ſich auf den Ausdruck $\pi u^e (1 + \frac{\alpha}{\pi} u^w + \frac{\beta}{\pi} u^{2w} \ldots)$ bringen, welcher ſich wenn $u^w = z$ geſetzt wird, in $\pi z^{e:w} (1 + \frac{\alpha}{\pi} z + \frac{\beta}{\pi} z^2 \ldots)$ verwandelt. Es iſt klar, daß man nur die Potenz m des letzten Factors der unendlichen Reihe, ſuchen, jedes Glied derſelben durch dieſe Potenz des erſten Factors multipliciren, und alsdenn ſtatt z ſeinen Werth u^w ſetzen darf. Daß alſo das Verfahren gegenwärtiger Aufgabe, zulänglich iſt, die Potenz jeder unendlichen Reihe zu finden.

57. Anm. Jac. Bernoulli Op. T. II. n. 103. art. 1. lehret zwo Arten die Potenz einer unendlichen Reihe zu finden. Eine davon, welche die Integralrechnung erfodert, zieht er der andern vor, weil ſie das Geſetz der Coefficienten beſſer vor Augen ſtellte, ſie ſcheint

ſcheint mir aber nicht ſo geſchickt dergleichen Geſetz allgemein zu erweiſen, als mein Verfahren. Die Erinnerung, die ich (56. XV.) gemacht habe, findet ſich auch in Cramers Anmerkungen bey dieſer Stelle Bernoullis, weil Bernoulli geglaubt hatte, die Reihe $1 + \alpha z \ldots$ ſey nicht allgemein genug. Zuvor hatte ſchon de Moivre Trans. n. 230. und aus ihm Colſon in ſ. Comment. über Newtons Method of Fluxions p. 312. dieſe Aufgabe aufgelöſet, aber ſo, daß ſich das allgemeine Geſetz der Coefficienten nicht ſo leicht erweiſen läſſt wie aus meinem Verfahren. Des Moivre Reihe findet ſich beym Wolf (56. XIV.) weiter fortgeführt als beym Colſon. Das Geſetz, das ich hier angewieſen habe, findet ſich auch beym Euler Inſt. Calc. diff. P. II. §. 202.

58. Aus 56. folgt die Potenz jeder endlichen Reihe. So iſt für eine dreytheilichte Wurzel $0 = \gamma = \delta = \varepsilon$ u. ſ. w. alſo der allgemeine Coefficient von $(1 + \alpha z + \beta z^2)^m$ aus 56; XII. $L(n+1) = (m-n).\ Ln.\ \alpha + (2m - n + 1).\ L(n-1)\beta + (3m - n + 2).\ L(n-2).\ \gamma) : (n+1)$. Hier iſt für den erſten Coefficienten $n = 0$; alſo $A = m.\ \alpha$ (56. XIII.). Für den zweyten und dritten $n = 1$; $= 2$; alſo $B = (m-1)\ A.\ \alpha + 2m\beta) : 2$; $C = (m-2).\ B.\ \alpha + (2m - 1).\ A.\ \beta) : 3$. u. ſ. w. wie in 56. V. wenn dorten $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ geſetzt werden.

59. Auch kann man die Reihe unendlich laſſen, aber die Potenz beſtimmen. So iſt für $m = 2$; der allgemeine Coefficient (56. XI.) des Quadrates einer unendlichen Reihe
$(2-n).\ Ln.\ \lambda 1 + (5-n).\ L(n-1).\ \lambda 2 + (8-n).\ L(n-2).\ \lambda 3 \ldots + (3r - 1 - n).$
L

$L(n - r + 1). \lambda r \ldots + 2.(n + 1). \lambda (n + 1) : (n + 1)$.

60. Exempel. Für eine dreytheilichte Wurzel wird dieſer Ausdruck (59) $(2 - n). Ln. \alpha + (5 - n). L(n - 1). \beta) : (n + 1)$. Setzt man hier nach und nach 0; 1; 2; 3; 4; 5; ſtatt n; ſo bekömmt man

$$A = 2\alpha;\ B = \frac{A\alpha + 4\beta}{2} = \alpha\alpha + 2\beta;\ C = \frac{3A\beta}{3} = 2\alpha\beta;\ D = -\frac{C\alpha + 2B\beta}{4} = \beta\beta;$$

$$E = -\frac{2D\alpha + C\beta}{5} = 0;\ 6F = -3E.\alpha + 0.D.\beta = 0;$$

für $n > 5$ verſchwinden alſo Ln und $L(n + 1)$ daher das Quadrat einer dreytheilichten Wurzel auf dieſe Art wie durch die gewöhnliche Rechnung gefunden wird.

61. Dieſes Exempel zeigt, wie die Reihe w (56) für eine Wurzel von einer beſtimmten Menge von Theilen abbricht, wenn man ſtatt m eine ganze Zahl ſetzt, weil alsdenn die Coefficienten (59) verſchwinden.

62. Es erhellt aber, daß m in 56 alle Werthe haben darf, die es in 46 haben durfte, weil die Auflöſung beyder Aufgaben völlig auf einerley Gründen beruhet. Ich habe die (56) in einem hier 1759. herausgegebenen Programma: infi-

infinitinomii ad potentiam indefinitam eleuati formula, bekannt gemacht.

Herr Prof. Hindenburg infinitinomii dignitatum exponentis indefiniti hiſtoria, leges ac formulae.. Gott. 1779; beruhet auf Combinationen. Macht den Anfang der Erweiterungen welche die Analyſis durch die combinatoriſche Analytik vermittelſt ſeiner Bemühungen und Anleitungen erhalten hat. Einige dahin gehörige Schriften nenne ich An. endl. Gr. 748. Mehrere dergleichen finden ſich beſonders in dem von Herrn Prof. Hindenburg ſeit 1794. beſorgten Archiv für reine und angewandte Mathematik, davon um Michaelis 1797; der ſechſte Heft erſchienen iſt. Vorzüglich muß erwähnt werden: Der polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis, nebſt einigen verwandten u. a. Sätzen. Neu bearbeitet und dargeſtellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Leipz. 1796.

Beſtimmung der Tangenten der krummen Linien; durch die Differentialrechnung.

63. Lehrſ. LMN iſt ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie, welcher ganz auf einer Seite ſeiner Sehne LN liegt, M befindet ſich zwiſchen L und N; die geraden Linien LM, MN, ſind Sehnen der beyden Bogen die jenen ganzen

ganzen ausmachen, von M auf beyde Seiten genommen, daß die drey geraden Linien LN, LM, MN, ein Dreyeck einſchlieſſen.

Nun laſſe man dem Puncte M, ſich die bey- L, N, nähern; ſo wird der Winkel LMN immer gröſſer, und kömmt zween rechten ſo nah als man will, wenn die Puncte L, N, dem M, ſo nahe kommen können als man will. Man kann alſo allemahl die Bogen vom mittlern Puncte ſo klein nehmen, daß der Winkel von zween rech- ten weniger unterſchieden iſt, als um irgend ei- nen gegebenen Unterſchied.

Bew. Dieß iſt weiter nichts als das Geſetz der Stetigkeit Geom. 6. Erkl. Anmerk. Ein Punct nähmlich, der den Weg LMN beſchreibt, muß in M wenn er nach N zu geht, ſeinen Weg ſo ändern, daß der Weg, auf dem er nach N zu geht, von dem, auf welchem er von L nach M kam, weniger als um jeden gegebenen Unter- ſchied abweicht. Nimmt man innerhalb des Bogens LM eine Stelle und zieht von ſolcher eine gerade Linie nach M; ſo unterſcheidet ſich der wahre Weg, den der Punct aus dieſer Stelle nach M nimmt, von dieſer geraden Linie deſto weniger, je näher die Stelle bey M iſt, und der Unterſchied wird unendlich vermindert, wenn die Stelle dem Orte M unendlich nahe rückt. So verhält es ſich auch mit einer Stelle in dem Bogen MN; die geraden Linien alſo von M nach

beyden

beyden Stellen müſſen von einer einzigen gera- den Linie unendlich wenig unterſchieden wer- den, oder ihr Winkel muß 2R unendlich nahe kommen.

64. Weil die gerade Linie von einer ſolchen Stelle nach M, dem wahren Wege des Punctes, d. i. dem Bogen zwiſchen der Stelle und M un- endlich nahe kömmt, ſo kann man beyde für ei- nes halten. In dieſem Verſtande ſtellt man ſich vor, die krumme Linie beſtehe aus unendlich klei- nen geraden Linien als Elementen (S. 41. S. 5. Z.).

65. Von zween Bogen verſchiedener Schen- kel einer krummen Linie, die einander in M ſchneiden 3. Fig. gilt 63 nicht. Ein Exempel geben Alg. 483; und daſelbſt III. Taf. 22. Fig. die beyden Bogen $\alpha\delta$C; αDC; welche den Kno- ten der Muſchellinie machen, wenn das dortige C hier den Punct M 3 Fig. bedeutet.

66. Lehrſ. Der ganze Bogen LMN, liege auf einer Seite der geraden Linie TMV 1 Fig. die ihn alſo in M berührt. (Alg. 449). Ich ſage, man könne durch M, keine gerade Linie auf der Seite der Linie MV auf wel- cher N liegt, ziehen, die den Bogen MN nicht ſchneide; d. i. man könne keine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bo- gen MN ziehen.

Bew. Geſetzt MH 3 Fig. ſey eine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bogen MN; So fällt MT nothwendig zwiſchen ihre Verlängerung Mh und den Bogen MN; So nahe man alſo auch die Stellen N; L; dem Orte M rücken läſſt, ſo können die Sehnen ML; MN; doch nie einen gröſſern Winkel mit einander machen als der Winkel TMH iſt, und folglich kann ihr Winkel ſich 2R nicht unendlich nähern, wieder 63.

67. Wenn LMN ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie ſeyn ſoll, ſo kann er nicht ganz auf einer Seite der geraden Linie TMV; und zugleich auch auf einer Seite der geraden Linie hMH liegen. Das iſt: Ein Bogen einer krummen Linie hat an einem Puncte nicht mehr als eine Tangente. Zweene Bogen, die einander in einem Puncte ſchneiden, können jeder an dieſem Puncte ſeine eigene Tangente haben (65). Dergleichen wären LM; MN; 3 Fig. ihre Tangenten, MT; MH;

68. Der Punct N 1 Fig. kann dem Puncte M allemahl ſo nahe rücken, daß der Winkel VMN kleiner wird als jeder gegebene Winkel; oder: wenn N unendlich nahe an M rückt, ſo wird VMN unendlich klein. Denn jede gerade Linie durch den Berührungspunct, die einen endlichen Winkel mit der Tangente macht, ſchneidet die krumme Linie (66) alſo kann der Punct

N

N allemahl ſo nahe an M rücken, daß er zwiſchen die nur genannte gerade Linie und die Tangente fällt; d. i. daß die Sehne MN mit der Tangente einen kleinern Winkel macht als die nur genannte gerade Linie, d. i. einen kleinern Winkel als jeder endliche Winkel iſt.

Weil nun der Bogen MN zwiſchen Tangente und Sehne fällt; der Winkel der Tangente und Sehne aber unendlich abnimmt, ſo nähern ſich Sehne, Bogen und Tangente, unendlich einem Zuſtande, da ſie nicht mehr zu unterſcheiden ſind; einem Zuſtande, da das Element des Bogens, oder ſein unendlich kleiner Theil, von den beyden geraden Linien, der Sehne und der Tangente, nicht mehr zu unterſcheiden iſt. Man ſieht alſo das Element des Bogens als einen geraden, unendlich kleinen Theil der Tangente oder die Tangente als des Elements Verlängerung an; dieſer Ausdruck will der Schärfe nach ſagen: der Bogen kann durch beſtändige Verminderung ſo weit gebracht werden, daß er ſich in der Lage und in der Länge, von ſeiner Sehne, und von einem der Sehne gleichen Stücke der Tangente, weniger als jede angebliche Gröſſe beträgt, unterſcheidet. Siehe Geom. 41. S. 5. Z. und Anm.

69. Erkl. Ein Bogen LMN einer krummen Linie 1 Fig. iſt nach einer Gegend O zu hohl (concauus) wenn die Sehnen LM; MN; ſo

 viel=

vielmahl man auch drey Puncte innerhalb dieſes Bogens nehmen kann, allemahl nach dieſer Gegend zu Winkel machen, die weniger als 2 R betragen. Nach der andern Seite zu, wie nach O 4 Fig.; iſt er erhaben (conuexus).

70. Der Bogen fällt zwiſchen die Tangente und die Gegend, nach der er hohl iſt, 1 Fig. aber die Tangente fällt zwiſchen ihn und die Gegend, nach der er erhaben iſt. 4. F.

71. Wenn VNQ 1 F. NVQ 4 F. der Ordinate MP und MS der Abſciſſe AP; parallel iſt, ſo iſt MNS = MVS ± VMN das obere Zeichen für den hohlen Bogen, das untere für den erhabenen.

72. MNS nähert ſich dem Winkel MVS unendlich (68).

73. VS : MS = ſin VMS : ſin MVS (Tr. 10 S.
MS : NS = ſin MNS : ſin NMS

VS : NS = ſin VMS. ſin MNS : ſin NMS. ſin MVS (Arithm. V. 50.).

In der letzten Verhältniß nun nähern ſich die beyden erſten Factoren ihres erſten und zweyten Gliedes einander unendlich (68) und eben das thun die beyden letzten; (72) alſo nähert ſich die Verhältniß VS : NS unendlich der Verhältniß der Gleichheit.

74. VN wird alſo in Vergleichung mit NS immer kleiner und kleiner, ſo daß es in Verglei-

chung

chung damit, weniger als jede angebliche Gröſſe (1) ſo klein ſie auch iſt, in Vergleichung mit einer andern angeblichen beträgt; oder VN verſchwindet gegen NS (5).

75. Die Verhältniß VS: SM nähert ſich unendlich der Verhältniß NS: SM.

76. Erkl. Wenn die verlängerte Tangente, der Abſciſſenlinie in T begegnet, ſo heiſſt PT die Subtangente.

77. Aufg. Die Verhältniß der Ordinate zur Subtangente, MP: PT zu finden.

Aufl. MP: PT = VS: SM (71) wie groß oder wie klein auch die Entfernung zwiſchen VQ und MP iſt, wenn man aber die erſte Linie ſich der zweyten unendlich nähern läſſt, ſo nähert ſich die Verhältniß VS: SM unendlich der Verhältniß NS: SM (75). Folglich iſt MP: PT der Verhältniß NS: SM unter der Bedingung gleich, daß N unendlich nahe bey M iſt. Da iſt aber NS: SM die Verhältniß der Differentialen der Ordinate und Abſciſſe (14) heiſſt alſo PM = y; AP = x; ſo iſt PT = $\frac{y.\ dx}{dy}$ welches man in endlichen Gröſſen findet, wenn man nach den Regeln der Differentialrechnung den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ ſucht. Daraus findet man auch AT = TP — AP.

78. Wenn Mm das Element der krummen Linie (68) bedeutet, ſo iſt mR = dy; MR = dx da denn die Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; TMP; eben das giebt. Das Dreyeck MmR welches vom Barrow (ſ. 90.) ſchon betrachtet worden, hat Leibniz triangulum characteriſticum genannt, weil ſich dadurch die krummen Linien unterſcheiden laſſen.

79. Wenn N ſich M unendlich nähert, alſo NS unendlich klein wird, ſo wird VN in Vergleichung mit einer unendlich kleinen Gröſſe unendlich klein, (74) oder ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, wenn NS eines der erſten iſt; oder wenn NS $= \frac{1}{\infty}$ ſo iſt VN $= \frac{1}{\infty^2}$ (11). Die Meinung iſt: indem VN und NS zugleich abnehmen ſo wird VN zu einer Zeit kleiner als jede angebliche Gröſſe, da ſich die Gröſſe von NS noch angeben läſſt.

80. In den Figuren, auf welche ſich die Rechnung 77 gründet, iſt angenommen, daß Ordinaten und Abſciſſen von M nach N zu, zugleich wachſen, auch von N nach M zu zugleich abnehmen, oder daß ihre Differentiale beyde zugleich bejaht oder verneint ſind, (23) folglich ihr Quotient bejaht iſt, und alſo auch die Subtangente bejaht iſt, wenn die Ordinate bejaht angenommen wird. Zugleich aber erhellt aus eben den Figuren, daß die Subtangente von P nach

dem

dem Anfange der Abſciſſen zu fällt, oder T und A auf einer Seite der Ordinate liegen.

81. Nähme aber die Ordinate ab, indem die Abſciſſe zunimmt, wie wenn B der Anfang der Abſciſſen BQ, BP, wäre, ſo wäre der Quotient ihrer Differentiale verneint, und alſo auch die Subtangente bey einer bejahten Ordinate verneint. Da lägen aber T und B auf verſchiedenen Seiten der Ordinate.

82. Bey einer verneinten Ordinate wäre die Subtangente in 80 verneint, in 81 bejaht.

83. Kurz: Wenn für wachſende Abſciſſen, die krumme Linie ſich von der Abſciſſenlinie entfernt, liegen Abſciſſe und Subtangente, auf einer Seite der Ordinate, aber auf entgegengeſetzten, wenn für wachſende Abſciſſen, die krumme Linie ſich der Abſciſſenlinie nähert.

Wenn man alſo nur den Werth von $\frac{y.dx}{dy}$ berechnet, ohne darauf zu ſehn ob dieſer Werth bejaht oder verneint iſt, ſo giebt nur beygebrachte Bemerkung, die Lage der Subtangente, welche Lage auch dadurch angedeutet wird, ob der Werth bejaht oder verneint iſt.

Exempel zu 77.

84. Aufg. Die Subtangente der Parabel (Alg. 349.) zu finden.

Aufl.

Aufl. Aus der Gleichung für die Parabel $yy = bx$ wird die Differentialgleichung $2ydy = bdx$ (18; 24) oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{b}$; folglich $PT = \frac{2yy}{b} = \frac{2bx}{b} = 2x$ oder die Subtangente iſt der doppelten Abſciſſe der Parabel gleich, wenn die Abſciſſen vom Scheitel gerechnet werden.

Verzeichnung. An den gegebenen Punct der Parabel M; eine Tangente zu ziehen, ziehe man die Ordinate MP; und nehme AT vom Scheitel rückwärts (83) der Abſciſſe AP gleich, ſo iſt TM die Tangente.

85. Aufg. Die Subtangente für die Ellipſe (362) und Hyperbel (389) zu finden.

Aufl. Die Gleichung $yy = bx \mp \frac{bxx}{a}$ wo das obere Zeichen für die Ellipſe, das untere für die Hyperbel gilt, giebt $2ydy = \left(b \mp \frac{2bx}{a}\right) dx$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b.(a \mp 2x)}$ folglich $\frac{y.dx}{dy}$ oder $PT = \frac{2x.(a \mp x)}{a \mp 2x}$ Alſo $PT - x$ oder $AT = \frac{ax}{a \mp 2x}$

Verzeichnung. An den gegebenen Punct M der Ellipſe oder Hyperbel eine Tangente zu ziehen, ziehe man ſeine Ordinate, und ſuche die vierte

vierte Proportionallinie zu $a \mp 2x; x; a$; welche vom Scheitel hinausgenommen den Punct T giebt.

Für die Ellipſe iſt der Zähler der Subtangente beſtändig bejaht, (Alg. 375.) der Nenner aber bejaht oder verneint, nachdem die Abſciſſe vom Scheitel an gerechnet kleiner oder gröſſer als die halbe Axe iſt. In jenem Falle alſo liegen Subtangente und Anfang der Abſciſſen auf einer Seite der Ordinate, in dieſem auf verſchiedenen, wie die Figur der Ellipſe ſo gleich zeigt. Für die Hyperbel gäbe es noch mehr Fälle zu unterſcheiden, weil x ohne Ende wachſen, und auch verneint werden kann, jeder aber wird ſich aus der Figur entſcheiden und mit 83 vergleichen laſſen.

86. Für $x = \frac{1}{2} a$ iſt bey der Ellipſe $\frac{dy}{dx}$ oder $b \frac{a - 2x}{2ay} = \frac{b. 0}{2 ay} = 0$. Alſo verſchwindet hier dy in Vergleichung mit dx; das heiſſt; um den Mittelpunct herum nimmt die Ordinate unendlich weniger zu als die Abſciſſe. Folglich wird daſelbſt der Winkel mMR (78) unendlich klein; oder die Tangente mMT der Abſciſſenlinie parallel. Damit ſtimmt überein, daß in dieſem Falle $PT = a. \frac{\frac{1}{2} a}{0}$ unendlich wird. Eben

ſo wird $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b.o}$ unendlich, welches weiter nichts geſagt iſt, als daß der umgekehrte Bruch $\frac{dy}{dx}$ verſchwindet.

87. Ueberhaupt, wenn für eine gewiſſe Abſciſſe $\frac{dy}{dx} = o$ wird, ſo iſt die Tangente der Abſciſſenlinie parallel, und folglich ſenkrecht auf eine Linie, die auf die Abſciſſenlinie ſenkrecht iſt, wie AD 1 Fig. Hieraus ſieht man, was es bedeutet, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$; unendlich wird. Alsdenn iſt $\frac{dx}{dy} = o$ oder die Tangente iſt der Linie AD parallel, welche mit dem Ordinaten y parallel geht, und alſo auf die Linie der Abſciſſen x ſenkrecht, wenn APM ein rechter Winkel iſt.

88. Die Regeln 85, verwandeln ſich nach 10 in 84 wenn $a = \infty$ geſetzt wird; wegen Alg. 384.

89. Dieſe Vorſchriften gelten auch, wenn die Abſciſſenlinie gleich nicht die Axe, ſondern nur ein Durchmeſſer iſt. Alg. 453.

90. Anm. Die Regel 77 kömmt völlig auf eines mit derjenigen heraus, die Barrow Lect. Geometr. X. am Ende als einen Anhang nach art. XIV. gegeben hat, nur daß er ſich anderer Ausdrückungen bedient. Man kann nähmlich AF = y; Abſciſſe und FM = x

Ordi=

Ordinate nennen. Nun hat Newton, Barrows als ſeines Lehrers Schriften gewiß geleſen, und Leibniz vielleicht auch. Ferner ſind die erſten Anwendungen der Fluxionen und der Differentialrechnung auf die Ziehung der Tangenten gemacht worden. Dieſe Erinnerung gehört zu 44. Jac. Bernoulli hat ſie ſchon in ſ. erſten Specimine calculi differentialis Act. Erud. Lipſ. Ian. 1691. gemacht; und vermuthlich um Leibnizen nicht zu mißfallen, am Ende des zweyten Speciminis (daſ. Iun. 1691.) etwas gemildert. S. Op. Iac. Bern. p. 431. und 453.

91. Eine gleichartige Gleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen (An. endl. Gr. 531.) läſſt ſich ſo darſtellen: $y^{\alpha} + a. y^{\alpha - \varepsilon}. x^{\varepsilon} = b. x^{\alpha}$ wo a, b, Zahlen bedeuten.

Aus ihr findet man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha. y^{\alpha - 1} + (\alpha - \varepsilon). a. y^{\alpha - \varepsilon - 1}. x^{\varepsilon}}{\alpha. b. x^{\alpha - 1} - \varepsilon. a. y^{\alpha - \varepsilon}. x^{\varepsilon - 1}}$$

Alſo die Subtangente =

$$\frac{\alpha. y^{\alpha} + (\alpha - \varepsilon). a. y^{\alpha - \varepsilon}. x^{\varepsilon}}{\alpha. b. x^{\alpha - 1} - \varepsilon. a. y^{\alpha - \varepsilon}. x^{\varepsilon - 1}}$$

Der Dividend iſt ſo groß als ein Product aus x in Diviſor folglich iſt die Subtangente = x. Die gebrauchte Gleichung enthält alle gleichartige Gleichungen zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen. Die Rechnung thut alſo allgemein dar, daß die Subtangente der Abſciſſe gleich iſt.

Nähm=

Nähmlich eine ſolche Gleichung gehört für gerade Linien die durch den Anfang der Abſciſſen gehn, und eine gerade Linie iſt ihre eigne Tangente.

Bernard Nieuwentiit, analyſis infinitorum, ſeu curuilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae. Amſt. 1695; giebt Gleichheit der Subtangente mit der Subtangente, als eine Merkwürdigkeit gleichartiger Gleichungen an, Cap. 1. §. 21. Ich weiß nicht ob er an die geraden Linien gedacht hat, denen die Gleichung gehört.

92. **Erkl.** Wenn MO auf die Tangente ſenkrecht ſteht, und die Abſciſſenlinie in O ſchneidet, ſo heiſſt ſie eine **Normallinie** und PO die **Subnormallinie**.

Wenn die Ordinaten mit den Abſciſſen rechte Winkel machen, ſo iſt die Subnormallinie

$PO = \frac{PM^2}{PT} = (77)\ \frac{y\,dy}{dx}$ wie auch aus der Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; MOP erhellt.

93. Alſo für die **Parabel** (84) $= \frac{1}{2}b$ oder unveränderlich, und allemahl dem halben Parameter gleich.

Für die **Ellipſe** und **Hyperbel** (85) $= b.\ \frac{(a \mp 2x)}{2a}$.

94. Anm. Wenn in der Ellipſe $x = \frac{1}{2} a$; ſo wird die Subnormallinie $= 0$ wegen (87). Iſt $b = a$, daß die Ellipſe ſich in einen Kreis verwandelt, ſo wird die Subnormallinie des Kreiſes $= \frac{1}{2} a - x = OP$ 1 Fig. wenn LMN der Bogen eines Kreiſes um den Mittelpunct O wäre, weil da alle Normallinien durch den Mittelpunct gehen.

95. I) Man nehme 1 Fig. auf der Normallinie $MG = c$. Geſchieht eben das auf jeder andern Normallinie, ſo bekömmt man eine Reihe Puncte, deren jeder von der krummen Linie CM um die Entfernung $= c$ abſteht. Dieſe ſind alſo in einer krummen Linie welche man der CM gleichlaufend (aequidiſtantem) nennen kann. Ich ziehe dieſe Benennung der parallel vor, weil parallel urſprünglich von geraden Linien gebraucht wird, die in einer Ebene ſind und keinen Punct gemein haben; die ſind freylich auch gleichlaufend, es giebt aber krumme Linien in einer Ebene, die keinen Punct gemein haben, und doch weder parallelae noch aequidiſtantes heiſſen, z. E. eine Hyperbel und eine Parabel über einer Axe da die Hyperbel ganz auſer der Parabel liegt.

II) Von G falle auf die Axe CO ein Perpendikel $= u$; Es ſchneide auf AO von C an ein Stück $= t$ ab; ſo ſind t, u; Coordinaten der gleichlaufenden Linie.

III)

III) Aus CM, ſind durch x; y; und die Gleichung für die krumme Linie gegeben, $AO = x + \frac{y.\ dy}{dx}$; $MO = \frac{y.\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$.

IV) Nun iſt $MO : MP = GO : u$; alſo $u = \frac{y.(MO - c)}{MO}$; Ferner $AO - t : u = PO : y$ daher $AO.\ y - t.\ y = PO.\ u$ folglich $AO - t = \frac{MO - c}{MO}.\ PO$. So hat man, t, u, für jeden Punct der gegebenen krummen Linie.

V) In den beyden Gleichungen die u, und $AO - t$ geben, drücke man AO, MO, durch die Differentiale aus, und ſchaffe dann die Differentiale vermittelſt der Gleichung für CM weg, ſo hat man zwo Gleichungen in deren jeder x; y; t; u; ſind. Aus dieſen ſchaffe man x, y, weg, ſo bekömmt man eine Gleichung zwiſchen t, u, für die gleichlaufende Linie.

VI) Eine praktiſche Anwendung. Es ſoll eine Wand aufgeführt werden, deren äuſere Fläche eine krumme Verticalfläche über der Linie CM iſt. Die Wand ſoll durchaus die Dicke $= g$ haben, ſo ſteht ihre innere Fläche vertical über der gleichlaufenden Linie durch G.

Iſt CM ein Kreisbogen, ſo iſt die gleichlaufende ein concentriſcher deſſen Halbmeſſer um g kleiner iſt; der gemeinſte Fall bey runden Thürmen.

men. Aber wenn CM eine andere krumme Linie iſt, muß man die gleichlaufende auf eine der erwähnten Arten ſuchen.

So kam dieſes Herrn Woltmann Director des Waſſerbaues bey Cuxhaven und Ritzebüttel vor, er veranlaſſte mich zur Unterſuchung und fand die Verzeichnung der gleichlaufenden durch Puncte (IV) zur Ausübung im Groſſen am bequemſten. Reinhard Woltmann, Beyträge zur hydrauliſchen Architectur II. Band, Gött. 1792; 24. u. f. §. Die Gleichung (V) ſteigt oft ſo hoch, daß es zu mühſam iſt, aus ihr u für ein angenommenes t oder umgekehrt zu berechnen.

VII) Hat man CM vorgezeichnet, ſo darf man nur in der jedesmahligen Normale MG = g nehmen. Aber auch CM wird man z. E. für einen Bau im Groſſen durch Puncte verzeichnen. (An. endl. Gr. 418; VII. VIII.).

VIII) Für einen Triebſtock der ein Punct wäre, ſollte der Zahn des Rades eine Epikycloide ſeyn. Das hat de la Hire gewieſen (meine Anfgr. d. Statik 76.) aber die Geſtalt ſehr undeutlich und unbequem angegeben die der Zahn haben ſoll wenn der Triebſtock wie gewöhnlich ein Cylinder iſt. Sie iſt der Epikykloide gleichlaufend, ich gebe ihre Verzeichnung in Commentat. Soc. R. Sc. Gott. T. V. ad 1782.

IX) Wird die krumme Linie CM durch Abwickelung einer andern beſchrieben (unten 563.)

ſo

ſo nehme man auf dem Faden ein Stück GM = c; Da beſchreibt M, die CM und G die gleichlaufende.

Läſſt man eine Kreisſcheibe deren Durchmeſſer = g an der CM rollen, ſo beſchreibt der jedesmahlige äuſerſte Punct der Scheibe, die gleichlaufende.

Dieſe beyden Verfahren ſchlägt Leibniz vor curuas parallelas, wie er ſie nennt zu beſchreiben. Act. Er. Lipſ. 1695; p. 93; Der Aufſatz ſteht auch in Ioann. Bern. Operib. T. I. n. 29. p. 253. Begreiflich dient keines zur Ausübung im Groſſen.

X) Man beſchreibe um einen Mittelpunct, ein Paar ähnliche Ellipſen, deren groſſe Axen auf einer und derſelben geraden Linie liegen. Ihre Tangenten an ähnlich liegenden Puncten ſind parallel aber jedes Paar ſolcher Tangenten hat einen andern Abſtand. So was könnte man doch auch gleichlaufende krumme Linien nennen wo die Entfernung zuſammengehöriger Puncte veränderlich wäre.

XI) Ausgeführt findet ſich dieſe Unterſuchung in meiner Abh. de curuis aequidiſtantibus, Commentat. Soc. ſc. Gott. T. XI. ad 1791 et 92.

XII) CM ſey eine Parabel, deren Scheitel C, Parameter = b; CP = x; PM = y = $\surd$ (b. x). Man nehme CA = h; und beſchreibe eine gleiche äuſere Parabel deren Scheitel C;

Ab-

Abſciſſe CP = h + x, Ordinate dem Puncte P zugehörig = z = $\surd$ (b. (h + x)). Nimmt man von A eine Abſciſſe = x ſo gehört ſolcher in der äuſern Parabel eine Ordinate = y, die ſteht von der Ordinate PM, nach A zu um h ab, und eine gerade Linie durch ihr Ende und M, iſt der gemeinſchaftlichen Axe beyder Parabeln parallel und = h. Es giebt alſo in beyden Parabeln, Paare zuſammengehöriger Puncte, jedes Paar in einer Parallele mit der gemeinſchaftlichen Axe, welche immer den Abſtand = h haben. In dieſer Bedeutung könnten die beyden Parabeln einander gleichlaufend heiſſen, eigentlich ſind beyde freylich eine und dieſelbe Parabel, längſt der Axe verſchoben.

XIII. Ferner iſt $z^2 - y^2 = b.h$, alſo $z - y = \frac{b.h}{z + y}$. Nun gehören einem Puncte P, der weiter von C alſo auch von A liegt, ein gröſſeres z, und ein gröſſeres y, folglich ein kleineres z — y. Auch kann z + y ins Unendliche wachſen, ſo wird z — y kleiner als jede angebliche Gröſſe.

Bey innerer und äuſerer Parabel findet ſich ſo was wie bey Hyperbel und Aſymptote (An. endl. Gr. 408.). Man kann alſo auch ſagen: die äuſere Parabel ſey der innern Aſymptote, oder: eine Parabel längſt der Axe verſchoben ſey ihre eigne Aſymptote.

XIV. Dieſes nur als einfache Exempel von mancherley Bedeutung, gleichlaufender krummen Linien (X; XII) und krummlinichter Aſymptoten (XIII.)

96. Mm, mn; 5. Fig. ſind zweene nach einander folgende gleiche Bogen eines Kreiſes um den Mittelpunct O; Sie mögen anfangs beyde endlich ſeyn. MS ſey die Tangente bey M. Der Winkel MOm = mOn heiſſe u; die Sehne Mm ſey in W verlängert, und mn die andere Sehne; So iſt OMS = R; OMm = OmM = Omn = R — $\frac{1}{2}$u (G. 13. S. 5. Z.) folglich Wmn = WmO — Omn = mMO + u — mMO = u. Iſt OmS = R ſo ſchneiden beyde Tangenten einander unter dem Winkel VSm = u. Nähern ſich nun (wie in 63) die Puncte M, n, dem m, und ſo die Sehnen Mm; mn; ihren Bogen unendlich, daß ſich die Sehnen in Elemente des Kreiſes verwandeln (G. 41. S. 2. Z.) ſo wird der Winkel u unendlich klein, und der Satz wird ſo ausgedrückt: Wenn der Kreis in gleiche Elemente eingetheilet wird, ſo macht die Verlängerung jedes Elementes mit dem folgenden einen Winkel, welcher ſo groß iſt als der Winkel, der jedem Elemente am Mittelpuncte zugehört. Der Winkel eines Elements aber mit dem Halbmeſſer iſt von einem rechten, um die Hälfte des nur genannten Winkels unterſchieden. Wenn man die unendlich kleinen Verän-

derun-

derungen, zu- oder abnehmender Winkel ſucht, ſo muß man $OMm = R - \frac{1}{2} u$ annehmen; Sonſt aber kann $OMm = R$ geſetzt werden, von dem es unendlich wenig unterſchieden iſt.

97. Aufg. Eine Tangente der Muſchellinie Alg. 479. zu ziehen.

Aufl. I. In der dortigen Gleichung $(b + x) \sqrt{(aa - xx)} = yx$ ſetze man $aa - xx = zz$ alſo $-\frac{xdx}{z} = dz$; ferner iſt $(b + x) z = yx$ alſo $dz = \frac{(y - z) dx + xdy}{b + x}$ beyde Werthe von dz einander gleich geſetzt, geben nach gehöriger Rechnung $dx : dy = x : z - y - \frac{bx}{z} - \frac{x^2}{z}$.

II. Wenn man nun Alg. III. T. 21. Fig. die Abſciſſen auf EF nimmt, ſo heiſſen ſie y; und die Ordinaten x; Heiſſt alſo die Subtangente die Entfernung zwiſchen den beyden Puncten, R, und dem wo die Tangente der Abſciſſenlinie begegnet, ſo verhält ſich $dx : dy = x :$ Subtangente, ſie iſt alſo $= z - y - \frac{x.(b + x)}{z}$.

III. Aber $z - y = \frac{x.y}{b + x} - y = \frac{-b.y}{b + x}$ und $\frac{x.(b + x)}{z} = \frac{(b + x)^2}{y}$; Alſo iſt die Subtan-

STAATSBIBLIOTHEK BAMBERG

gente $= - \frac{b.y}{b+x} - \frac{(b+x)^2}{y} = -$
$\frac{b.\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} - \frac{(b+x).x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -$
$\frac{(a^2.b+x^3)}{x.\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

IV. Ueber der Aſymptote BF; nimmt die Ordinate MR $= x$ beſtándig ab, indem die Abſciſſe ER $= y$, zunimmt, alſo liegen Subtangente und Anfang der Abſciſſen auf entgegengeſetzte Seiten der Ordinate, (83) Eben ſo verhält es ſich meiſt unter der Aſymptote einige Stellen des Knotens ausgenommen.

V. Für $x = o$ oder $= a$; wird die Subtangente unendlich, die Tangente iſt in jenem Falle die Aſymptote, in dieſem der Aſymptote parallel.

VI. Für den Punct C; iſt $x = - b$ und die Subtangente $= \frac{-(a^2.b - b^3)}{-b.\sqrt{(a^2-b^2)}} = -$
$\sqrt{(a^2-b^2)}$. Dem Puncte C gehórt die Abſciſſe $y = o$; Man nehme alſo $\sqrt{(a^2-b^2)}$ auf der Aſymptote, auf beyden Seiten von E, weil jede Quadratwurzel bejaht oder verneint kann genommen werden, das ſind die Subtangenten für den Punct C; jede für einen der Schenkel welche durch C gehn.

VII. Die Subtangente in (III) $= 0$ geſetzt giebt $x = -\sqrt[3]{-a^2 b}$, das hat nur einen möglichen Werth, und den verneint. Begreiflich iſt dieſes x, eine Ordinate für die beyden Puncte des Knotens, an deren jedem die Tangente ſenkrecht auf der Aſymptote ſteht.

VIII. Setzt man $a = b$, ſo kömmt der Anal. endl. Gr. III. Tafel 23. Fig. Da iſt hie in (VI) die Subtangente $= 0$; Nähmlich die beyden Schenkel λC, μC; berühren EC.

98. Aufg. Wenn F; G; 6 Fig. Brennpuncte einer Ellipſe ſind, in der ſich M befindet, die Verhältniß zwiſchen den Winkeln zu finden, welche die Linien FM; GM; mit der Tangente an M machen.

I. Aufl. MN ſey anfangs eine endliche Sehne $= h$. Man nenne $FM = z$; $MG = a - z$; wo a die groſſe Axe iſt. Ferner ſey $FN = z + g$; ſo iſt $NG = a - z - g$; die Winkel heiſſen $MFN = \varphi$; $MGN = \gamma$.

II. Man nehme $FQ = FM$; $GS = GM$; ſo ſind $NQ = NS = g$; Man ziehe die geraden Linien, $MQ = z. 2. \sin \frac{1}{2} \varphi$; $MS = (a-z). 2. \sin \frac{1}{2} \gamma$; So hat man auf beyden Seiten der Linie MN, Dreyecke, MNQ, MNS, denen MN gemein iſt, $NQ = NS = g$; $MQ =$

$z. 2. \sin \frac{1}{2} \varphi$; $MS = (a - z). 2. \sin \frac{1}{2} \gamma$, auch $MQN = 90^0 + \frac{1}{2} \varphi$; $MSN = 90^0 - \frac{1}{2} \gamma$.

III. Im Dreyecke MQN iſt $\cos MQN = \frac{MQ^2 + QN^2 - MN^2}{2. MQ. QN}$

das iſt

$$- \sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{4. z^2. (\sin \frac{1}{2} \varphi)^2 + g^2 - h^2}{4. z. \sin \frac{1}{2} \varphi. g}$$

Daraus: $\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}. \sqrt{\frac{h^2 - g^2}{z. (z-g)}}$.

IV. Im Dreyecke MSN iſt

$$\cos MSN = \frac{MS^2 + SN^2 - MN^2}{2. MS. SN}$$

oder

$$+ \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{4. (a-z)^2. (\sin \frac{1}{2} \gamma)^2 + g^2 - h^2}{4 (a - z). \sin \frac{1}{2} \gamma. g}$$

Daraus

$$\sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2}. \sqrt{\frac{h^2 - g^2}{(a - z). (a - z - g)}}.$$

V. MN ſey linker Hand nach T verlängert, rechter Hand nach V; Ich ſuche die Winkel TMF, GMV.

VI. $MN : MQ = \sin MQN : \sin MNF$

$$h : 2. z. \sin \frac{1}{2} \varphi = \cos \frac{1}{2} \varphi : \frac{z. \sin \varphi}{h}$$

Alſo

Alſo aus (III) ſin MNF =

$$\sqrt{\left(\frac{z.(h^2-g^2)}{h^2.(z-g)}\right)}.\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}.\left(\frac{h^2-g^2}{z.(z-g)}\right)^2\right)}.$$

VII. TMF = φ + MNF.

VIII. MN : NS = ſin MSG : ſin SMN

$$h : g = \text{coſ}\ \tfrac{1}{2}\gamma : \frac{g.\ \text{coſ}\ \frac{1}{2}\gamma}{h}$$

IX. GMV = 90° — $\frac{1}{2}\gamma$ — SMN.

X. Aus VII; IX; hat man die beyden Winkel FMT, GMV allgemein vermittelſt Sinuſſe die durch a, z, g, h, gegeben ſind.

XI. Wenn FC = CG = e; und für den Punct M, die Ordinate = y; die Abſciſſe aus dem Mittelpuncte C gerechnet = u; ſo iſt (An. endl. Gr. 368) $y^2 = (a^2 - 4.\ e^2).\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right)$ und wenn für N, die Abſciſſe u* heiſſt, die Ordinate y* hat man auch ſo die Gleichung zwiſchen ihnen, und aus beyden Gleichungen findet man durch dieſe Coordinaten, z, g, h;

XII. Wenn das Dreyeck FMG ungeändert bleibt, kann ſich die Linie TMV um M drehen, daß N ein Punct der Ellipſe näher bey M iſt, da nehmen die Winkel MFN, MGN, ab, und können ſo klein werden als man will, auch ſo nehmen h, g, ab, und ihre Verhältniß ändert ſich. Wenn nun dieſes Abnehmen bis zum

Unendlich klein werden fortgeht, wird TV eine Linie welche die Ellipſe in M berührt.

XIII. Wenn ſolchergeſtalt, φ, γ, immer abnehmen, kömmt in VII; TMF ſo nah als man will an MNF, und in IX; GMV ſo nah als man will an 90° — SMN.

XIV. Alsdann wird (VI) ſin MNF = $\frac{\sqrt{(h^2 - g^2)}}{h}$ und (VIII) coſ SMN bekömmt eben den Werth. Die Winkel MNF, GMV, bekommen gleiche Sinus, zwiſchen ihnen liegt FMG; Sie betragen alſo zuſammen nicht zweene rechte, und ſind folglich gleich.

XV. Meine Abſicht war hie zu zeigen wie man auf dieſe Gleichheit durch Betrachtung einer endlichen Sehne kömmt. Der Winkel Sinus ſelbſt fände man aus dem Werthe von $\frac{g}{h}$ wenn beyde Linien verſchwinden, und der lieſſe ſich aus (XI) herleiten. Freylich aber findet ſich alles kürzer durch Differentialrechnung, wenn man nach (85.) die Lage der Tangente ſucht, und daraus ihre Winkel mit Linien aus den Brennpuncten an den Berührungspuncte.

99. I. So iſt nach den Geſetzen der Reflexion, MG oder MF zurückgeworfner Strahl, nach dem FM oder GM einfallender iſt. Wenn man

man einen Spiegel hat deſſen Fläche durch Umdrehung einer Ellipſe um ihre Axe beſchrieben wird, und in F ein Licht ſetzt, ſo reflectirt der Spiegel alle Strahlen deſſelben nach G. Das hat den Nahmen der Brennpuncte veranlaſſt.

II. Man ſtelle ſich die ganze Ellipſe vor wie die in An. endl. Gr. II. T. 12. Fig. und ſetze in F ein Licht. Der Strahl FM, wird nach Mf zurückgeworfen, geht durch f fort und trifft wiederum an der Ellipſe unterſte Hälfte, die ſendet ihn nach F zurück, und er geht durch F an die obere Hälfte von der er wiederum nach f geſandt wird, und ſo wird er unzähliche mahl reflectirt, geht allemahl durch einen der beyden Brennpuncte.

III. Dieſe Eigenſchaft: Einen Strahl nach zwo Zurückwerfungen wiederum in denſelben Punct zu bringen könnte wohl mehr krummen Linien auſer der Ellipſe zukommen. Euler legte ſie in den leipziger Actis Eruditorum 1745 vor. Sie ward in dieſer periodiſchen Schrift von drey Leipzigern aufgelöſt, Oechliz, Bärmann, und mir. Meine Aufloſung ſteht im Octob. 1746; die Analyſis derſelben im Nov. 1747. Euler hat ſeine eigne Analyſis daſelbſt 1748 bekannt gemacht. Eine geometriſche Auflöſung giebt Klingenſtjerna Abh. d. K. Schwed. Ak. d. W. 1749; 296. S. meiner Ueberſetzung.

IV. Wenn in An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. ein Strahl FM auf die Hyperbel aus dem Brennpunct F fällt, ſo wird er reflectirt, daß ſein Theil der Licht iſt, von M innerhalb der Höhlung der Hyperbel fortgeht, als wenn er von f ausginge. Dieſer blos geometriſche Theil des Strahles, fM, geht allemahl aus f. Man kann dieſes aus An. endl. Gr. 406; herleiten.

V. Bey der Parabel rückt der zweyte Brennpunct, hie 6. Fig. G, ins Unendliche, (An. endl. Gr. 384.) daß MG der Axe parallel wird (Geom. 12. S. 12. Zuſ.). Umgekehrt alſo, Strahlen die der Axe parallel einfallen, werden von ihr im Brennpuncte vereinigt, daher man ſie zu Brennſpiegeln gebraucht, auch wohl Brennlinie genannt hat.

100. Anm. Es ſey Alg. I. T. 11. Fig. AQ eine beſtändige Gröſſe $= e$, und MH der Axe parallel alſo $=$ PQ; man nenne dieſes PQ $= z$; ſo iſt, wenn der Parameter $= b$ heiſſt, aus Alg. 360; $FM = \frac{1}{4} b + x$; das iſt $= \frac{1}{4} b + e - z$ oder $\frac{1}{4} b + e = FM + z = FM + MH$.

Iſt $AP > AQ$; ſo wird z verneint, und wenn alſo MH linker Hand der Ordinate geht, iſt $FM - MH = \frac{1}{4} b + e$.

So iſt $e = 0$ für AG, und $FM - MG = \frac{1}{4} b$.

101. Anm. I. Für die Ellipſe hier 6 Fig. ſey FG

$$= \sqrt{(a^2 - ba)} \text{ (Alg. 376.) } = a - \tfrac{1}{4} b - \frac{bb}{8a} \ldots (46)$$

wo die folgenden Glieder immer höhere und höhere Poten-

Potenzen von a in den Diviſoren haben werden. Nun ſey A der Scheitel der Ellipſe, und KH ein Kreisbogen um G mit einem willkührlichen Halbmeſſer beſchrieben. So iſt AF $= \frac{a - \sqrt{(aa - ab)}}{2}$. (Alg. 376.) alſo AG $= \frac{a + \sqrt{(aa - ab)}}{2}$ oder AK + KG $= a - \frac{1}{4} b - \frac{bb}{16a} \ldots$ Ferner FM + MH + HG $= a$; (Alg. 378.) folglich gleiches von gleichem abgezogen FM + MH — AK $= \frac{1}{4} b + \frac{bb}{16a} \ldots$ Hier verſchwinden nun alle Glieder, welche a im Diviſor haben, wenn a unendlich wird, (5) oder G unendlich weit hinaus rückt, alſo kömmt FM + MH $= \frac{1}{4}$ b + AK zugleich aber wird KH eine gerade auf die Axe ſenkrechte Linie (G. 20. S. 2. Z.) und MH der Axe parallel; daß alſo dieſes Verfahren aus dem, was von der Ellipſe erwieſen worden, die Eigenſchaft der Parabel (200) als einen beſondern Fall einer Ellipſe, deren Axe unendlich wird, herleitet; woraus noch deutlicher erhellt, wie die Parabel in 99 unter der Ellipſe 98 enthalten iſt.

II. Man kann ſuchen, was für Ellipſen, Scheitel A und Brennpunct F, (6 Fig.) gemein haben.

Aus An. endl. Gr. (376) iſt AF $= \frac{a - \sqrt{(a^2 - a.b)}}{2}$;

Man nenne dieſe Gröſſe $= k$; alſo $a - \sqrt{(a^2 - a.b)} = 2k$; ſo findet ſich $a.b = 4.a.k - 4.k^2$ wo man Parameter oder Axe als gegeben annehmen kann.

Nimmt man den Parameter als gegeben an, ſo iſt $\frac{4.k^2}{4.k - b} = a$,

Alſo

Alſo wenn AF zuerſt gegeben iſt, und man dazu einen Parameter b, nimmt, nach Gefallen, nur kleiner als 4k; ſo geben ſich alle Ellipſen, die A zum Scheitel, F zum Brennpuncte haben.

Wächſt b, und kömmt immer näher an 4.k, ſo wächſt a, und ins Unendliche, wenn man b ſo nah man will an 4k bringt. So verwandelt ſich die Ellipſe in die Parabel die Scheitel A, Brennpunct F hat.

Für k gröſſer als 4b, wird a verneint, alſo kommen Hyperbeln.

Es iſt $FG^2 = a^2 - a.b = a.(a-b)$ aber $a-b = \frac{4.k^2}{4k-b} - b = \frac{(2.k-b)^2}{4k-b}$, daher $FG = \frac{2.k.(2.k-b)}{4.k-b}$ $= k - \frac{k.b}{4.k-b}$

102. Aufg. An einen gegebenen Punct P 7 Fig. der Cycloide FPA (Alg. 597.) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. I. Man ziehe PLM mit AE parallel, und an L eine Tangente des Kreiſes LV; der die geſuchte Tangente PV in V begegnet. Man nehme p unendlich nahe bey P und ziehe plm; auch Ps mit des Kreiſes Elemente Ll parallel. Weil PV; LV; die Verlängerungen von pP; lL, ſind, (68) ſo ſind Ps; LV parallel, alſo die Dreyecke pSP; PLV; ähnlich und pS : SP = PL : LV. Es iſt aber pS = pl — PL = dy und PS = Ll — dx (Alg. 609.) folg-

folglich $LV = \frac{y\,dx}{dy}$. Weil nun bey der Radlinie $dy = dx$ (Alg. a. a. O.) ſo iſt $LV = y$. Man nehme alſo auf der Tangente des Kreiſes an L; $LV = LP$, ſo iſt PV die Tangente der Radlinie.

II. Der Bogen FL meſſe am Mittelpunct ſeines Kreiſes einen Winkel $= \zeta$. So iſt r und die ihm gleiche gerade Linie $LP = r . \zeta = x = y$.

III. Die Tangente an L macht da den Winkel $VLM = \zeta$. Da nun bey der Cycloide $LV = LP$ ſo ſind die Winkel $LPV = LVP = \frac{1}{2}\zeta$. So hat man den Winkel LVP, den die Tangente der Cykloide mit einer geraden Linie macht welche durch den Berührungspunct P, mit der Grundlinie AE parallel geht.

Indem der Punct L im Kreiſe von F bis an E hinabrückt, rückt der Punct P in der Cycloide von F bis A hinab, und der Winkel ihrer Tangente mit genannter Parallele wächſt von 0 bis an 90 Grad.

Aufwärtsrücken und Abnehmen des Winkels folgt wenn der Punct L in ſeinem Kreiſe von E bis F aufwärts rückt.

103. Wenn FLE was man will für eine algebraiſche krumme Linie iſt, und die krumme

Linie

Linie FPA ſo beſtimmt wird, daß LP eine Function des Bogens FL iſt, ſo kann man allezeit die Verhältniß $dx : dy$ und folglich LV finden, und der Linie FPA Tangente ziehen. Es ſey z. E. $FL^2 = a . PL$ ſo iſt $2xdx = ady$ und $LV = ay : 2x$.

Tangenten an Linien zu ziehen, wo die Ordinaten aus einem Puncte gehen.

104. Aufg. In dem Kreiſe AP 8. Fig. um den Mittelpunct C iſt die Lage des Halbmeſſers $CA = r$ gegeben, von welchem der veränderliche Bogen $AP = x$ gerechnet wird. Nun iſt MN ein Bogen einer krummen Linie, deſſen Punct M ſich im Halbmeſſer CP befindet: auch iſt $CM = y$; und eine Gleichung zwiſchen AP und CM gegeben, daß man alſo hier die Bogen AP für die Abſciſſen, und die Linien aus einem Puncte, CM für die Ordinaten annimmt. Man ſucht an M eine Tangente der Linie MN zu ziehen.

Aufl. Auf PC kann man in C ein Perpendikel ſetzen. Dieſes begegne der geſuchten Tangente in T; Man nehme des Bogens AP Element Pp und ziehe Cmp; imgleichen den Bogen MS mit dem Halbmeſſer CM; ſo iſt mM ein Element der krummen Linie; MS eines Kreisbogens,

bogens, der CM zum Halbmeſſer hat, auch mS = dy; und CP : Pp = CM : MS (G. 44. S. 11. Z.) alſo MS = ydx : r und auf Cp und CP ſenkrecht (96). Ferner m M T eine gerade Linie (68) und mS : SM = mC : CT. Weil aber m unendlich nahe bey M iſt, ſo iſt die Verhältniß mC : CT der MC : CT unendlich nahe, oder die letzte kann ſtatt jener angenommen werden, alſo iſt $CT = \frac{yydx}{rdy}$.

105. CT und CA liegen auf einerley oder auf verſchiedenen Seiten von CP, nachdem CMm gröſſer oder kleiner als der rechte Winkel CMS (96) iſt, d. i. nachdem Cm gröſſer oder kleiner als CM iſt, d. i. nachdem dx und dy einerley oder verſchiedene Zeichen haben, (23) d. i. nachdem CT bejaht oder verneint iſt. Dieſes zeigt, ob man in dem Perpendikel, das auf CP geſetzt wird, den Punct T nach eben der Seite von CP zu nehmen ſoll, nach welcher A liegt, oder ob man ihn auf die andere Seite zu nehmen ſoll; Eine Erinnerung, die der (83) ähnlich iſt,

106. Exempel. Für die archimediſche Spirallinie (Alg. 580.) iſt pdy = rdx und $CT = \frac{pyy}{rr} = \frac{xy}{r}$. Man muß alſo hier den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln können, wenn man

man die Tangente ziehen will. Und umgekehrt, wenn man eine Methode hätte, an jeden Punct der Spirallinie eine Tangente zu ziehen, ſo könnte man jedesmahl das zugehörige CT finden, und ſolchergeſtalt den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln. Die Tangente der Spirallinie hängt alſo mit der unbeſtimmten Quadratur des Kreiſes (Alg. 621.) zuſammen.

107. **Exempel.** Es ſey $PM^2 = a . AP$; oder man ſtelle ſich vor, die Axe einer Parabel werde in den Bogen eines Kreiſes gebeugt, ſo daß ihr Scheitel in A iſt. Weil die Ordinaten mit der Axe rechte Winkel machen, ſo gehen ſie bey dieſer Krümmung alle nach C zu, (95) und die Linie MN heiſſt die paraboliſche Spirallinie. Alſo iſt $(r-y)^2 = ax$ und $\frac{2.(y-r)}{a} = \frac{dx}{dy}$. Dieſer Quotient iſt verneint, weil MP und AP zugleich wachſen, folglich CM abnimmt, wenn AP wächſt. Auch wird $CT = \frac{2.(y-r).yy}{ar}$ verneint (105). Dieſe krumme Linie hat Jac. Bernoulli im erſten Specimine calculi differentialis (90) betrachtet.

Von

Von den Aſymptoten.

108. Lehrſ. Eine Aſymprote (Alg. 408.) kann als eine Tangente an einem unendlich entfernten Puncte angeſehen werden.

Bew. Wenn eine gerade Linie einen Punct mit einem Schenkel einer krummen Linie gemein hat, übrigens aber der Schenkel um dieſen Punct herum auf einer Seite der geraden Linie liegt, ſo iſt ſie des Schenkels Tangente (Alg. 449.) der Bogen der krummen Linie, welcher der Aſymptote zugehört, ſchneidet ſie nicht, und liegt alſo ganz auf einer Seite von ihr; ſeine Puncte nähern ſich ihr unendlich, oder man kann einen unendlich entfernten Punct in ihm anſehen, als wäre er in der Aſymptote; folglich iſt die Aſymptote ſeine Tangente an dieſem Puncte.

109. Sie kann aber den Schenkel, in welchem ſich dieſer Bogen befindet, ſchneiden. (Alg. 451.)

110. Jeder Bogen einer krummen Linie iſt gegen ſeine Tangente erhoben, (69) alſo auch hier der Bogen gegen die Aſymptote.

111. Schneidet ſie aber den Schenkel, (109) oder iſt ſonſt irgendwo hohl gegen ſie, wie bey der Muſchellinie Alg. 477. 478. der obere Theil zunächſt um den Punct A Alg. III. T. 22. 23. F. ſo giebt es eine Stelle, wo der Bogen nach der

Gegend, nach welcher er vorhin hohl war, erhoben wird.

112. Erkl. Eine ſolche Stelle heiſſt ein **Wendungspunct** (punctum flexus contrarii).

113. Aufg. **Die Aſymptoten einer krummen Linie zu finden.**

Aufl. Die Aſymptote berührt die krumme Linie in einem unendlich entfernten Puncte (108). Es muß alſo von den beyden Coordinaten, welche dieſem Puncte zugehören, eine unendlich werden können; die andere kann vielleicht endlich bleiben, oder gar unendlich klein werden wie bey der Muſchellinie (Alg. 478.) die, welche unendlich werden kann, nehme man für die Abſciſſe an. Können beyde unendlich werden, ſo iſt es gleichgültig, welche man wählen will. Wenn nähmlich AD 1. F. mit PM parallel geht, ſo könnte man eine Parallele mit AP durch M bis an AD ziehen, und das Stück, AF, das ſie von A aus abſchnitte, und das = MP wäre, Abſciſſe, die Parallele ſelbſt aber AP = FM Ordinate nennen.

Nun muß die Aſymptote die angenommene Abſciſſenlinie entweder in einem gegebenen Puncte ſchneiden oder ihr parallel ſeyn.

TM 1. Fig. ſey eine Aſymptote für den erſten Fall; welche von AD, die den Ordinaten parallel iſt, in K geſchnitten werde. So iſt der

Punct

Punct M unendlich von A entfernt, weil AT endlich iſt. Dieſes AT = TP — AP; iſt alſo der Unterſchied zwiſchen einer unendlichen Subtangente und Abſciſſe. Weil aber unendliche Gröſſen, die um was endliches unterſchieden ſind, als gleich angeſehen werden, (10) ſo würde man nichts finden, wenn man beyde gleich anfangs unendlich ſetzte, und alsdenn von einander abziehen wollte. Daher iſt folgendes Verfahren nöthig. Für ein unbeſtimmtes endliches x, ſuche man $AT = \frac{ydx}{dy} - x$ (77) und $\frac{PM. AT}{TP}$ oder $AK = y - \frac{xdy}{dx}$ ſo daß man den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ durch endliche Gröſſen ausdruckt.

In den gefundenen Ausdrückungen nun ſetze man x unendlich, ſo giebt ſich die Weite AT vom Anfange der Abſciſſen, in welcher die Abſciſſenlinie von der Aſymptote geſchnitten wird, und der Winkel T unter welchem ſolches geſchieht, aus der Verhältniß AT : AK, weil der Ordinatenwinkel A, gegeben iſt.

Wenn dieſes Verfahren für AT einen unendlichen Werth giebt, ſo iſt die Aſymptote der Abſciſſenlinie parallel, und AK ihre Entfernung davon. (Alg. 348.)

114. Exempel. Für die Hyperbel iſt (85) AT = ax : (a + 2x) und AK = y − $\frac{bx.(a+2x)}{2ay} = \frac{bx}{2y}$ In dieſen Ausdrückungen nun muß man x unendlich ſetzen. Alsdenn wird AT = $\frac{1}{2}$ a (10) und die Verhältniß x : y oder x : √ $(bx + \frac{bxx}{a}) = x : \sqrt{\frac{bxx}{a}}$ (12) = √a : √b;

Alſo wird AK = $\frac{\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}$ c (Alg. 399). Alſo iſt T der Hyperbel Mittelpunct, TA die halbe große, und AK die halbe kleine Axe; alles wie Alg. 408.

Weil AK als eine Quadratwurzel zweene entgegengeſetzte ſonſt gleiche Werthe hat; ſo giebt es auch einen Punct K unter der Axe, durch welchen ebenfalls eine Aſymptote geht. Dieſe zweyte Aſymptote geht ebenfalls durch den Mittelpunct. Man findet ſie nähmlich, wenn man − x unendlich ſetzt: da iſt AT = − a.x : (a−2x) noch = $\frac{1}{2}$ a.

115. Ex. I. Es ſey 9 F. $AP^2.(PM-AE) = a^3$; alſo, wenn AE = c; AP = x; PM = y; $xx.(y-c) = a^3$ oder $y = \frac{a^3}{xx} + c$;

II. Weil man a und c bejaht nimmt, iſt y immer bejaht, und die krumme Linie ganz über der Abſciſſenlinie AP.

III.

III. Einer verneinten Abſciſſe ſo groß als AP, gehört eine verneinte Ordinate ſo groß als PM. Iſt alſo AS ein Perpendikel auf die Abſciſſenlinie, ſo liegen auf beyden Seiten deſſelben, ähnliche Hälften der krummen Linie.

IV. Wenn die Abſciſſe wächſt nimmt die Ordinate ab, und kömmt dem Werthe c ſo nah als man will, wenn die Abſciſſe ſo groß wird als man will. Auf dem Perpendikel (III) ſey AE = c, und durch C mit der Abſciſſenlinie, eine Parallele vEV, das iſt eine Aſymptote, an welcher ſich die krumme Linie nach EV, und Ev, hinzieht.

V. Wenn x abnimmt, wächſt y und das ins Unendliche, wenn x ins Unendliche abnimmt, das Perpendikel (III) iſt alſo auch eine Aſymptote, an deren beyden Seiten ſich die krumme Linie nach MF, mf, ins Unendliche hinaufzieht.

VI. Die krumme Linie iſt eine Hyperbel vom dritten Grade, kann von einer geraden Linie dreymahl geſchnitten werden. Nennt man EQ oder $y - c = z$, ſo wird die Gleichung kürzer $z = \frac{a^3}{x^2}$. Man ſ. unten (211)

VII. Man bekömmt $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3}{2.a^3}$ Die Tangente an M begegne der Abſciſſenlinie AP in W,

 ſo

ſo iſt die Subtangente $PW = -\frac{1}{2}x - \frac{cx^3}{2.a^3}$,
der verneinte Werth zeigt an P liege zwiſchen ihr und dem Anfange der Abſciſſen. (83) Wenn man alſo $AW = AP + PW$ wiſſen will, nimmt man dieſen Werth bejaht, und da kömmt AW

$$= \frac{3}{2}x + \frac{ex^3}{2.a^3}.$$

Das wird unendlich oder o, für Abſciſſe unendlich oder o, wegen der beyden Aſymptoten. (IV; V;)

VIII. Die Tangente an M; begegnet der Aſymptote ES in t; und es iſt $WP:PM = WA:At$ giebt $At = \frac{3.a^3}{x^2} + c$

Das wird $= c$ oder unendlich, nachdem x unendlich oder $= 0$ wird.

116. Anm. Wenn krumme Linien Aſymptoten haben, ſo werden die Gleichungen am einfachſten, wenn man die Coordinaten auf den Aſymptoten nimmt. Die Gleichungen für die Hyperbel Alg. 389; 412; ſind ein Beyſpiel davon. Und für gegenwärtige Hyperbel würde die Gleichung mehr zuſammengeſetzt werden, wenn man eine andere Abſciſſenlinie für ſie nähme.

117. Anm. Für $x = \infty$ iſt (115) $z = \frac{a^3}{\infty^2}$
ein Unendlich kleines der zweyten Ordnung (11) und daher bleibt für dieſen Fall xxz noch der endlichen

Gröſſe

Gröſſe a^3 gleich, obgleich von den drey Factoren dieſes Productes zweene unendlich ſind (12).

118. Anm. Wenn y nicht auf eine ſo einfache Art, wie in den gebrauchten Exempeln durch x gegeben iſt, ſo kann man zuweilen nicht ſogleich überſehen, ob Producte in denen ſich beyde Coordinaten befinden, endlich oder unendlich ſind, weil, wenn die eine unendlich wird, die andere ein Unendlich großes oder kleines von verſchiedener Ordnung werden kann (11), da denn die Sache nach (12) zu beurtheilen wäre. Dieſes macht alſo Schwürigkeit die Werthe von AT und AK für die unendliche Abſciſſe zu finden, weil darinnen dergleichen Producte vorkommen können. Wer die Ordinate durch die Abſciſſe nach dem Newtoniſchen Parallelogramm (Alg. 632.) ſuchen will, kann ſich hier allemahl helfen. Denn wenn die Abſciſſe unendlich werden ſoll, ſo muß er die Ordinate durch eine fallende Reihe ſuchen (Alg. 665. V) deren erſtes Glied alsdenn den Werth von y für das unendliche x giebt. So fände man im Exempel, Alg. 665. $y = x - \frac{1}{3}a - \frac{aa}{3x} \ldots$ wo für die unendliche Abſciſſe, $y = x$ ein Unendliches von eben der Ordnung iſt.

119. Anm. Aber das Newtoniſche Parallelogramm lehret auch ſowohl dieſe Aſymptoten, als auch krumme Linien, denen ſich eine gegebene krumme Linie ohne Ende nähert, (aſymptotos curuilineas) (95, XIII) unmittelbar finden, wovon mich aber hier die Abhandlung zu weit führen würde, da ich überhaupt von den krummen Linien nicht umſtändlich handeln kann. S. Cramer anal. des lignes courbes ch. VIII.

Von den höhern Differentialen.

120. Aufg. Der krummen Linie KLM 10 Fig. Abſciſſenlinie, iſt in lauter gleiche Theile NO = OP u. ſ. w. von einer willkührlichen Gröſſe = e getheilt. Ihnen ſind Kk; Ll; parallel, alſo Lk; Ml; die Unterſchiede der Ordinaten; Man ſoll eine krumme Linie $\varkappa\lambda\mu$ vorzeichnen, deren Ordinaten ſich für eben die Abſciſſen, wie jener Unterſchiede verhalten, oder wo $O\lambda : P\mu = Lk : Ml$.

Aufl. Man nehme eine willkührliche Länge $= a$ an, und $O\lambda = \frac{a.\,Lk}{e}$; $P\mu = \frac{a.\,Ml}{e}$ u. ſ. w. Weil nähmlich die Ordinaten der Linie KLM für jede Abſciſſe gegeben ſind, ſo findet man auf dieſe Art der Linie $\varkappa\lambda\mu$ Ordinaten für eben die Abſciſſen.

121. Die Reihe der Ordinaten der Linien KLM 10 F. ſtellt die Hauptreihe y Alg. 724. und die Reihe der Ordinaten $\varkappa\lambda\mu$, die Reihe $\Delta 1$; vor. Nennt man $KN = y$; $OL = y1$; $PM = y2$, ſo iſt $O\lambda$ wie $y1 - y = 1\Delta 1$; $P\mu$ wie $y2 - y1 = 2\Delta 1$.

122. Wenn LO ſich KN unendlich nähert, oder NO unendlich abnimmt, ſo muß Lk verſchwinden: Alſo muß Lk einen ſolchen Ausdruck haben, der verſchwindet, wenn e unendlich abnimmt. Alſo muß $Lk = P.\,e$ ſeyn, wo P eine

ſolche

ſolche Function von x; y; u. e; iſt, die, wenn e bis auf nichts abnimmt, für jede Abſciſſe entweder endlich iſt, oder auch verſchwindet, oder wenn ſie unendlich wird, gleichwohl mit e ein verſchwindendes Product giebt, wie nach (12) möglich iſt.

123. So iſt $\frac{Lk}{e} = P$ und wenn P für ein verſchwindendes e ſich in p verwandelt, da denn $\frac{Lk}{e} = \frac{dy}{dx}$ wird, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = p$ welches ordentlich für unbeſtimmte Werthe von y endlich ſeyn wird, aber = o oder unendlich werden kann, nachdem für eine gewiſſe Abſciſſe, der krummen Linie KLM Tangente, der Abſciſſenlinie oder den Ordinaten parallel wird (87).

124. Anm. Den letzten Fall in 122. zu erläutern, dient die krumme Linie Alg. 474. Wenn ihre erſte Ordinate $y = a + \sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ heiſſt, ſo iſt die zweyte, welche von der erſten um die Weite e abſteht, $= a + \sqrt[3]{a.(a-x-e)^2}$. Beyder Unterſchied, hier Lk, zu finden, mache man aus der letztern Cubikwurzel nach (58) eine unendliche Reihe. Man betrachte ſie nähmlich als

$[a.(a-x)^2 - 2a.(a-x)e + ae^2]^{\frac{1}{3}}$ oder als $\sqrt[3]{\left(a.(a-x)^2.(1 - \frac{2e}{a-x} + \frac{e^2}{(a-x)^2}\right)} = \sqrt[3]{a.(a-x)^2}.$

 $\sqrt[3]{}$

$\sqrt[3]{\left(1-\frac{2e}{a-x}+\frac{e^2}{(a-x)^2}\right)}$ wo man für die zweyte Cubikwurzel; in 58; $m=\frac{1}{3}$; $\alpha=-\frac{2}{a-x}$; $\beta=\frac{1}{(a-x)^2}$; $z=e$; ſetzt. Dieſes giebt ſelbige $=1-\frac{2e}{3.(a-x)}$ ... ſo daß die folgenden Glieder alle höhere Potenzen von e enthalten. Wenn man hier nun jedes Glied mit $\sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ multiplicirt, ſo kömmt $\sqrt[3]{a.(a-x-e)^2}=\sqrt[3]{a.(a-x)^2}-\frac{2}{3}.\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}.e+\alpha e^2+\beta e^3$ ... u. ſ. w. wo die griechiſchen Buchſtaben die Coefficienten der höhern Potenzen von e bedeuten, die hier zu berechnen nicht nöthig iſt. Folglich iſt $Lk=e.\left(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}+\alpha e+\beta e^2 ..\right)$ Wo der letzte Factor $=P$ (121) iſt. Wenn man nun hier $\frac{Lk}{e}=P$ ſetzt, ſo wird p oder $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}.\sqrt[3]{\left(\frac{a}{a-x}\right)}$ dieſes nun wird für $x=a$ unendlich, wie aus der dort angegebenen Figur der krummen Linie, und hier 87 folgt; demohngeachtet aber wird dy unendlich klein: denn wenn x ſich dem a unendlich nähert, alſo $a-x$ ein Unendlichkleines der erſten Ordnung wird, ſo wird $\frac{a}{a-x}$ ein Unendlichgroſſes der erſten Ordnung, aber die Cubikwurzel daraus ein Unendlichgroſſes der Ordnung $\frac{1}{3}$; die alſo mit dx einen unendlich kleinen der erſten Ordnung multiplicirt, ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{2}{3}$ giebt. (12) Von

dieſer

dieſer Ordnung der Unendlichkleinen iſt alſo dy und daher iſt dx als ein Unendlichkleines der erſten Ordnung in ihm unendlich vielmahl enthalten. Die Wahrheit, welche durch dieſe Ausdrückungen angezeigt wird, iſt folgende: Weil für die Abſciſſe $x = a$; die Tangente der Axe ſenkrecht iſt, ſo wachſen die Ordinaten um dieſen Berührungspunct herum viel ſchneller als die Abſciſſen abnehmen.

125. In 120 kömmt die Beſchaffenheit der Linie $\kappa\lambda\mu$ auf die Grösſe von e an. Denn wenn man z. E. die Abſciſſenlinie in Theile jeden ſo groß als OH eintheilte, ſo wäre der beyden nächſten Ordinaten Unterſchied $OL - Hl = Li$; und die Linie, deren Ordinaten ſich wie jener Unterſchiede verhalten ſollten, hätte für die Abſciſſe AO, die Ordinate $\frac{a.Li}{OH}$ wo $\frac{Li}{OH}$ mit $\frac{Lk}{e}$ nicht allemahl und nothwendig einerley ſeyn wird.

126. Um alſo eine krumme Linie $\kappa\lambda\mu$ zu finden, da jede Ordinate $O\lambda$; nur durch die Abſciſſe AO; und nicht zugleich durch e beſtimmt wird, ſetze man der Linie $\kappa\lambda\mu$ Ordinate $z = ap$ (123). Hier nähmlich iſt p durch x und y gegeben, und wenn alſo auch eine Gleichung für die krumme Linie KLM ſelbſt gegeben iſt, ſo hat man drey Gleichungen, die für die Linie KLM, die zwiſchen p; x; y; und die nur angenommene $z = ap$. Aus dieſen dreyen kann man y und p wegſchaffen, (Alg. 202.) und bekömmt

kömmt alſo eine Gleichung zwiſchen z und x für $\varkappa\lambda\mu$.

127. Erkl. KLM ſoll die Hauptlinie, und $\varkappa\lambda\mu$ (125) ihre erſte Differentiallinie heiſſen.

128. Zuſ. Wenn zu einer Abſciſſe der Hauptlinie mehr als eine Ordinate gehört, ſo hat $\frac{dy}{dx}$ für eine Abſciſſe mehr als einen Werth, nachdem nähmlich dy den Unterſchied zwiſchen den beyden nächſten Ordinaten in einer oder in der andern Reihe der Ordinaten (Alg. 328) bedeutet. Folglich gehöret zu dieſer Abſciſſe mehr als ein z der Differentiallinie.

129. Ex. Für den Kreis 11 F. ſey CT = x; TM = y; der Halbmeſſer CA = 1 alſo yy = 1 − xx, und ydy = − xdx alſo wenn a = 1 geſetzt wird; $z = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$. Wegen des doppelten Zeichens, das die Wurzelgröſſe haben kann; gehören jeder Abſciſſe zwey entgegengeſetzte ſonſt gleiche z zu und entgegengeſetzten, ſonſt gleichen Abſciſſen, gehören gleiche z zu; und es iſt für

x =	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$
z =	∓ 0	$\mp 1 : \sqrt{3}$	$\mp \infty$

Setzt man ACM = φ ſo iſt z = − cot φ. Indem x von 0 bis 1 wächſt, nimmt der Winkel

kel ACM vom Rechten bis auf Nichts ab, und ſeine Cotangente wächſt von 0 bis ins Unendliche. Wenn CT; Ct; entgegengeſetzte ſonſt gleiche Abſciſſen ſind, ſo iſt $-\frac{CT}{TM} = TR$ einem verneinten z; und $-\frac{CT}{Tm} = Tr$ einem bejahten z weil TN eine verneinte Ordinate iſt; ferner $-\frac{Ct}{tN}$ bejaht, weil Ct was Verneintes iſt, alſo $= tq$ und $-\frac{Ct}{tn}$ verneint, alſo $= tr$; folglich gehören zu den Quadranten KMA; AmL; LnB; BNK die Schenkel CQ; RC; Cq; rC und FAE; fBe ſind Aſymptoten der krummen Linie. Es iſt nähmlich klar, daß für ein wachſendes bejahtes x; die Verhältniß dy:dx entweder die Verhältniß der Differentiale der abnehmenden bejahten Ordinate TM und der zunehmenden Abſciſſe CT; oder der abnehmenden verneinten Ordinate Tm und der zunehmenden Abſciſſe CT iſt; Im erſten Falle iſt $\frac{dy}{dx}$ verneint, im zweyten bejaht. Für ein wachſendes verneintes x; da dx verneint iſt, iſt dy:dx; die Verhältniß der Differentiale entweder einer abnehmenden bejahten Ordinate tN; oder einer abnehmenden verneinten tn zu dem Differentiale

der

der wachſenden verneinten Abſciſſe, und alſo iſt $\frac{dy}{dx}$ im erſten Falle bejaht, im zweyten verneint; welches zeigt, wenn z, das ſich wie $\frac{dy}{dx}$ verhält, bejaht oder verneint wird.

130. Wie in 122 wird erwieſen, daß $\mu\varrho = Q.e$ und Q eine Function von x, z, e, wie dorten P von x, y, e iſt.

131. Alſo iſt $P\mu - O\lambda$ oder $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ (120) $= Q.e$ Hier wird Q. e und folglich $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ kleiner als jede angebliche Gröſſe, oder es verſchwindet, wenn e unendlich abnimmt. Das heiſſt, wenn e unendlich abnimmt, ſo verſchwindet der Unterſchied zwiſchen den Unterſchieden der Ordinaten, der zweyte Unterſchied der Ordinaten (Alg. 724.) in Vergleichung mit dem Unterſchiede der Abſciſſen.

132. **Erkl.** Dieſen verſchwindenden Unterſchied nennt man das zweyte Differential oder das Differentiodifferential von y.

133. $Q = \frac{\mu\varrho}{e} = \frac{a.(ML-Lk)}{ee}$ wie man nun dx für ein verſchwindendes e und dy für das zugehörige Lk ſchreibt, ſo wird für ein verſchwindendes

dendes e der Unterſchied Lk − ML oder das Differentiodifferential = ddy können genennt werden, und wenn für dieſen Fall Q ſich in q verwandelt, ſo iſt $q = \frac{a\,ddy}{dx^2}$ wo man ddy als eine Gröſſe, die in Vergleichung mit dx (131) und folglich mit dy (123) unendlich klein iſt, anſehen kann.

134. Zuſ. Für ein verſchwindendes e wird $\frac{\mu\varrho}{e} = \frac{dz}{dx}$ alſo $dz = q\,dx = \frac{a\,ddy}{dx}$ (132). Aber $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ (126) alſo $d\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{a} = \frac{ddy}{dx}$ eben wie man es gefunden hätte, wenn man dy als eine veränderliche, dx als eine unveränderliche Gröſſe angeſehen, und $\frac{dy}{dx}$ nach 26; 22; differentiirt hätte.

135. Einen Ausdruck der Differentiale enthält, von neuem zu differentiiren, darf man nur mit den Differentialen auch wie vorhin mit den endlichen Gröſſen verfahren.

136. Wäre KLM die erſte Differentiallinie einer krummen Linie, deren Ordinaten y hieſſen, alſo $KN = z = \frac{a\,dy}{dx}$ ſo wäre für $\varkappa\lambda\mu$ als ihre

Diffe-

Differentiallinie die Ordinate $O\lambda = \frac{a\,dz}{dx} = \frac{a^2.\,ddy}{dx^2}$.

137. Wäre $KN = \frac{a^2\,ddy}{dx^3}$ ſo wäre $O\lambda = \frac{a.\,dKN}{dx} = \frac{a^3.\,dddy}{dx^3}$, wenn man das Differential von ddy oder das dritte Differential von y durch $dddy$ anzeigt, welches in eben dem Verſtande geſchehen kann, in welchem man das von dy durch ddy anzeigte.

138. Ueberhaupt erhellet, daß man ſo die Differentiale ohne Ende fortſetzen kann; wie man auch allemahl KLM als die erſte (136) zwente (137) dritte u. ſ. w. Differentiallinie einer Hauptlinie anſehen kann, da denn $\kappa\lambda\mu$ dieſer Hauptlinie zwente, dritte, vierte u. ſ. w. Differentiallinie wird. Nimmt man auf den Abſciſſen dieſer Linien, e von endlicher Gröſſe, ſo ſtellen die Ordinaten die endlichen Unterſchiede $\Delta 1$; $\Delta 2$; $\Delta 3$; u. ſ. w. (Alg. 724.) der Reihe y vor; welche ſich in dy; $d^2 y$; $d^3 y$; u. ſ. w. verwandeln, wenn e verſchwindet, oder wenn es ſich in dx verwandelt.

139. Willk. Satz. Das zweyte, dritte, vierte, ... nte. Differential oder die höhern Differentiale, von y bezeichne man durch $d^2 y$, $d^3 y$; $d^4 y$ ... $d^n y$

wo

wo man dieſes Zeichen von dy^n oder des Differentials von y Potenz n unterſcheiden muß.

So iſt der $n$ten Differentiallinie Ordinate $\frac{a^n d^n y}{dx^n}$.

140. Eine Gleichung, die zweyte, dritte u. ſ. f. Differentiale, oder Differentiale von einem gewiſſen Grade enthält, wird von neuem differentiirt, wenn man bey dieſen Differentialen eben die Regeln beobachtet die bey endlichen Gröſſen gelten. Und wie z als die Ordinate der erſten Differentiallinie ordentlich endlich iſt, (136) ſo iſt, wenn man dieſe Linie als eine Hauptlinie betrachtet, die Ordinate ihrer Differentiallinie endlich, und ſo ſind überhaupt die Ordinaten jeder Differentiallinie ordentlich endlich, oder $\frac{d^n y}{dx^n}$ iſt endlich. Ich ſage ordentlich, weil für gewiſſe Abſciſſen dieſe Ordinaten verſchwinden oder unendlich werden können wie in (129).

141. Anm. Wenn man dieſe Begriffe auf die Fluxionen bringen will, ſo verhält ſich ddy wie die Geſchwindigkeit, mit der ſich vy verändert (39 VIII) und dx unveränderlich annehmen, heiſſt vx unveränderlich annehmen, und ſo ſtellt jedes höhere Differential die Geſchwindigkeit vor, mit der ſich die Geſchwindigkeit verändert, welche durch das nächſtvorhergehende vorgeſtellt wurde.

142. Ob gleich bisher der leichtern Rechnung wegen, e (120) oder dx unveränderlich

iſt angenommen worden, ſo wäre doch dieſes nicht nothwendig. Man ſetze $\frac{dy}{dx} = p$ und nehme wie in (126) $z = ap$ nur daß man auch dx veränderlich oder Ll nicht gleich groß mit Kk annehme; So iſt noch $\mu\varrho$ oder $dz = adp$ aber nun $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; Es verhält ſich nähmlich hier noch dp oder dz, wie das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in dem aber nun auch dx veränderlich iſt. Setzt man $ddx = 0$ (22) ſo bekömmt man für dz den Ausdruck (134).

143. Anm. Die höhern Differentiale bekommen aber ordentlich keine beſtimmten Werthe, wenn man nicht ein erſtes Differential, oder eine Gröſſe, die durch erſte Differentiale gegeben iſt, unveränderlich ſetzt; oder ihr Werth wird anders und anders, nachdem man eine andere ſolche Gröſſe unveränderlich ſetzt. Z. E. Wenn $dy = pdx$ alſo $ddy = dpdx + pddx$ ſo wird $ddy = dpdx$ wenn dx unveränderlich iſt: Setzt man aber $dx^2 + dy^2$ unveränderlich, alſo $dxddx = - dyddy$ (22) oder $ddx = - \frac{dyddy}{dx}$ ſo wird $ddy = dpdx - \frac{pdyddy}{dx}$ und $(dx + pdy).\ ddy = dpdx^2$ alſo $ddy = dpdx. \frac{dx}{dx + pdy}$ welches mit dem vorigen Werthe, da dx unveränderlich war, nicht einerley ſeyn kann, weil gewiß nicht $\frac{dx}{dx + pdy} = 1$ iſt. Allgemeinere und ausführ-

lichere Betrachtungen hierüber findet man beym Euler Inſt. Calc. Diff. P. I. §. 251. ſeqq.

Ausdrückung eines unbeſtimmten Gliedes einer Reihe (Alg. 725.) durch die höhern Differentiale.

144. Wenn $x^m = \omega$ und dx beſtändig iſt, ſo iſt $m x^{m-1} dx = d\omega$ alſo $m x^{m-1} = \frac{d\omega}{dx}$

Ferner $m.(m-1) x^{m-2} = \frac{dd\omega}{dx^2}$

$$m.(m-1).(m-2) x^{m-3} = \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

und überhaupt
$m.(m-1).(m-2) \ldots (m-n+1).x^{m-n} = \frac{d^n\omega}{dx^n}$

Was in die Potenzen von x hier multiplicirt wird, will ich Coefficienten des erſten, zweyten, dritten, nten Differentials nennen.

145. Vergleichung dieſer Coefficienten mit den Binominalcoefficienten (Alg. 141) der erſte, zweyte, dritte ... nte Binominalcoefficient ſollen A, B, C, ... N heiſſen.

Es ſind alſo die Coefficienten der Differentiale
des erſten $= A$
des zweyten $= 1.2.B$
des dritten $= 1.2.3.C$
des nten $= 1.2.3 \ldots n.N$

 Dieſe

Dieſe Uebereinſtimmung hat Leibniz bemerkt Miſcell. Berol. (1710) P. III. art. 1. pag. 160. Sie findet ſich auch in Ger. Meermann ſpecimen calculi fluxionalis Leid. 1742. Hr. Joh. Freyh. v. Paccaſſi, Verſuch einer neuen Methode zu integriren. In den phyſikal. Arbeiten der einträchtigen Freunde in Wien, aufgeſammelt von Ignaz Edlen von Born Wien 1786; N. 3. 34 S. Giebt auch Formeln für dieſe Vergleichungen. Seine Vorgänger hat er nicht gekannt. Ueber die Anwendung zum Integriren hat er der Kaiſ. Ak. zu St. Petersb. eine Abhandlung geſandt.

146. Wenn $(x + c)^m = \omega + e$; ſo iſt $\omega + e = x^m + A x^{m-1} c + B x^{m-2} c^2 + C x^{m-3} c^3 \ldots + N x^{m-n} c^n \ldots$ aber aus 144 und 145 iſt $A x^{m-1} = \frac{d\omega}{dx}$; $B x^{m-2} = \frac{d^2\omega}{1.2\, dx^2}$;

$$C x^{m-3} = \frac{d^3\omega}{1.2.3\, dx^3} \ldots N x^{m-n} = \frac{d^n\omega}{1.2.3.n.\, dx^n}$$

Daher $\omega + e = \omega + \frac{c\, d\omega}{dx} + \frac{c^2 d^2\omega}{1.2.\, dx^2}$

$$+ \frac{c^3 d^3\omega}{1.2.3.\, dx^3} + \frac{c^n d^n\omega}{1.2.3\ldots n.\, dx^n} \ldots$$

So läſſt ſich alſo $\omega + e$ durch höhere Differentiale ausdrucken dergeſtalt daß wenn ω der Werth iſt der einem gewiſſen Werthe von x zugehört, man $\omega + e$ findet das zu $x + c$ gehört.

147. Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, ſo giebt es m Differentiale, und die Reihe für $\omega + e$ hat $m + 1$ Glieder: Auſerdem gehn die Glieder ohne Ende fort. Völlig wie beym Ausdrucke dieſer Reihe durch den binomiſchen Satz (47).

148. Exempel. Wenn $m = 4$ ſo iſt

$$\frac{d\omega}{dx} = 4x^3; \quad \frac{dd\omega}{dx^2} = 12x^2, \quad \frac{d^3\omega}{dx^3} = 24x;$$

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} = 24;$$ alſo

$$\omega + e = \omega + 4x^3c + 6x^2c^2 + 4xc^3 + c^4$$

wie der binomiſche Satz gab.

149. Wenn $u = a.\,x^m$, $u + g = a.\,(x + c)^m$ ſo iſt $u = a.\,\omega$; $du = a.\,d\omega$; $ddu = a.\,dd\omega$ u. ſ. w. Ferner $u + g = a.\,(\omega + e)$; Um alſo $u + g$ zu finden, darf man nur der Reihe für $\omega + e$ jedes Glied mit a multipliciren, ſo gibt ſie

$$u + g = u + \frac{c.\,du}{dx} + \frac{c^2.\,d^2u}{1.2.\,dx^2} \cdots$$

$$\cdots + \frac{c^n.\,d^nu}{1.2.\,.\,.\,n.\,dx^n} \cdots$$

150. Wenn $z = ax^m + bx^r$, ſo heiſſe man den erſten Theil u, den zweyten v; alſo $dz = du + dv$, $ddz = d^2u + d^2v$, $d^3z = d^3u + d^3v$ u. ſ. w. Wenn ſich nun x in $x + c$ verwandelt, ſo verwandelt ſich

$$u \text{ in } u + \frac{cdu}{dx} + \frac{c^2d^2u}{1.2.\,dx^2} \cdots$$

$$v \text{ in } v + \frac{c\,dv}{dx} + \frac{c^2 d^2 v}{1.2.dx^2} \ldots$$

alſo u + v oder z

$$z \text{ in } u + v + \frac{c}{dx} \cdot (du + dv) + \frac{c^2}{1.2.dx^2}$$

$$(d^2u + d^2v) \ldots$$

Das iſt in

$$z + \frac{c\,dz}{dx} + \frac{c^2 d^2 z}{1.2.dx^2} \ldots$$

Es iſt klar, daß eben dieß gelte, wenn z aus drey, vier oder mehr ſolchen veränderlichen Theilen beſtünde.

151. Wenn y eine Function von x iſt, und man das y aus x berechnen will, ſo läſſt ſich allemahl annehmen, es ſey eine Reyhe $y = ax^m + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta} \ldots$ gegeben, die eine endliche oder unendliche Menge von Gliedern hat. Iſt y eine algebraiſche Function von x ſo lehrt das Parallelogramm ſolche Reihen finden. Iſt es eine tranſcendentiſche, ſo weiß man vielleicht bisher noch nicht wie die Reihe gefunden wird, es iſt aber doch begreiflich, daß wenn ſich keine ſolche Reihe finden lieſſe, der Werth von y der jeden x zugehörte, nicht könnte berechnet werden. Auf andre Art, etwa durch Verzeichnung lieſſe es ſich beſtimmen, wie z. E. wenn y der Bogen wäre der dem Sinus x zugehörte, aber eine Berechnung findet nicht ſtatt, wenn nicht y durch eine ſolche Reihe, oder durch irra=

irrationale Ausdrückungen z. E. $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ u. d. gl. die ſich denn allemahl in Reihen verwandeln laſſen gegeben iſt. Alſo kann man allemahl eine ſolche Reihe für y annehmen, und wenn alſo x ſich in $x + c$ verwandelt, ſo verwandelt ſich nach 150; y in

$$y + \frac{c\,dy}{dx} + \frac{c^2 d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{c^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} \ldots + \frac{c^n d^n y}{1.2.3\ldots dx^n}$$

Exempel $y = 4x^3 + 7x + 5$, gibt $\frac{dy}{dx} = 12x^2 * + 7$; $\frac{d^2 y}{dx} = 24x$; $\frac{d^3 y}{dx} = 24$; Wenn alſo x um c wächſt ſo verwandelt ſich y in
$y + 12.cx^2 + 7c + 12c^2 x + 4c^3$

Wenn z. E. $c = 10$; ſo giebt dieſes

$$y + 120x^2 + 1200x + 4070.$$

Man ſetze $x = 0$ ſo iſt $y = 5$; und verwandelt ſich für $x = 0 + 10$ in 4075 wie gehörig.

Von den Gröſſten und Kleinſten.

152. Erkl. Wenn eine Function von x ſo beſchaffen iſt, daß ſie bis auf einen gewiſſen Werth zunimmt und von dar wieder abnimmt, indem x beſtändig zunimmt oder abnimmt, ſo heiſſt dieſer ihr Werth ein Gröſſtes; Nimmt ſie aber bis auf einen ſolchen Werth ab, und von dar

wieder zu, ſo heiſſt ſie ein Kleinſtes (maximum vel minimum.)

So wird der Ellipſe Ordinate PM Alg. II. Taf. 12 Fig. ein Gröſſtes, wenn ſie zur Ordinate durch den Mittelpunct CD wird. Aber wenn $x^2 - 10x + 60 = y$ ſo iſt y für $x = 5$ ein kleinſtes; Es wird alsdenn $= + 35$ und jeder andere Werth von x gibt ein gröſſeres y; z. E. $x = 6$ oder 4 gibt eines wie das andere $y = 36$.

153. Wenn man bejahte und verneinte Gröſſten oder Kleinſten unterſcheiden will, ſo wird ein gröſſtes Verneintes (maximum negatiuum,) ſeyn, vor dem kleinere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittlere unter den dreyen -10; -11; -9; und ſo wird ein kleinſtes Verneintes, das ſeyn, vor dem gröſſere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittelſte unter den dreyen -8; -7; -9. Heiſſt aber kleiner, das, was von dem andern abgezogenen was bejahtes läſſt, daß alſo ein gröſſer verneintes kleiner heiſſt, ſo braucht man nicht zu ſagen, ob ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes an ſich ſelbſt bejaht oder verneint ſeyn ſoll, ſondern das Verneinte, das vorhin das gröſſte Verneinte hieſſe, iſt nun überhaupt ein Kleinſtes, wie -11; im erſten Exempel, und das Verneinte, das vorhin ein verneintes kleinſtes hieſſe, iſt nun überhaupt ein gröſſtes; wie -7 im zweyten Exem=

Exempel. Ich werde in der Folge, wenn ich nicht das Gegentheil erinnere, dieſe Wörter in der letztern Bedeutung brauchen.

154. Eigentlich iſt hier nur die Rede von ſolchen Functionen von x, da nur ein Werth zu einem Werthe von x gehört (functiones vniformes). Denn ſonſt kann für einerley x, ein Werth der Function ein gröſſtes oder kleinſtes ſeyn, und der andere nicht. Bey der Ellipſe (152) wäre ſo für einerley Abſciſſe die Ordinate CD ein gröſſtes, und die Ordinate Cd ein kleinſtes (153). Eben ſo gehören Alg. I. Taf. 8 Fig. zu jeder Abſciſſe zwo Ordinaten, z. E. $f\varphi$; $f\Phi$; und da iſt für den Punct A, eine in der Reihe, wo $f\varphi$ den Anfang macht, die kleinſte $= 0$; und eine in der Reihe, wo $f\Phi$ den Anfang macht, die gröſſte AB.

155. Aufg. **Wenn y eine einförmige Function von x iſt, die Umſtände zu finden, unter denen ſie ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird.**

Aufl. I. Wenn man erſtlich $x + \alpha$; darnach $x - \alpha$ ſtatt x ſetzt, ſo muß die Function beydemahl kleiner als das y werden, das ein Gröſſtes iſt, und gröſſer als dasjenige, das ein Kleinſtes iſt, die erſte Vorausſetzung aber giebt (138).

$$\Gamma)\ y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} \ldots$$

und die andere

$$\Delta)\ y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2 dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3}$$

Da denn y, gröſſer als jeder dieſer Werthe ſeyn muß, wenn es ein Gröſſtes iſt, und kleiner, wenn es ein Kleinſtes iſt.

II) Wofern nun die Quotienten $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. w. alle endlich ſind (140) ſo kann man allemahl α ſo klein annehmen, daß die Glieder jeder dieſer Reihe, die nach dem zweyten folgen, zuſammen weniger als das erſte betragen, weil die höhern Potenzen eines ſehr kleinen Bruches, ſehr ſchnell abnehmen. Weil nun der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für Γ und für Δ einerley iſt, ſo wird in dieſem Falle, nachdem $\frac{dy}{dx}$ bejaht oder verneint iſt, Γ gröſſer oder kleiner, und Δ kleiner oder gröſſer als das y ſeyn, das der Abſciſſe x zugehört. Dieſe beyden Werthe fallen, jeder auf eine andere Seite des genannten y, ſo nahe als man will, weil man α ſo klein annehmen kann als man will; die geringſte Veränderung der Abſciſſe x, giebt alſo auf einer Seite was gröſſers als das genannte y, auf der andern was kleiners; folglich iſt dieſes y kein gröſſtes oder kleinſtes.

III. Wenn aber $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{ddy}{dx^2}$ endlich iſt, und wiederum α ſo klein angenommen wird,

daß

daß die Glieder der Reihen, die nach dem dritten folgen, zuſammen weniger als das dritte betragen; ſo werden Γ und Δ zugleich gröſſer oder zugleich kleiner als y ſeyn, nachdem ddy bejaht oder verneint iſt.

IV. Um alſo zu unterſuchen, ob die Function ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes werde, ſetze man $dy:dx = 0$. Geht dieſes an, und man findet aus dieſer Vorausſetzung einen, oder etliche Werthe von x, ſo beurtheilt man nach III. ob ſie Gröſſten oder Kleinſten zugehören.

V. Wofern aber $ddy:dx^2 = 0$ ſo kann man aus III. noch nichts ſchlieſſen. Um die Art, wie man hier verfahren muß, deutlicher zu zeigen, ſey $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ u. ſ. w.

Der Werth von y, der herauskömmt, wenn f ſtatt x geſetzt wird, ſey F; ſo iſt das, was herauskömmt, wenn $f + \alpha$ ſtatt x geſetzt wird;

$$\Gamma = F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$$

und das, was herauskömmt, wenn $f - \alpha$ ſtatt x geſetzt wird,

$$\Delta = F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$$

VI. Wofern nun hier $p = 0$; aber q endlich iſt, ſo iſt Γ gröſſer oder kleiner, und Δ kleiner oder gröſſer als F, nachdem q bejaht oder verneint iſt; weil man allemahl α ſo klein annehmen kann, daß die folgenden Glieder der Reihen

hen zuſammen weniger als das erſte betragen; Alſo iſt F kein Gröſſtes oder Kleinſtes.

VII. Iſt aber $q = o$ und r endlich, ſo ſind Γ und Δ zugleich gröſſer oder kleiner als F, oder F iſt ein Kleinſtes oder Gröſſtes, nachdem r bejaht oder verneint iſt.

VIII. Ueberhaupt ſey $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} = \varkappa$; $\frac{d^{2n+1} y}{dx^{2n+1}} = \lambda$; ſo ſind zwey allgemeine nächſtfolgende Glieder von

$$\Gamma \ldots + \frac{1}{1.2.\ldots.2n} \cdot \alpha^{2n} \varkappa + \frac{1}{1.2..(2n+1)} \alpha^{2n+1} \lambda$$

und von

$$\Delta \ldots \frac{+1}{1.2.\ldots 2n} \cdot \alpha^{2n}.\varkappa - \frac{1}{1.2..(2n+1)} \cdot \alpha^{2n+1}.\lambda$$

Sind alſo alle vorhergehenden Glieder dieſer Reihen $= o$; und $\varkappa$ iſt endlich, ſo ſind Γ; Δ; beyde zugleich gröſſer oder kleiner als F, und F iſt ein kleinſtes oder gröſſtes, nachdem $\varkappa$ bejaht oder verneint iſt. Iſt aber auch $\varkappa = o$ und λ endlich, ſo iſt F weder ein gröſſtes noch ein kleinſtes.

IX. Es ſey $\frac{dy}{dx} = (x-f)^2 P$ wo P eine Function von x iſt, die $x-f$ nicht zum Factor hat. So iſt $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = f$; $\frac{ddy}{dx^2} = 2.(x-f)$.

P +

$P + (x-f)^2 . \frac{dP}{dx}$ und dieſer Quotient wird $= 0$ für $x = f$. Aber $q = 2. P + 4. (x-f). \frac{dP}{dx} + (x-f)^2 \frac{ddP}{dx^2}$ wird $= 2 P$ für $x = f$. Alſo iſt hier F weder ein gröſſtes noch ein kleinſtes. (VI) Für $\frac{dy}{dx} = (x-f)^3 . P$ wird man auf eben die Art finden, daß p und q für $x = f$ verſchwinden, aber r endlich wird, alſo F ein gröſſtes oder kleinſtes iſt. (VII.) Und ſo erhellt überhaupt, daß F nur alsdenn ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt, wenn $\frac{dy}{dx} = (x-f)^m P$ ſo daß m ungerade iſt. Iſt aber m gerade, ſo iſt F weder ein gröſſtes noch ein kleinſtes.

X. Die gröſſten oder kleinſten leichter zu finden, dienen oft auch folgende Betrachtungen: Wenn y ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird, ſo wird ay, und ay^n wofern a eine bejahte Gröſſe, und n eine bejahte ungerade Zahl iſt, auch ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes, aber umgekehrt $b - ay^n$ imgleichen $\frac{a}{y^n} = b$ ein Kleinſtes oder ein Gröſſtes. Wenn n gerade iſt, läſſt ſich dieſes nicht anbringen, denn da kann y einen verneinten Werth haben, und alſo ein kleinſtes ſeyn, (153) und ſeine gerade Potenzen, die bejaht

ſind,

ſind, können doch Größte werden; Und gegentheils, wenn der verneinte Werth von y ein Größtes iſt, ſo werden deſſelben gerade Potenzen, Kleinſte ſeyn. Das Gegentheil hievon erfolgt, wenn n eine gerade verneinte Zahl iſt. Eben das gilt, wenn n ein Bruch iſt, deſſen Nenner eine ungerade Zahl iſt. Iſt der Zähler ungerade, wie $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{6}$; u. ſ. w. ſo hat man es als eine ungerade Zahl anzuſehen, aber als eine gerade, wenn der Zähler gerade iſt, wie $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; u. ſ. w. Iſt der Nenner gerade, ſo werden z. E. $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; u. d. gl. unmöglich, wenn y verneint iſt, aber Größte oder Kleinſte, wenn y bejaht und ein Größtes oder Kleinſtes iſt, und unter dieſer Bedingung umgekehrt $y^{-\frac{1}{2}}$; $y^{-\frac{3}{4}}$ kleinſte oder größte. Jede dieſer Irrationalgrößen aber, hat zweene entgegengeſetzte ſonſt gleiche Werthe, daher von den Verneinten das Entgegengeſetzte deſſen gilt, was von den Bejahten iſt geſagt worden.

156. **Ex.** Die Umſtände zu finden, unter denen $(x-a)^m$ ein größtes oder kleinſtes wird.

Weil $\frac{dy}{dx} = m\,(x-a)^{m-1}$ für $x=a$ verſchwindet, und einen Factor, wie 155; VIII betrachtet worden iſt hat, ſo giebt es hier kein Größtes oder Kleinſtes, wofern nicht $m-1$ ungerade, oder m gerade iſt. Alle Differentiale von y enthalten nähmlich den Factor $x-a$, bis

auf

auf $\frac{d^m y}{d x^m} = m. (m - 1) \ldots . 1$ welches bejaht iſt, und alſo für ein gerades m anzeigt, daß der Werth, den x = a für y giebt, ein Kleinſtes iſt. Dieſer Werth iſt nähmlich = 0; und jeder andere Werth, von $(x - a)^m$ iſt für ein gerades m bejaht, und folglich gröſſer; Für ein ungerades m aber giebt es verneinte Werthe von x — a wenn x < a die alſo kleiner als 0 ſind.

Iſt $m = \frac{\mu}{\nu}$ ſo daß μ gerade und ν ungerade iſt, ſo giebt x = a ein Kleinſtes. Iſt aber μ wie ν ungerade, ſo giebt es weder ein Kleinſtes noch ein Gröſſtes.

157. Ex. Unter allen rechtwinklichten Parallelepipeden, die einem gegebenen Würfel gleich ſind, und eine gegebene Seite haben, das zu finden das die kleinſte Fläche hat.

I. Der Würfel ſey $= a^3$, die gegebene Seite = b, die zweyte = x; ſo iſt die dritte = $\frac{a^3}{b.x}$; die halbe Fläche des Parallelepipedes =

$$b.x + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b} = y; \; b - \frac{a^3}{x^2} = \frac{dy}{dx};$$

$$+ \frac{2a^3}{x^3} = p.$$

Für

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ iſt $x = \sqrt{(a^3 : b)}$. Von dem doppelten Werthe der Quadratwurzel wird begreiflich hie der bejahte verſtanden. Für dieſen Werth iſt p bejaht, alſo giebt $\sqrt{(a^3 : b)}$ ein kleinſtes y.

II. Die dritte Seite findet ſich auch $= \sqrt{(a^3 : b)}$, und ſo die halbe kleinſte Fläche $= y = \frac{a^3}{b} + 2. a. \sqrt{(a. b)}$

III. Das wäre die halbe kleinſte Fläche wenn b gegeben iſt. Man ſetze b ſey nicht gegeben, ſo heiſſt die Frage: Unter allen gleichen Parallelepipeden das zu finden das die kleinſte Fläche hat. So iſt $\frac{dy}{db} = -\frac{a^3}{b^2} + a \sqrt{(a : b)}$, dieſes $= 0$ geſetzt giebt $b = a$. Alſo hat der Würfel ſelbſt unter allen ihm gleichen Parallelepipeden die kleinſte Fläche.

158. **Ex.** Unter allen geraden Linien OM, die aus einem gegebenen Puncte O 1. Fig. ſich an eine gegebene algebraiſche, krumme Linie CMN ziehen laſſen, die kürzeſte oder längſte zu finden.

Aufl. I. Man ziehe durch O eine willkührliche Abſciſſenlinie OA, nehme auf derſelben willkührlich $OA = c$ nenne Abſciſſe $AP = x$; Ordinate $PM = z$; auch $OM = y = \sqrt{(z^2 + (c-x)^2)}$

II)

II) Nun hat man zwiſchen x und z allemahl eine algebraiſche Gleichung (An. endl. Gr 422; XXXVI.) Aus ihr $dz = m. dx$ wo m durch die beyden Coordinaten gegeben iſt.

III) Aber $dy = \frac{z. dz - (c - x). dx}{y}$

Folglich wird $\frac{dy}{dx} = 0$ wenn $c - x = m. z = \frac{z.dz}{dx}$ alſo $PO = c - x$ die Subnormallinie iſt (92).

Die kürzeſte oder längſte OM iſt alſo allemahl eine Normallinie.

IV. Daß die Normallinie eine kürzeſte oder längſte ſeyn kann, erhellt weil $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2. z. ddz}{dx^2} + 2. m^2 + 2$ verneint werden kann, wenn ddz verneint iſt.

Befände ſich z. E. O im Durchmeſſer eines Kreiſes, ſo gingen von dieſem Puncte zwey Stücke einer einzigen geraden Linie an den Kreis, beyde ſenkrecht auf ihn, eins eine kürzeſte Linie, das andre eine längſte.

V. Bey tranſcendentiſchen Linien, findet die Vorausſetzung (II) nicht ſtatt. (An. endl. 575) So, wenn was hie O heiſſt, innerhalb der Spirale An. endl. III. Tafel 3. Fig. C wäre, giebt es da kein gröſſtes oder kleinſtes CM.

159. Oft kann man gröſſte oder kleinſte ohne Rechnung des Unendlichen beſtimmen.

So: Eine Linie a iſt in zwey Stücke getheilt x und a - x; Wenn wird das Rechteck aus beyden (a - x). x am gröſſten.

Da darf man nur x als Abſciſſe eines Kreiſes anſehen deſſen Durchmeſſer = a; der Ordinate Quadrat iſt dem Rechtecke gleich, und wird am gröſſten für $x = \frac{1}{2}a$. Ein Kleinſtes giebt es nicht, wenn man nicht o dafür annehmen wollte.

Man kann die beyden Stücke $\frac{1}{2}a + u$ und $\frac{1}{2}a - u$ nennen, ſo iſt ihr Rechteck $= \frac{1}{4}a^2 - u^2$, an gröſſten wenn $u = 0$.

Sind OM, 1. 4. Fig. Normallinien ſo liegt der Bogen um M mit O auf einer Seite der Tangente, wo die krumme Linie gegen O hohl iſt, aber auf der entgegengeſetzten wo ſie erhaben iſt. Dort alſo iſt die Normallinie eine längſte, hie eine kürzeſte.

160. I. Die Betrachtungen (155; V;) u. ſ. dienen ſogleich aus der Rechnung zu entſcheiden, ob man ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes findet, überlegt man die Beſchaffenheit der Gröſſe von welcher die Frage iſt, ſo entſcheidet ſich das öfters daraus ohne auf höhere Differentiale zu gehen.

II. Ehe man die Reihen (155) brauchte verhielt man ſich ſo: Es ſey y eine Ordinate die der Abſciſſe x gehört. Man nehme an x wachſe wenigſtens eine Zeit nach einander immer fort.

III. Wenn nun dieſen wachſenden Abſciſſen, einen Theil dieſer Zeit über wachſende Ordinaten gehören, dann abnehmende, ſo giebt es eine Abſciſſe wo ſich Wachſen der Ordinaten in Abnehmen verwandelt. Dieſer gehört offenbahr die Ordinate, vor welcher, und nach welcher kleinere ſind als ſie.

IV. Nun iſt $\frac{dy}{dx}$ bejaht für wachſende Ordinaten, verneint für abnehmende, alſo $= 0$ wo es aus dem Bejahten ins Verneinte übergeht.

V. So kann auch eine Ordinate vor ſich und nach ſich gröſſere haben, bey ihr geht Abnehmen in Wachſen über, ſie iſt die kleinſte in ihrer Reihe und auch für ſie $dy : dx = 0$.

VI. Für dieſe gröſſten oder kleinſten Ordinaten, iſt die Tangente der Abſciſſenlinie parallel, die Subtangente unendlich, welches eben das Verhalten der Differentiale giebt.

VII. Aber eine Gröſſe kann auch aus dem Bejahten ins Verneinte durchs Unendliche übergehn. In dieſem Falle wäre für die gröſſte oder kleinſte Ordinate $dy : dx$ unendlich, oder $dx : dy = 0$. Da wäre die Subtangente $= 0$, die Tangente läge auf der Ordinate, wäre ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie wenn die Ordinaten das ſind.

VIII. Bey der krummen Linie (An. endl. 474) iſt $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a}{a-x}\right)}$

Für wachſende Abſciſſen, nehmen die Ordinaten ab, ſo lange x kleiner als a iſt. Iſt aber x gröſſer als a ſo iſt die Kubikwurzel verneint, folglich der Quotient der Differentiale bejaht, und die Ordinaten wachſen. So geht Abnehmen in Wachſen über bey $x = a$; und da iſt der Quotient der Differentiale unendlich.

Der Quotient, iſt die trigonometriſche Tangente, des Winkels den die berührende gerade Linie mit der Abſciſſenlinie macht. Dieſer Winkel nimmt alſo für Abſciſſen gröſſer als a, immer ab, der Schenkel DG zieht ſich ins Unendliche hinauf immer mehr und mehr in eine der Abſciſſenlinie parallele Lage. Das thut auch der ihm gleiche und ähnliche Schenkel DC. Für unendliche Abſciſſen verſchwindet der Quotient, die Schenkel werden da der Abſciſſenlinie parallel.

IX. Das Beyſpiel zeigt, wie man die Fälle leicht erkennt, wo $dy : dx$ nicht $= 0$ ſondern unendlich wird. Sie kommen bey Findung der Gröſſten oder Kleinſten nicht ſo häufig vor: Sie nicht auszuſchlieſſen ſagte ich in (155 II) nur, der Quotient ſollte nicht endlich ſeyn.

X. Ich gebe nun ein Paar Beyſpiele wo aus Betrachtung einer krummen Linie entſchieden wird, ob man ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes finden, ſie geſtatten auch ökonomiſche Anwendung.

161. Einen Cylinder von gegebenem Innhalte zu machen, bey dem ein Boden und krumme Fläche zuſammen ein Kleinſtes ſind.

I. Kör-

I. Körner und Getränke zu meſſen, braucht man hohle Cylinder die oben offen ſind. Da kömmt alſo die Frage vor, ein ſolches Maaß aus dem wenigſten Holze oder Bleche zu verfertigen. Sie ward wirklich vor mehr Jahren in einer Reichsſtadt von einem Mitgliede des Rathes dem daſigen Landmeſſer gethan, der ſie natürlich an mich beförderte.

II. Des Cylinders Halbmeſſer ſey $= r$; Höhe h, beyde unbekannt, aber der Innhalt $r^2 . h . \pi = a^3$ gegeben, folglich $h = a^3 : r^2 . \pi$.

III. Die krumme Fläche iſt $= h . 2 . r . \pi = 2 . a^3 : r$. Dazu kömmt die Fläche eines Bodens $= r^2 . \pi$. Die Summe dieſer beyden Flächen ändert ſich wie ſich r ändert. Ich ſetze ſie $= a . y$ ſo iſt $y = \frac{r^2 . \pi}{a} + \frac{2 . a^2}{r}$; Eine Gleichung für eine krumme Linie deren Abſciſſe $= r$, Ordinate $= y$.

IV. Kann man eine Abſciſſe finden für welche die Ordinate ein Kleinſtes iſt, ſo giebt dieſe Ordinate mit a multiplicirt die kleinſte Fläche.

V. Für $y = o$ iſt $r^3 = -\frac{2 . a^3}{\pi}$. Es giebt alſo eine Abſciſſe $= - a \sqrt[3]{(2 : \pi)}$ wo die krumme Linie die Abſciſſenlinie ſchneidet. Sie iſt verneint, und auſer ihr giebt es keine andre, weil die reine kubiſche Gleichung nur eine mögliche Wurzel hat. (An. endl. 240)

 VI.

VI. Man deute durch u eine bejahte veränderliche Zahl an, und ſetze $r = - u. a. \sqrt[3]{(2:\pi)}$, ſo kömmt (III) $y = \frac{2. a. (u^3 - 1)}{u \sqrt[3]{(2:\pi)}}$

Dieß iſt bejaht oder verneint, nachdem u gröſſer oder kleiner als 1 iſt.

Im letzten Falle, eine deſto gröſſere verneinte Gröſſe, je kleiner u iſt, die alſo bis ins Unendliche verneinte wächſt, wenn u bis auf nichts abnimmt.

Für u gröſſer als 1; iſt y bejaht, und wächſt wenn u wächſt; ins Unendliche wenn u ins Unendliche wächſt.

VII. Man ſtelle ſich eine Abſciſſenlinie vor, wo vom Anfange der Abſciſſen, bejahte r, rechter Hand, verneinte linker Hand genommen worden, die Ordinaten ſenkrecht auf die Abſciſſe, bejahte über der Abſciſſenlinie, verneinte unter ihr. Durch den Anfang der Abſciſſenlinie ziehe man auf ſie ein unbegränztes Perpendikel.

VIII. Man laſſe vom Anfange der Abſciſſen, linker Hand verneinte wachſen: Ihnen gehören anfangs groſſe verneinte Ordinaten zu, die immer abnehmen, die Ordinate für u = 1 (V; VI) iſt = 0 gröſſern wachſenden Abſciſſen gehören wachſende bejahte Ordinaten zu. Das unbegränzte Perpendikel (VII) iſt alſo eine Aſymptote an welcher

cher ſich die krumme Linie linker Hand aus dem Unendlichen herauf zieht, und nach dem ſie die Abſciſſenlinie geſchnitten hat linker Hand ins Unendliche hinaufgeht, auch von der Linie an welcher ſie heraufkam, ſich immer weiter linker Hand ins Unendliche entfernt.

IX. Jede bejahte Abſciſſe, hat nur eine Ordinate, und dieſe bejaht (III) Für r = o iſt y unendlich, für kleine r ſehr groß, aber abnehmend indem ſie wachſen. Alſo iſt das unbegränzte Perpendikel (VII) auch über der Abſciſſenlinie, Aſymptote, an welcher ſich die krumme Linie rechter Hand herabzieht, aber die Abſciſſenlinie nicht ſchneidet (V)

X. Nimmt man r ſehr groß, und immer gröſſer, ſo wird der zweyte Theil des Werthes von y gegen den erſten immer weniger und weniger beträchtlich, und die Ordinate wächſt ins Unendliche.

XI. Zwiſchen Abnehmen (IX) und Wachſen (X) giebt es alſo wenigſtens einen Uebergang, da muß eine kleinſte Ordinate ſeyn.

XII. Ich ſage wenigſtens eine, denn die Ordinaten könnten aus abnehmenden wachſende werden, und ferner aus wachſenden abnehmende, und dann wiederum wachſende u. ſ. w. Ob ſo was geſchieht oder nicht, entſcheidet am kürzeſten die Betrachtung der Differentiale.

XIII. Nähmlich $\frac{dy}{dr} = \frac{2.\pi.r}{a} - \frac{2a^2}{r^2}$ iſt für bejahte r, verneint ſo lange r^3 kleiner iſt als $\frac{a^3}{\pi}$; wird = o wenn dieſe beyden Gröſſen gleich ſind, und iſt immer bejaht wenn die erſte gröſſer iſt als die letzte.

XIV. Alſo giebt es eine einzige Abſciſſe, bis an welche die Ordinaten abnehmen und dann wiederum zunehmen, ſie iſt $r = a : \sqrt[3]{\pi}$ einzig wegen der reinen kubiſchen Gleichung.

XV. Ihr gehört die kleinſte Ordinate $3.a.\sqrt[3]{\pi}$; welche mit a multiplicirt die kleinſte Fläche giebt.

XVI. Die Höhe (IX) iſt $= a : \sqrt[3]{\pi}$ dem Halbmeſſer gleich.

XVII. Da man den Halbmeſſer nicht verneint nimmt, ſo gehören V. VIII. nicht zur Frage, mußten aber beygebracht werden, die ganze krumme Linie darzuſtellen, von welcher man hie nur den Theil braucht, der bejahten Abſciſſen gehört.

XVIII. Exempel. Münchhauſen Hausvater 1. Th. 600. S. fand den braunſchweigiſchen Himten, einen Cylinder deſſen Durchmeſſer $= \frac{58}{3}$ pariſer Zoll, die Höhe $= \frac{16}{3}$ par. Zoll. So iſt der Innhalt $= (\frac{58}{3})^2 . \frac{1}{4}\pi . \frac{16}{3}$ alſo

2 log

$$2.\ \log\left(\frac{58}{3}\right) = 2{,}5726136$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log \frac{4}{3} = 0{,}1249388$$

$$\text{log des Innh.} = 3{,}1947023$$

Giebt dem Innhalt 1565,6 pariſer Cubikzoll. Münchhauſen ſetzt ihn 1564. Begreiflich hat er nicht ſo ſcharf gerechnet. Meine Zahl nehme ich für a^3, ſetze den Pariſer Zoll = 1. Alſo für (XV)

$$\log a = 1{,}0649001$$
$$\text{abgez. } \frac{1}{3}\log \pi = 0{,}1657166$$

$$\log r = 0{,}8991835$$

giebt $r = h = 7{,}9283$

Für die Fläche (XV)

$$2.\ \log a = 2{,}1298002$$
$$\log 3 = 0{,}4771212$$
$$\frac{1}{3}\log \pi = 0{,}1657166$$

$$2{,}7726380$$

giebt die Fläche = 592,43

Bey Münchhauſens Himten war der Halbmeſſer = $\frac{29}{3}$ die Höhe $\frac{16}{3}$ kleiner. Die Summe der krummen Fläche und der Grundfläche finde ich = 617,49.

162. Einen Cylinder von gegebenem Innhalte zu machen, wo Summe der krummen Fläche, und beyder Grundflächen ein Kleinſtes iſt.

Aufl. I. Innhalt, Halbmeſſer, Höhe, heiſſen wiederum a^3; r; $h = a^3 : r^2 \pi$ So iſt die Summe $= 2. r^2. \pi + 2. a^3 : r = a. y$ wo y ein Kleinſtes ſeyn ſoll.

II. Für $r = - a. \sqrt[3]{(1 : \pi)}$ iſt $y = 0$.

III. Wenn $r = - u. a. \sqrt[3]{(1 : \pi)}$ iſt $y = \frac{2. a. (u^2 - 1)}{u. \sqrt[3]{(1 : \pi)}}$; Verneint ſo lange u kleiner als 1 iſt, und immer gröſſer für ein kleineres u. Aber für u gröſſer als 1 bejaht, und immer gröſſer wenn u gröſſer iſt Setzt man alſo durch den Anfang der Abſciſſen, ein Perpendikel auf die Abſciſſenlinie, ſo iſt das wiederum eine Aſymptote, an der ſich die krumme Linie linker Hand aus dem Unendlichen heraufzieht, und über der Abſciſſenlinie, ſich von ihm linker Hand, ins Unendliche ſteigend unendlich entfernt.

Dieſer Theil der krummen Linie für verneinte Abſciſſen, gehört nicht zur Frage.

IV. Für jede Abſciſſe gehört nur eine Ordinate. Bejahte Abſciſſe unendlich klein genommen, giebt bejahte Ordinate unendlich groß, groſſe bejahte Abſciſſen geben wiederum groſſe bejahte Ordinaten, ſo zieht ſich die krummen Linie auch rechter Hand der Aſymptote aus dem Unendlichen herunter, und geht wiederum ins Unendliche hinauf immer weiter rechter Hand.

V.

V. Es iſt $\frac{4. r\pi}{a} - \frac{2 a^3}{r^2} = \frac{dy}{dr}$ dieſer Quotient alſo verneint, $= 0$; bejaht, nachdem $2. r^3$ kleiner, ſo groß, oder gróſſer als $\frac{a^3}{\pi}$ iſt.

VI. So gehórt die kleinſte Ordinate der Abſciſſe $r = a : \sqrt[3]{2. \pi}$.

VII. Die kleinſte Ordinate ſelbſt iſt $= 3. a. \sqrt[3]{2. \pi}$ uud giebt mit a multiplicirt die kleinſte Fläche.

VIII. Die Hóhe kómmt $= \frac{a^3}{\pi} \cdot \frac{(2. \pi)^{2:3}}{a^2} = 2. r.$

IX. Dieſer Cylinder hat alſo die kleinſte Fläche rings herum, wenn ſeine Hóhe dem Durchmeſſer gleich iſt.

X. Ein Stúck Geld kann als ein Cylinder angeſehen werden, wenn man die Unebenheiten des Gepräges beyſeite ſetzt. Sein Werth erfodert ein gewiſſes Gewicht des Metalles aus dem es beſteht, und wenn man weiß wieviel z. E. ein Kubikzoll des Metalles wiegt, findet man daraus den Raum den das Geld einnimmt $= a^3$ . . . freylich immer noch mit der Bemerkung, daß das Metall beym Prägen zuſammengedruckt wird, alſo dichter iſt als ungeprägtes Metall eben der Art. An ſeinen Flächen iſt das Geld dem Abſchlei-

ſchleifen im Zählen, Beyſichtragen u. ſ. w. aus=geſetzt. Je kleiner alſo die Fläche iſt woron die gegebene Maſſe eingeſchloſſen wird, deſto weniger leidet das Geld durch Abſchleifen.

Die kleinſte Fläche zu erhalten, Geld ſo dick zu machen ſo breit es iſt, läſſt ſich wohl nicht bewerkſtelligen. Indeſſen zeigt dieſe Rechnung daß es gut iſt dem Gelde kleinere Durchmeſſer und mehr Dicke zu geben. Die Holländiſchen Ducaten weichen von dieſer Vorſchrift unter dem jetzo gewöhnlichen Gelde am meiſten ab, da wir keine Bracteaten mehr haben.

Dieſe Bemerkung über Verhältniß zwiſchen Durchmeſſer und Dicke des Geldes findet ſich in Friedr. Gottlieb Buſſe Kenntniſſe und Betrachtungen des Münzweſens; 1795. 65. S.

Betrachtung gewiſſer paraboliſcher Linien, welche zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen dienen.

163. Lehrſ. **Wenn** m **eine ganze bejahte Zahl bedeutet, ſo hat die krumme Linie, welcher die Gleichung** $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$ **zugehört, zweene unendliche Schenkel, beyde auf einer Seite der Axe, oder einen auf der einen, den andern auf der andern, nachdem** m **gerade oder ungerade iſt. Sie kann ferner die Axe nicht mehr**

mehr als m mahl ſchneiden, und bey jedem Durchſchnitte wird y verneint oder bejaht, wenn es zuvor bejaht oder verneint war.

Bew. I. Es ſey 12 F. AP = + x; PM = + y; Wenn x unendlich wächſt, ſo wird y = x^m (10) Dieſes iſt für x = + ∞ allemahl bejaht, m mag gerade oder ungerade ſeyn: Aber für x = − ∞ iſt es bejaht oder verneint, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Alſo befindet ſich allemahl ein unendlicher Schenkel für bejahte Abſciſſen über der Axe, der unendliche Schenkel für verneinte Abſciſſen aber iſt über oder unter der Axe, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Bey jedem Durchſchnitte wie in E geht die krumme Linie durch die Axe, und alſo bekömmt y einen Werth, der ſeinem vorigen Werthe entgegengeſetzt iſt.

II. Es können zweene Durchſchnitte in einen zuſammengehen, wie wenn die Abſciſſenlinie, ſich ſelbſt parallel herunter bis in H rückte, und daſelbſt die krumme Linie berührte: Da ſind die Werthe von y auf beyden Seiten des Berührungspunctes einander nicht entgegengeſetzt.

III. Wenn die drey Durchſchnitte C; D; E; in einen zuſammengingen, oder wenn ſich der Bogen CHME in einen Beugungspunct (point d' inflexion; *Cramer* An. des Courb. §. 263.) verwandelte, ſo würden die Ordinaten auf beyden Seiten dieſes dreyfachen Durchſchnitts-

ſchnittspuncts einander entgegengeſetzt ſeyn, welches aber wiederum nicht ſtatt finden würde, wenn vier Durchſchnittspuncte CDEF in einen Schlangenpunct (point de Serpentement, Cramer §. 164. Maupertuis; Mem. de l'Ac. des Sc. 1729. p. 277.) zuſammengingen. Und ſo erhellt, daß die Ordinaten in das Entgegengeſetzte übergehen oder nicht, nachdem die Zahl der Durchſchnittspuncte, die in einen Punct der Axe zuſammengehen, ungerade oder gerade iſt.

IIII. Es giebt ſoviel Durchſchnitte, ſoviel mögliche Wurzeln die Gleichung $y = 0$ hat, welche ich Hauptgleichung nennen will, und die Abſciſſen für die Durchſchnitte, AB; AC; AD; u. ſ. w. ſind die möglichen Wurzeln dieſer Gleichung.

164. Für eine andere krumme Linie 13 Fig. ſey auch $A\pi = x$; $\pi\mu = z = \frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + (m-1).\ px^{m-2} \ldots + t$, ſo iſt dieſes die Differentiallinie jener Hauptlinie (127.) und man kann dergleichen Differentiallinien weiter finden, bis man auf die $m-1$te kömmt, welche eine gerade Linie ſeyn, und $m.(m-1).(m-2)\ldots x$ zur Ordinate haben wird. Jede Differentiallinie kann in Abſicht auf ihre nächſtfolgende, als eine Hauptlinie betrachtet werden.

165. Die Abſciſſen AR; AG; AL; AV; 12 Fig. denen gröſſte oder kleinſte Ordinaten RS;

RS; GH; LN; VW; zugehören, ſind diejenigen, wo z oder $\frac{dy}{dx} = 0$ (153. IIII.) oder wo die Differentiallinie 13 F. ihre Axe ſchneidet (164). Alſo geben die Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, die Abſciſſen, welche in der 12 F. gröſſten oder kleinſten Ordinaten zugehören.

166. Wenn die Axe in m unterſchiedenen Puncten von der krummen Linie geſchnitten wird, und F der letzte Durchſchnitt zur Rechten iſt, ſo iſt die krumme Linie, rechter Hand des Punctes F beſtändig über der Axe (163. I.) alſo iſt ſie linker Hand dieſes Punctes, unter der Axe, oder ihre Ordinaten zwiſchen F und dem nächſtvorhergehenden Durchſchnitte E ſind verneint, und VW iſt ein verneintes gröſſtes in der erſten Bedeutung 153, aber ein kleinſtes in der letzten. Hier wird es bequemer ſeyn die erſte Bedeutung zu brauchen. Eben ſo folgt 163. daß zwiſchen E und D eine bejahte gröſſte Ordinate LN, zwiſchen D und C eine verneinte gröſſte iſt, und ſo ferner die Zeichen der gröſſten Ordinaten zwiſchen jedem Paare Durchſchnitte und zwiſchen dem nächſtvorhergehenden Paare Durchſchnitte, wenn beyde Paare einen mit einander gemein haben, entgegengeſetzt ſind. Und dieſe gröſſten Ordinaten ſind alle Gröſſte in der erſten Bedeutung (153) weil die Ordinaten von jedem Durchſchnitte

ſchnitte bis zu dem nächſtvorhergehenden, anfangs von 0 an wachſen, und nach dieſem wieder bis auf 0 abnehmen müſſen.

167. Wenn für eine Abſciſſe, wo $z = 0$ die Ordinate kein Gröſſtes, ſondern ein Kleinſtes in der erſten Bedeutung 153 wird, ſo verlieren ſich zweene Durchſchnitte, und die Hauptgleichung $y = 0$ enthält zwo unmögliche Wurzeln. Wenn man für der krummen Linie 12 F. Axe KQ annähme, ſo wird ſie zu einer Gleichung vom fünften Grade gehören, die nur eine mögliche Wurzel KY; und vier unmögliche Wurzeln hat, deren zwo durch die kleinſte Ordinate IH; und zwo durch die kleinſte Ordinate XW angezeigt werden. Denn wenn die Ordinate ein Kleinſtes wird, ſo muß ſie zuvor abgenommen haben, und nach dieſem wieder wachſen. Nun kann ſie entweder die äuſerſte unter den gröſſten oder kleinſten Ordinaten ſeyn, wie XW wäre, oder nur von den Mittlern, wie IH; In dem letzten Falle, haben die Ordinaten vor ihr nicht von einem unendlichen Werthe, ſondern von einem endlichen gröſſten ON abgenommen, und wachſen nach ihr wieder bis auf eine endliche gröſſte TS zu; alſo fällt jede kleinſte Ordinate zwiſchen zwo gröſſte, die mit ihr einerley Zeichen haben, und die beyden Durchſchnitte C; D; verlieren ſich, welche ſtatt gefunden hätten, wenn man für der krummen Linie Axe AP angenommen hätte, da ſie zu einer Gleichung gehört hätte,

deren

deren fünf Wurzeln alle möglich ſind, und wo die gröſſte Ordinate GH zwiſchen zwo gröſſte die mit ihr entgegengeſetzte Zeichen gehabt hätten, RS; LN gefallen wären. Iſt die äuſerſte gröſſte oder kleinſte Ordinate zur rechten Hand nicht ein verneintes gröſſtes wie VW ſondern ein bejahtes kleinſtes wie XW, ſo verlieren ſich die beyden Durchſchnitte E und F. Die krumme Linie muß nähmlich rechter Hand des Punctes X beſtändig über der Axe bleiben, und iſt linker Hand auch ſchon darüber geweſen, damit ihre Ordinate bis auf die kleinſte XW abnahm.

Wenn m ungerade iſt, ſo muß die krumme Linie zur Rechten des Durchſchnittes, der wie B 12 F. zum äuſerſten nach der linken Hand liegt, über der Axe ſeyn, weil ſie zur Linken dieſes Durchſchnittes beſtändig unter der Axe bleibt. Daher muß die gröſſte Ordinate RS zwiſchen dieſem Durchſchnitte und dem nächſtvorhergehenden C bejaht ſeyn. Iſt aber m gerade, ſo befindet ſich die krumme Linie linker Hand des Durchſchnittes, der wie R 13 F. am weiteſten zur Linken liegt, beſtändig über der Axe, und alſo iſt die gröſſte Ordinate zwiſchen ihm und dem nächſtvorhergehenden verneint. Wenn alſo der Hauptgleichung äuſerſte Wurzeln AE, AF, und AC, AB, möglich ſeyn ſollen, ſo muß die gröſſte bejahte Wurzel der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}$

 $= 0$,

$=0$, oder die kleinſte verneinte, wenn dieſe Gleichung keine bejahten Wurzeln hat, (das iſt, die Wurzel dieſer Gleichung, welche unter den gröſſten oder kleinſten Ordinaten der 12 F. die giebt, welche am weiteſten nach der rechten Hand liegt,) in y geſetzt ein gröſſtes verneintes geben. Die gröſſte verneinte Wurzel der Differentialgleichung aber, oder die kleinſte bejahte, wenn ſie keine verneinten hat, muß in y geſetzt ein gröſſtes Bejahtes oder Verneintes geben, nachdem m gerade oder ungerade iſt.

Umgekehrt gilt dieſes nicht. Wenn man für die Axe der krummen Linie 12 F. eine Parallele mit AP in der Weite XZ annimmt, ſo iſt die äuſerſte gröſſte Ordinate ZW ſowohl verneint als vorhin VW; und doch hat die Hauptgleichung alsdenn vier unmögliche Wurzeln.

168. Wenn die Hauptgleichung m unterſchiedene mögliche Wurzeln hat, oder die Axe von der krummen Linie in m unterſchiedenen Puncten geſchnitten wird, und wenn die Differentialgleichung n bejahte Wurzeln hat, ſo ſind die Ordinaten y welche dieſen Wurzeln der Differentialgleichung in der Hauptlinie zugehören, lauter gröſſte, und jede zwo nächſte ſind einander entgegengeſetzt; Heiſſt man alſo die äuſerſte zur rechten, wie VW 11 F. die $n$te und die vorhergehenden LN; GH, ... die

n — 1te; n — 2te; u. ſ. w. ſo iſt die
nte; n — 2te; n — 4te; .... n — 2kte verneint
n - 1te; n - 3te; n - 5te; n - 2k - 1te; bejaht.
Will man alſo wiſſen, wie die erſte beſchaffen iſt, die der Abſciſſe AG zugehört, ſo iſt ſie verneint oder bejaht, nachdem n ungerade oder gerade iſt; denn ihre Zahl 1; iſt im erſten Falle $= n - 2k$ und im zweyten $= n - 2k - 1$.

169. In der Vorausſetzung (168) fallen nicht weniger als n Durchſchnitte rechter Hand des Punctes A 12 F. oder die Gleichung $y = 0$ hat nicht weniger als n bejahte Wurzeln. Denn zwiſchen jede zwo nächſte gröſſte Ordinaten fällt ein Durchſchnitt, weil ſie einander entgegengeſetzt ſind (166): Zwiſchen n gröſſte Ordinaten, fallen alſo $n - 1$ Durchſchnitte; und weil die nte verneint iſt (168) ſo fällt zu ihrer rechten Hand noch einer.

170. Wenn n ungerade iſt, ſo iſt die erſte gröſſte Ordinate GH verneint (168). Iſt nun in der Gleichung (163) das letzte Glied u bejaht, ſo iſt die Ordinate für $x = 0$ oder die Ordinate durch A, bejaht, und folglich ſchneidet die krumme Linie die Axe zwiſchen A und G; und dieſes nur einmahl, denn geſchähe es mehr als einmahl, ſo würde die krumme Linie an dem nächſten Durchſchnitte über die Axe, an dem nächſtfolgenden wieder darunter kommen, und müſſte alſo die Axe noch einmahl ſchneiden um

bey A darüber zu ſeyn: Alſo gäbe es zum wenigſten drey Durchſchnitte; oder, wie auf eben die Art erhellt, fünf, ſieben, u. ſ. w. Zwiſchen jedem Paar Durchſchnitte aber fällt eine gröſſte Ordinate, daher wäre GH nicht die nächſte gröſſte Ordinate bey A.

Iſt u verneint, ſo befindet ſich die krumme Linie bey A unter der Axe, und wenn ſie alſo die Axe zwiſchen G und A ſchneiden ſollte, ſo müſſte ſolches entweder zweymahl, viermahl, ſechsmahl u. ſ. w. geſchehen; welches wiederum gröſſte Ordinaten zwiſchen A und GH gäbe; alſo ſchneidet ſie die Axe zwiſchen A und G gar nicht.

Solchergeſtalt giebt es, wenn n ungerade iſt, $n+1$; oder n; bejahte Wurzeln der Hauptgleichung, nachdem u bejaht oder verneint iſt.

171. Wenn n gerade iſt, ſo iſt die erſte gröſſte Ordinate bejaht, (168) und es wird wie vorhin erwieſen, daß zwiſchen ihr und dem Anfange der Abſciſſen, kein Durchſchnitt oder nur einer fällt, das iſt, daß die Gleichung n oder $n+1$ bejahte Wurzeln hat, nachdem u in ihr bejaht oder verneint iſt.

Von den gleichen Wurzeln.

172. Lehrſ. Wenn die Hauptgleichung $y = 0$; r gleiche Wurzeln enthält, ſo enthält die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ von dieſen Wurzeln $r-1$;

Bew.

Bew. Wenn in der erſten Gleichung $x=e$, und noch einmahl $x=e$; u. ſ. f. n mahl $x=e$; ſo kommen in derſelben n Wurzelgleichungen jede $x-e=0$ als Factoren vor, oder es iſt $y=(x-e)^r.\ P$ wo P das übrige bedeutet, was in die genannten n Wurzelgleichungen multiplicirt wird, um das Product zu erhalten, den Factor $x-e$ aber nicht enthält. Folglich iſt $\frac{dy}{dx}=r.(x-e)^{r-1}.P+(x-e)^r.\frac{dP}{dx}=$ $(x-e)^{r-1}\left(r.P+\frac{(x-e)^r.dP}{dx}\right)$ Die Differentialgleichung enthält alſo ein Product aus $r-1$ Wurzelgleichungen, deren jede $x-e=0$ iſt, oder $r-1$ Wurzeln jede $x=e$. Dieſer Beweis gilt, wie offenbahr iſt, e mag möglich oder unmöglich ſeyn.

Ex. $x^5 * -8x^3+24x^2-28x+16=y$ $=(x^4-4x^3+8x^2-8x+4).(x+4)=$ $(x^2-2x+2)^2.(x+4)=(x-1+\sqrt{-1}).$ $(x-1-\sqrt{-1}).(x+4)$. Hier kann alſo einmahl $e=1-\sqrt{-1}$ und $P=(x-1-\sqrt{-1})^2.(x+4)$ zweytens $e=1+\sqrt{-1}$ und $P=(x-1+\sqrt{-1})^2.(x+4)$ beydemahl $r=2$ ſeyn; oder die Gleichung $y=0$ hat alſo zwo gleiche Wurzeln, jede $=1-\sqrt{-1}$ und zwo gleiche, jede $=1+\sqrt{-1}$. Folglich muß die Gleichung $\frac{dy}{dx}=0$ ſo wohl $1+$

 $\sqrt{-}$

$\sqrt{-1}$ als $1 - \sqrt{-1}$ zur Wurzel haben. Es iſt aber $\frac{dy}{dx} = 5.\,(x^4 * - \frac{24}{5}x^2 + \frac{48}{5}x - \frac{28}{5})$ wo der letzte Factor $= 0$ wird, wenn man ſtatt x die erwähnten Werthe ſetzt. Dieſes leicht zu prüfen, darf man nur bemerken, daß $(1 \pm \sqrt{-1})^2 = \pm 2\sqrt{-1}$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^3 = -2 \pm 2\sqrt{-1}$ und $(1 \pm \sqrt{-1})^4 = -4$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^5 = -4 \mp 4\sqrt{-1}$ Wenn man den erwähnten letzten Factor von $\frac{dy}{dx}$ mit $x^2 - 2x + 2$ als der quadratiſchen Gleichung, deren Wurzeln $1 \pm \sqrt{-1}$ ſind, dividirt, ſo kömmt $x^2 + 2x - \frac{14}{5}$ zum Quotienten, welches $= 0$ geſetzt zwo mögliche Wurzeln hat.

173. Wenn in der Vorausſetzung (168) ſonſt nichts geändert wird, als daß unter den n bejahten Wurzeln, r gleiche ſind, ſo gehen bey der Abſciſſe, die jeder dieſer r Wurzeln gleich iſt, $r - 1$ Gröſſte in einem Punct zuſammen (166) und die Bogen der krummen Linie auf beyden Seiten dieſes Punctes liegen auf einer Seite der Axe oder auf verſchiedenen, nachdem r gerade oder ungerade iſt. (163. III.) Uebrigens bleiben die Sätze 169; 170; 171; noch wahr.

Von

Von den unmöglichen Wurzeln.

174. Lehrſ. Jede beſtimmte rationale Gleichung, hat entweder keine unmöglichen Wurzeln, oder unmögliche Wurzeln in gerader Menge. Bekannter maaſſen wird o als eine gerade Zahl angeſehn.

Bew. I. In 163; ſey m gerade, ferner u eine bejahte Gröſſe; ſo iſt für x = o die krumme Linie über der Axe. Weil ſie nun für ein bejahtes unendliches x, auch über der Axe iſt, ſo ſchneidet ſie rechter Hand des Anfangs der Abſciſſen, die Axe entweder gar nicht, oder zweymahl, oder viermahl u. ſ w. Sie muß nähmlich zu jedem Durchſchnitte, da ſie unter die Axe kömmt, noch einen machen, da ſie wieder herauf kömmt. Die beſtimmte Gleichung alſo, die heraus kömmt, wenn y = o geſetzt wird, hat keine bejahte Wurzel, oder deren eine gerade Zahl.

Nun iſt die krumme Linie auch für das unendliche verneinte x über der Axe; ſchneidet alſo wiederum die Axe linker Hand des Anfangs der Abſciſſen, gar nicht, oder ſie macht eine gerade Menge Durchſchnitte. Alſo giebt es auch nur eine gerade Menge möglicher verneinter Wurzeln.

Folglich machen die Mengen beyderley Wurzeln auch eine gerade Summe aus. Und weil die Menge aller Wurzeln ebenfalls gerade iſt, ſo muß die Menge der unmöglichen gerade ſeyn.

II. m gerade, u verneint, (163) alſo die krumme Linie für x = o unter der Axe. Nach eben der Art zu ſchlieſſen giebt es eine ungerade Menge bejahter, und auch eine ungerade Menge verneinter Wurzeln. Beyder Mengen Summe iſt gerade, alſo auch die Menge der unmöglichen.

III. m ungerade, u bejaht, giebt eine gerade Menge bejahter Wurzeln, eine ungerade verneinter; beyder Mengen Summe iſt ungerade, und läſſt von der ungeraden Menge aller Wurzeln abgezogen eine gerade Menge unmöglicher übrig.

IIII. m ungerade, u verneint, giebt eine ungerade Menge bejahter Wurzeln und eine gerade verneinter, alſo wieder eine gerade Menge unmöglicher.

Man ſ. hievon Eulers Alg. 272. IIII. angef. Schrift.

175. Lehrſ. Die Hauptgleichung hat ſoviel Paare unmöglicher Wurzeln, I) ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln die Differentialgleichung hat; II) ſo viel den möglichen Wurzeln der Differentialgleichung zugehörige y kleinſte werden.

Bew. I. Geſetzt, die Differentialgleichung habe α mögliche Wurzeln, und folglich m — 1 — α unmögliche (164). Wenn nun ihre möglichen Wurzeln, lauter gröſſte y geben, ſo ſind zugleich

zugleich jede zwey nächſte ſolche y einander entgegengeſetzt. Wären ſie einander nicht entgegengeſetzt, ſondern lägen wie z. E. XW; ON 12 F. auf einer Seite der Axe KQ; ſo wird die Axe zwiſchen ihnen von der krummen Linie entweder geſchnitten oder nicht. Geſchicht das erſte, ſo muß die krumme Linie die Axe zwiſchen O und X entweder zweymahl, oder viermahl, oder ſechsmahl u. ſ. w. ſchneiden, um von N auf die andere Seite der Axe, und denn wieder nach W auf die erſte zu kommen; zwiſchen jedem Paare Durchſchnitte aber fällt ein Gröſſtes (166) alſo wären die genannten y nicht die nächſten Gröſſten. Die krumme Linie ſchneidet alſo zwiſchen ihnen die Axe nicht, und weil ON; XW; entweder Gröſſte oder Kleinſte ſind, ſo müſſen die Ordinaten von ON bis WX entweder abnehmen oder zunehmen, ohne o zu werden, und XW muß ein kleinſtes oder gröſſtes ſeyn, nachdem ON ein gröſſtes oder kleinſtes iſt.

Wenn alſo die Wurzeln der Differentialgleichung lauter Gröſſte geben, ſo fällt zwiſchen jedes Paar der nächſten Gröſſten ein Durchſchnitt, und nur einer; und es giebt dieſerwegen $\alpha - 1$ Durchſchnitte.

Wenn die äuſerſte Ordinate für eine Wurzel der Differentialgleichung, zur rechten oder zur linken Hand, ein Gröſſtes wie VW oder RS iſt, ſo müſſen die Ordinaten rechter Hand

 der

der VW und linker Hand der RS; abnehmen; und weil kein gröſſtes oder kleinſtes mehr folgt, ſo nehmen ſie bis auf 0 ab, und alſo gibt es rechter Hand von VW und linker Hand von RS; noch einen Durchſchnitt, F und B, und von jeder Art nur einen, denn gäbe es mehr, ſo fiele zwiſchen jedes Paar ein Gröſſtes y, (167) und VW; RS, wären nicht die äuſerſten.

Alſo kann die Hauptgleichung nicht mehr als $\alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$ mögliche Wurzeln haben, wenn die Differentialgleichung deren α hat, und behält alsdenn $m - \alpha - 1$ unmögliche, ſoviel als die Differentialgleichung hatte. Daß $m - \alpha - 1$ eine gerade Zahl iſt, und ſich alſo dieſe Wurzeln mit Paaren zählen laſſen, iſt ſchon bekannt. (174.)

II. Giebt eine mögliche Wurzel der Differentialgleichung ein kleinſtes y, ſo verlieren ſich dieſer wegen zweene Durchſchnitte und nicht mehr (167) und es giebt in der Hauptgleichung ein Paar unmöglicher Wurzeln; alſo ſoviel Paare, ſo vielmahl ſolches geſchicht.

176. Man wird die Frage, wieviel unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung ſind, entſcheiden, wenn man die Wurzeln der Differentialgleichung ſucht, und die möglichen darunter in die Hauptgleichung ſetzt, und ſieht, ob ſie gröſſte oder kleinſte geben, welches man erfährt, wenn man nebſt jedem y das eine ſolche Wurzel

gibt,

gibt, auch das y ſucht, das ein etwas gröſſeres oder kleineres x als dieſe Wurzel, giebt, um zu ſehen, ob es gröſſer oder kleiner iſt als das, welches der Wurzel zugehört. Dieſe Arbeit aber kann man ſich durch folgende Betrachtung erleichtern: y iſt ein bejahtes gröſſtes oder kleinſtes, nachdem ddy verneint oder bejaht iſt, (155. III;) und ein verneintes gröſſtes oder kleinſtes; (das iſt, ein kleinſtes oder gröſſtes in der Bedeutung (155. III; oder in der zweyten 153) nachdem ddy bejaht oder verneint iſt, oder y iſt überhaupt in gegenwärtiger Bedeutung ein gröſſtes oder kleinſtes, nachdem $\frac{ddy}{dx^2}$ mit ihm verſchiedene oder einerley Zeichen hat; d. i. nachdem $\frac{yddy}{dx^2}$ verneint oder bejaht iſt.

177. Jede der Gleichungen $p=0$; $q=0$; $r=0$; u. ſ. w. wo p; q; r; die Bedeutungen 155 V; nicht die (163) haben; kann nach (163) in Abſicht auf die nächſthöhere als eine Hauptgleichung betrachtet werden, und hat alſo ſoviel Paare unmöglicher Wurzeln als dieſe nächſthöhere hat. Da hat nun p gegen r eben ſo ein Verhalten wie vorhin y gegen q; Wenn man alſo eine Wurzel der Gleichung $p=0$ in $\frac{dy}{dx}$ und in

q ſetzt,

q ſetzt, ſo zeigt ſie ein paar unmögliche Wurzeln in $\frac{dy}{dx}=o$; und folglich (175. I.) ein $y=o$ an, wofern ſie $\frac{dy}{dx}q$ bejaht macht. Eben ſo, wenn man eine Wurzel der Gleichung $q=o$ in p und r ſetzt, und ſie pr bejaht macht, ſo zeigt ſie ein paar unmögliche in $q=o$; und folglich in $p=o$, und in $\frac{dy}{dx}=o$; und in $y=o$ an. Und eine Wurzel von $r=o$ zeigt ein paar unmögliche in $q=o=p=\frac{dy}{dx}=y$ an, wenn ſie q. s bejaht macht, u. ſ. w. Aber das Paar unmögliche Wurzeln, das z. E. dieſes bejahte q. s anzeigte, könnte vielleicht mit einem Paare einerley ſeyn, das durch ein bejahtes p. r angezeigt würde. Alſo darf man nicht in der Hauptgleichung $y=o$ ſo viel Paare unmöglicher Wurzeln annehmen, ſo viel ſich ſolcher bejahter Producte machen laſſen, aber das iſt richtig, daß es nicht mehr Paare unmöglicher Wurzeln in $y=o$ giebt, als ſich mit den Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx}=o$ bejahten Producte y. p; und mit denen der Gleichung $p=o$ bejahten Producte $\frac{dy}{dx}$. q und ſo mit den Wurzeln jeder Differentialgleichung, bejahte Pro-

Producte aus dem vor ihr nächſtvorhergehenden Differentiale in das nach ihr nächſtfolgende machen laſſen. Die bejahten Producte y. p nähmlich zeigen der Gleichung $y = 0$ unmögliche Wurzeln der zweyten Art (175. II. und 176) an; aber die übrigen bejahten Producte der Gleichung $y = 0$ unmögliche Wurzeln der erſten Art (175. I.)

178. Wenn eine gewiſſe Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ macht, daß $p = 0$ wird, ſo nehmen um dieſe Wurzel herum die Ordinaten y beſtändig zu oder ab. (155; VI.) Alſo fällt das y das der Wurzel von $\frac{dy}{dx} = 0$ die $p = 0$ macht, zugehört, nicht zwiſchen zween Durchſchnitten, und dieſer Umſtand zeigt zwo unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung an, ſo ſind zwo Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ unmöglich, wenn eine Wurzel der Gleichung $p = 0$ in q geſetzt, $q = 0$ giebt, u. ſ. w. Wenn nähmlich einerley Werth von x; zugleich zwo nach einander folgende Differentialgleichungen auf 0 bringt, ſo zeigt ſolches ein paar unmögliche Wurzeln in der Gleichung, die vor beyden nächſtvorhergeht, und folglich in der Hauptgleichung an.

179. Wenn einerley Werth von x zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q auf 0 bringet, ſo zeigt dieſes gewiß ein paar unmögliche Wurzeln der Hauptgleichung an (178). Das y aber, das dieſem x zugehört, iſt doch ein Gröſſtes in gegenwärtiger Bedeutung, wenn r das ihm entgegengeſetzte Zeichen hat. (155; VII. und 176.) alſo hat es in dieſem Falle auf jeder Seite einen Durchſchnitt oder eine mögliche Wurzel. Dieſe beyden Wurzeln werden unmöglich, wenn y ein Kleinſtes wird, oder r mit ihm einerley Zeichen bekömmt. In gegenwärtigem Falle giebt es alſo ein oder zwey Paare unmöglicher Wurzeln, nachdem y. r verneint, oder bejaht iſt.

Wenn in (178; 179) das Element der krummen Linie der Abſciſſenlinie parallel iſt, ſo findet ſich in (178) ein Beugungspunct, in (179) ein Schlangenpunct (163; III.)

180. Brächte einerley x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q und r auf 0; ſo gäbe es zwo unmögliche Wurzeln wegen p = 0; und wenn yr verneint wäre, würde ſolches zwo mögliche anzeigen; die wegen y. r = p wegfallen, daß es daher vier unmögliche giebt.

181. Ueberhaupt erhellt nach dieſer Art zu ſchlieſſen und aus 155 VIII. folgendes: Wenn einer-

einerley Werth von x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. w. die erſten 2n Differentialgleichungen auf 0 bringt, ſo giebt es in der Hauptgleichung 2n unmögliche Wurzeln. Bringt aber einerley Werth von x, die erſten 2n + 1 Differentialgleichungen auf 0; ſo giebt es 2n oder 2n + 2 unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung, nachdem das Product aus dem dieſem x zugehörigen y in das 2n + 2te Differential verneint oder bejaht iſt.

Wegen (177) gilt eben dieſes von 2n oder 2n + 1 nach einanderfolgenden Differentialgleichungen, wenn es ſchon nicht die erſten ſind; da man denn ſtatt y das Differential nehmen muß, das vor den 2n + 1 nach einander folgenden zunächſt vorhergeht.

182. Wenn man die Axe AP mit einer parallelen Bewegung herunter führt, ſo rücken Durchſchnitte wie CD immer näher zuſammen, gehen endlich in einen, wenn die Axe die krumme Linie in H berührte, und werden nachgehends unmöglich, wenn ſie in die Lage KQ kömmt. Daher ſagt man, daß die Wurzeln einer Gleichung durch eine beſtändige Näherung, erſt gleich, darnach unmöglich werden. Dieſes erklärt aber nur die eine Art (175. II.) welche auf das letzte Glied einer Gleichung ankömmt, durch deſſen Veränderung ſolche unmögliche Wurzeln in mögliche und umgekehrt könnten verwandelt werden.

Z. E.

Z. E. die Gleichung $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + Ka = y$ würde der krummen Linie auf die Axe KQ bezogen zugehören, und hätte 4 unmögliche Wurzeln; Aber die $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + Ka - KA = y$ gehörte eben der krummen Linie auf AP bezogen zu, und hätte lauter mögliche Wurzeln. Wenn aber Wurzeln der Differentialgleichungen unmöglich ſind, ſo kömmt die Unmöglichkeit der Wurzeln der Hauptgleichung auf ihre Coefficienten an.

183. Anm. Die Regeln 176. 181. nebſt noch einigen andern, finden ſich in des Abbé de Gua Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1741.

184. Ex. Geſetzt, man hat eine Gleichung von 48 Graden; deren Differentialgleichung alſo vom 47 iſt; Dieſe Differentialgleichung hat 24 unmögliche Wurzeln, 6 mögliche bejahte, und 17 mögliche verneinte; unter den bejahten findet ſich eine, welche ein Kleinſtes giebt, und unter den verneinten finden ſich deren drey. Alſo giebt es in der Hauptgleichung 24 unmögliche Wurzeln, wegen der 24 unmöglichen ihrer Differentialgleichung (175. I.) und vier Paare wegen der vier kleinſten, (175. II.) folglich 32 unmögliche Wurzeln. Nun geben fünf bejahte Wurzeln der Differentialgleichung Gröſſte. Von dieſen Gröſſten müſſen eine oder zwo mit dem Kleinſten auf eine Seite fallen, nachdem das Kleinſte ein äuſerſtes iſt oder nicht (167) die übrigen geben vier

bejahte

bejahte Wurzeln, wie man ſich leicht überzeugen kann, wenn man ſich die Figur entwerfen will. Alſo hat die Gleichung gewiß vier bejahte Wurzeln. Wären die 17 Ordinaten, die verneinten Wurzeln der Differentialgleichung zugehören, lauter Gröſſte, ſo geben ſie 16 Durchſchnitte zwiſchen jedem Paare, und einen linker Hand der äuſſerſten, alſo 17 verneinte Wurzeln, von denen aber wegen der drey kleinſten, 3. 2 = 6 abgehen, daß alſo 11 verneinte übrig bleiben. Nun ſind 48 — 32 = 16 mögliche Wurzeln, von denen man weiß, daß 4 bejaht, 11 verneint ſind. Eine kann noch bejaht oder verneint ſeyn, nachdem die krumme Linie zwiſchen dem Gröſſten, das dem Anfange der Abſciſſen rechter oder linker Hand zunächſt liegt, rechter oder linker Hand geſchnitten wird. Wird aber die Axe zunächſt rechter Hand des Anfangs der Abſciſſen geſchnitten, ſo iſt y verneint für x = 0; Und wird ſie linker Hand geſchnitten, ſo iſt y bejaht für x = 0. Alſo iſt die 16 Wurzel bejaht oder verneint, nachdem der Werth von y für x = 0, d. i. das lezte Glied der Gleichung verneint oder bejaht iſt. Gua hat dieſen lezten Umſtand aus dem Zeichen des lezten Gliedes als ein Product aus den Wurzeln betrachtet herleiten wollen, aber dabey an die unmöglichen Wurzeln nicht gedacht, die in dieſes Product auch kommen.

Anwendung auf die cubiſchen Gleichungen.

185. Ex. Wenn $x^3 * + qx + r = y$ ſo iſt $3x^2 + q = \frac{dy}{dx}$ welches $= 0$ wird, wenn $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}q}$ Iſt alſo q in der cubiſchen Gleichung bejaht, ſo hat die Differentialgleichung, und folglich die Hauptgleichung zwo unmögliche Wurzeln. (175. I.) Man nehme alſo $x^3 * - px + r = y$ wo p für ſich was bejahtes iſt, und das Glied px wegen des vorgeſetzten Zeichens verneint wird; So iſt $3x^2 - p = \frac{dy}{dx}$ deren Wurzeln $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p}$, ſind. Sollen nun alle Wurzeln der cubiſchen Gleichung möglich ſeyn, oder die krumme Linie, die ihr zugehört, die Axe dreymahl ſchneiden, ſo muß die Ordinate, die zu $x = + \sqrt{\frac{1}{3}p}$ gehört, ein verneintes, und die zu $x = - \sqrt{\frac{1}{3}p}$ gehört, ein bejahtes Gröſſtes ſeyn. (167) Folglich muß $\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} - p\sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ oder $-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ verneint ſeyn. Dieſes erfolgt von ſich ſelbſt, wenn r verneint iſt. Iſt aber r bejaht, ſo ſetzt es zum voraus, daß $\frac{4}{9}p^2 . \frac{1}{3}p > r^2$ oder $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}r^2$. Eben ſo ſoll $-\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} + p\sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ oder $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p} + r$, bejaht ſeyn. Das iſt es nun allemahl, wenn r bejaht iſt: Iſt aber r verneint, ſo folgt daraus wiederum, daß der erſte bejahte Theil gröſſer als der andere verneinte, oder $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}r^2$ iſt. Dieſe Vergleichung zwiſchen p und r beſtimmt

beſtimmt ſich alſo aus der erſten Vorausſetzung, wenn r bejaht, aus der zweyten wenn es verneint iſt. Folglich enthält jede cubiſche Gleichung, deren zweytes Glied fehlt, unmögliche Wurzeln wie 175. I. wenn der Coefficient des dritten Gliedes bejaht iſt, und wie 175. II. wenn $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} r^2$ welche Regeln bekannt ſind. (S. Alg. 699. 700.) Wenn $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} r^2$ ſo wird eine von beyden Ordinaten, die zu $x = + \sqrt{\frac{1}{3} p}$ gehören, $= 0$ oder die krumme Linie berühret da die Axe und es gehen zweene Durchſchnitte in einen zuſammen, oder die Gleichung hat zwo gleiche Wurzeln. Wenn man ſich die Figuren entwerfen will, ſo wird man gleich ſehen, daß dieſe Berührung rechter oder linker Hand des Anfangs der Abſciſſen fallen muß, nachdem die krumme Linie beym Anfange der Abſciſſen über oder unter der Axe iſt. Alſo ſind die gleichen Wurzeln der Gleichung beyde bejaht oder verneint, nachdem ihr letztes Glied bejaht oder verneint iſt.

In $x^3 * - 27x + 54 = 0$, iſt $p = 27$; $r = + 54 = 2p$ alſo $\frac{1}{4} r^2 = p^2 = \frac{1}{27} 27^3 = \frac{1}{27} p^3$. Die gleichen Wurzeln ſind beyde $+ 3$, bejahte wie das letzte Glied. Die dritte muß wegen des fehlenden zweyten Gliedes $= - 2 . 3 = - 6$ ſeyn.

Wenn alle drey Wurzeln möglich ſind, ſo iſt $\frac{r}{p\sqrt{p}}$ gröſſer als $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ oder als $\frac{2}{3}$. tang 30° In

Lamberts Zuſätzen zu den logarithmiſchen und tri-gonometriſchen Tabellen dient die 29. Tafel ſolche Gleichungen aufzulöſen. Sein 89. §. giebt die Theorie davon.

Erweis einer Regel, die Zahl der bejahten und verneinten Wurzeln in einer Gleichung aus den Zeichen der Coefficienten zu finden.

186. **Erkl.** Wenn in einer Gleichung zweene nach einander folgende Coefficienten einerley Zei-chen, beyde + oder beyde − haben, ſo heiſſt dieſes eine Folge der Zeichen (ſucceſſio) wenn ſie aber beyde verſchiedene Zeichen, einer + der an-dere − haben, ſo heiſſt ſolches eine Abwechs-lung (permutatio).

187. Lehrſ. **Eine quadratiſche Gleichung, deren Wurzeln alle möglich ſind, hat ſoviel bejahte Wurzeln, ſoviel in ihr Abwechslun-gen von Zeichen ſind, und ſoviel verneinte, ſoviel ſie Folgen von Zeichen hat.**

Bew. Wenn p; q; allemahl bejahte Gröſſen bedeuten, ſo ſind folgende vier Formen von qua-dratiſchen Gleichungen möglich:

I) $x^2 + px + q$; II) $x^2 - px + q$; III) $x^2 + px - q$; IIII) $x^2 - px - q$; I. hat lauter Folgen, weil das erſte Glied allemahl + hat; II hat zwo Abwechslungen + − und − + III hat eine Folge + + und eine Abwechſelung, + −;

$+-$; IIII eine Abwechslung und eine Folge $+-$ und $--$. Die Wurzeln ſind von I; $-\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$ beyde verneint, weil der Irrationaltheil kleiner als der Rationaltheil iſt, und ſind auch in der Gleichung zwo Folgen; von II; $+\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$, beyde bejaht wie in der Gleichung zwo Abwechslungen ſind; von III; $-\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp + q)$ eine bejaht, die andere verneint, und eben ſo von IIII; $+\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp + q)$, wie in dieſen beyden Gleichungen eine Folge und eine Abwechslung iſt.

188. Lehrſ. **Eine Reihe der Zeichen $+$ und $-$ wie man will unter einander vermengt, doch ſo, daß ſie ſich mit $+$ anfängt, hat Abwechslungen in gerader Zahl, wenn ſie ſich mit $+$; und in ungerader, wenn ſie ſich mit $-$ endigt.**

Bew. Man ſetze eine ſolche Reihe Zeichen werde durch ein neues vermehrt, aber ſo, daß ihr erſtes Glied $+$, und das letzte wie es zuvor war, $+$ oder $-$ bleibe. Ich behaupte, die Abwechslungen werden alsdenn entweder gar nicht, oder um ein Paar vermehrt werden. Denn wenn man das Zeichen irgendwo mitten in die Reihe ſetzt, ſo bringt man es entweder zwiſchen zwey ähnliche ($+$ zwiſchen zwey $+$; oder $-$ zwiſchen zwey $-$) und denn kömmt keine neue Abwechslung zu den vorigen; Bringt man es zwiſchen zwey ihm unähnliche, ſo entſtehen zwo neue Ab-

wechslungen, zwiſchen ein ähnliches und ein unähnliches, ſo wird die Abwechslung, die vorhin zwiſchen dieſen beyden war aufgehoben, ſtatt ihrer aber kömmt eine andere Abwechslung, und noch eine Folge. Setzt man das neue Zeichen vor das erſte oder nach dem letzten, ſo muß es ihm ähnlich ſeyn, und giebt alſo eine neue Folge, keine Abwechslung. In allen dieſen Fällen werden die Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar vermehrt. Iſt alſo der Satz von einer Reihe wahr, ſie mag ſo wenig Zeichen haben als ſie will, ſo iſt er auch von jeder andern wahr, die mehr Zeichen enthält. Die kürzeſte Reihe, die ſich mit + endigt, iſt + − + und hat eine gerade Zahl von Abwechslungen, alſo haben alle Reihen, die ſich mit + endigen, eine gerade Zahl.

Die kürzeſte Reihe, die ſich mit − endigt, iſt + − und hat nur eine Abwechslung, alſo haben alle Reihen, die ſich mit − endigen, eine ungerade Zahl von Abwechslungen, denn jedes neue Zeichen, das hinzukömmt vermehrt die vorige Zahl der Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar.

189. Lehrſ. Geſetzt, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (167) habe lauter mögliche Wurzeln; und darunter ſoviel bejahte, als ſie Abwechslungen hat: Die Gleichung $y = 0$ habe auch lauter mögliche Wurzeln; So behaupte ich, die

die Gleichung $y = 0$ werde auch ſoviel bejahte Wurzeln haben als ſie Abwechslungen hat.

Bew. In $\frac{dy}{dx} = 0$ ſind ſoviel Folgen und Abwechslungen als im $x^m + px^{m-1} \ldots + tx$ weil $\frac{dy}{dx}$ nur aus dieſem Theile der Hauptgleichung wird, wenn man jedes Glied nach den Regeln des Differentiirens ändert, welches aber die Zeichen nicht ändert.

Dieſe Zahl der Abwechslungen, und zugleich der bejahten Wurzeln in der Differentialgleichung ſey $= n$; und gerade, ſo iſt das letzte Zeichen in der Differentialgleichung $+$ (188) alſo können die beyden letzten Glieder der Hauptgleichung $+ tx + u$ oder $+ tx - u$ heiſſen. Im erſten Falle iſt die Anzahl der Durchſchnitte für bejahte Abſciſſen, oder der bejahten Wurzeln $= n$; im zweyten $n + 1$ (171). Im erſten Falle aber ſind in der Hauptgleichung n Abwechslungen, wie in der Differentialgleichung; im zweyten $n + 1$, alſo beydemahl ſoviel bejahte Wurzeln als Abwechslungen.

Nun ſey n ungerade. So iſt der Differentialgleichung letztes Zeichen $-$ (188) alſo ſind der Hauptgleichung beyde letzten Glieder $- tx + u$ oder $- tx - u$. Im erſten Falle ſind $n + 1$ im zweyten n bejahte Wurzeln (170). Jedesmahl ſo viel als Abwechslungen.

190. Lehrſ. In jeder Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, giebt es ſoviel bejahte, ſoviel es Abwechslungen giebt.

Bew Der cubiſchen Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, Differentialgleichung iſt eine quadratiſche, die lauter mögliche Wurzeln hat (175. I.) Von dieſer nun iſt der Satz erwieſen, (187) und folgt alſo von ihr auf die cubiſche (189). Eine biquadratiſche, die lauter mögliche Wurzeln enthält, hat zur Differentialgleichung eine cubiſche die auch lauter mögliche Wurzeln enthält, (175. I.) Von der cubiſchen iſt der Satz nun jetzo erwieſen, alſo folgt er für die biquadratiſche (189). Und ſo von der biquadratiſchen auf die vom fünften Grade, deren Differentialgleichung ſie iſt, und ſo ohne Ende fort von jeder Gleichung auf die nächſthöhere, von der ſie als eine Differentialgleichung angeſehen werden kann.

Daß dieſe Schlüſſe wegfallen, wenn nicht alle Wurzeln möglich ſind, wird aus ihren Gründen, 166. u. f. erhellen. In der That kann man auch unmögliche Wurzeln weder als bejaht noch als verneint anſehen, daß es alſo natürlich iſt, wenn ſie ſich nicht nach einer ſolchen Regel beurtheilen laſſen.

191. Eine Gleichung vom Grade m hat m + 1 Glieder, und m Folgen und Abwechslungen zuſammen; hat ſie alſo n Abwechslungen

und

und bejahte Wurzeln, ſo giebt es in ihr $m-n$ Folgen und verneinte Wurzeln. Wenn $n=0$, ſo erhellt, daß eine Gleichung, die lauter Folgen hat, deren Glieder alſo bejahte Zeichen haben müſſen, keine andern als verneinte Wurzeln haben kann.

192. Wenn man das Zeichen des zweyten, vierten, ſechſten u. ſ. w. der geraden Glieder einer Gleichung ändert, ſo verwandelt man dadurch die Abwechslungen in Folgen, und die Folgen in Abwechslungen, alſo die verneinten Wurzeln in bejahte, und die bejahten in verneinte.

Ex. $x^3-3x^2-10x+24$ hat zwo Abwechslungen und eine Folge, zwo bejahte Wurzeln 2; 4; und eine verneinte -3; $x^3+3x^2-10x-24$ hat zwo Folgen und eine Abwechslung, zwo verneinte Wurzeln -2; -4; und eine bejahte $+3$.

193. Anm. Die krummen Linien (163) ſind von verſchiedenen Mathematikverſtändigern zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen gebraucht worden. Der ſeel. Hauſen machte mir ſie bekannt, als er mich den Gebrauch der Reihen (Alg. 304.) lehrte, denn man ſieht leicht, daß die Hauptlinie eine dortige Hauptreihe, und die Differentiallinien, Differenzenreihen für verſchwindende e vorſtellen. Man kann auch durch Betrachtung dieſer krummen Linien vieles, das dieſe Reihen, und darauf beruhende Eigenſchaften der Gleichungen betrifft leicht zeigen, das ich in einer 1739. zu Leipzig gehaltenen Diſputation Theotia radicum in aequationibus aus der bloſſen arithmetiſchen Betrachtung der Reihen mühſamer hergeleitet habe.

habe. Einige Zeit nach Hauſens Tode kam ich bey Unterſuchung dieſer krummen Linien auf den Beweis des Satzes (190). Hauſen hat mir nie etwas geſagt, daraus ich hätte urtheilen können, daß er dieſe Folge aus den krummen Linien gekannt hätte. Meine Entdeckung war mir deſto angenehmer, weil dieſer Satz faſt von keinem Algebraiſten bis dahin war allgemein erwieſen worden. Man hatte ſich begnügt ſeine Richtigkeit durch Exempel zu zeigen. Reyneau hat ihn deßwegen, wie ich in der Vorrede zur Algebra erinnert habe, aus ſeiner Analyſe demontrée weggelaſſen. M. Friedr. Wilh. Stübner hat in einer ſehr weitläuftigen Diſputation einen Beweis dieſes Satzes gegeben, welchen durchzugehen aber meine Gedult nie zugereicht hat; Er gründet ſich auf die Beſchaffenheit der Coefficienten und ihren Urſprung aus den Wurzelgleichungen. Der G. R. v. Segner hat noch in Jena einen andern Beweis bekannt gemacht, der aber wenn man alles bey ihm aus einander ſetzen will, ebenfalls in groſſe Weitläuftigkeiten zu führen ſcheinet. Meiner hat mit keinem jener beyden etwas gemein. Ich habe ihn 1745. drucken laſſen, und dem ſeel. Pr. Heinſius, der damahls ſein mathematiſches Lehramt in Leipzig antrat, zugeeignet. In den Memoires de l'Acad. des Sciences 1741; von denen ich erſt den holländiſchen Nachdruck von 1747. bekommen, finden ſich 106 u. f. S. zweene Beweiſe dieſes Satzes von Abt Gua. Derſelbe hat ſowohl in dieſer Abhandlung 96. S. als auch in einer andern die ich vorhin angeführt habe (daſ. 582. S.) verſchiedenes, das zur Geſchichte der Algebra gehört, beygebracht. Dieſen Satz hat man insgemein dem Engelländer Thomas Harriot zugeſchrieben, und er iſt daher auch unter dem Nahmen **Harriots Lehrſatz** bekannt. Gua aber eignet ihn dem Deſcartes zu.

Von den Gränzen der Wurzeln.

194. Lehrſ. Weil die Hauptlinie mit allen ihren Differentiallinien (163; 164) alle rechter Hand über die Axe kommen (163) ſo giebt es ein x, das zugleich y und $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ddy}{dx^2}$, und $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. ſ. w. die Hauptformel und alle Differentialformeln, bejaht macht. Ich ſage, wenn man ein ſolches x gefunden hat, ſo werden alle dieſe Formeln auch von jedem gröſſern bejahten, wenn es bejaht war, und von jedem kleinern verneinten, wenn es verneint war, bejaht werden.

Bew. Die letzte oder $(m-1)$te Differentiallinie iſt eine gerade Linie, deren Gleichung $m.(m-1)..2x+(m-1).(m-2)...p$, wenn nun in dieſer einmahl eine Ordinate für ein gewiſſes x bejaht iſt, ſo ſind alle Ordinaten für gröſſere bejahte oder kleinere verneinte x, kurz, alle Ordinaten zur rechten der angenommenen bejaht, weil die gerade Linie ihre Axe nur einmahl ſchneidet. Nun ſtellen dieſe Ordinaten die Differentiale der Ordinaten der letzten Differentiallinie ohne eine vor: Dieſe $(m-2)$te Differentiallinie, hatte für das angenommene x eine bejahte Ordinate, und die Differentialien ihrer Ordinaten, die Ordinaten der geraden Linie, ſind rech-

ter Hand dieſer Ordinate alle bejaht, folglich wach⸗ ſen bejahte Ordinaten dieſer (m — 2) ten Diffe⸗ rentiallinie rechter Hand ohne Ende fort. Aber ihre Ordinaten ſind Differentiale der Ordinaten der (m — 3) ten Differentiallinie, die für das an⸗ genommene x eine bejahte Ordinate, und die Dif⸗ ferentiale ihre Ordinaten rechter Hand dieſer an⸗ genommenen, als die Ordinaten der (m — 2) ten, alle bejaht, folglich auch lauter wachſende bejahte Ordinaten nach der rechten Hand hat. Und ſo folgt, daß wenn eine Linie, von dem angenom⸗ menen x an, rechter Hand bejahte wachſende Ordi⸗ naten hat, und dieſem x in der nächſtvorherge⸗ henden Linie auch eine bejahte Ordinate zugehört, daß in der nächſtvorhergehenden Linie, bejahte Ordinaten rechter Hand der angenommenen wach⸗ ſen, weil ihre Differentiale, die Ordinaten der nächſtfolgenden Linie bejaht ſind. Dieſe Schlüſſe gehen alſo durch alle Linien bis zur Hauptlinie fort, und rechter Hand des bejahten y das dem angenommenen x zugehört, müſſen bejahte Ordi⸗ naten ohne Ende fort wachſen.

195. Lehrſ. Weil die m — 1 te Differen⸗ tiallinie eine gerade Linie iſt, und die Ex⸗ ponenten von x in den Differentiallinien ab⸗ wechſelnd gerade und ungerade werden, ſo folgt, daß die m — 1te, m — 3te, m — 5te, u. ſ. w. Differentiallinien, von ungeraden Graden, und eben ſo die m — 2te, m — 4te, m — 6te, u. ſ. w. von geraden ſind. Jene

alſo

alſo kommen zur linken Hand gewiß unter die Axe, und dieſe über die Axe, (163) daher iſt ein x möglich, dem in der m — 1ten, m — 3ten, m — 5ten, m — 2n + 1ten Differentiallinie verneinte, in der m — 2ten, m — 4ten, m — 6ten, m — 2nten bejahte Ordinaten zugehören, in der Hauptlinie aber eine bejahte oder verneinte Ordinate zugehört, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Ich ſage, wenn einmahl ein ſolches x iſt gefunden worden; ſo ſind alle Ordinaten linker Hand der ihm zugehörigen, in der m — 1ten, m — 3ten, m — 5ten, u. ſ. w. Differentiallinie verneint, nachdem m gerade oder ungerade iſt.

Beweis. Wenn einmahl eine Ordinate der geraden Linie verneint iſt, ſo ſind alle ihre Ordinaten linker Hand der angenommenen, wachſende verneinte. Sie ſtellen die Differentialien der Ordinaten der m — 2ten Differentiallinie vor: aus dem aber, was von den Differentiallinien allgemein geſagt worden (120.) erhellt, daß angenommen wird, daß die Ordinate jeder Differentiallinie, die Differenz vorſtellt, die herauskömmt, wenn man der Linie, welcher die gegebene Differentiallinie zugehört, ihre Ordinate zur linken von der nächſten zur rechten abzieht. Wenn alſo die Ordinaten einer Differentiallinie verneint ſind, ſo bedeutet dieſes, daß der Linie, der ſie als Differentiallinie zugehört, ihre Ordinaten linker Hand

von

von denen rechter Hand abgezogen, was verneintes geben.

Gehört alſo zu einerley Abſciſſe in der m — 1ten Differentiallinie eine verneinte, und in der m — 2ten eine bejahte Ordinate, und ſind die Ordinaten der m — 1ten linker Hand derſelben alle verneint, ſo giebt linker Hand der Ordinate, die dem angenommenen x in der m — 2ten Differentiallinie zugehört, jede linke Ordinate von der nächſten abgezogen was verneintes, d. i. ſie iſt eine gröſſere bejahte, und die bejahten Ordinaten wachſen linker Hand ohne Ende.

Weil nun eben dieſem x in der m — 3ten Differentiallinie eine verneinte Ordinate zugehört, und der m — 2ten Ordinaten, dieſer m — 3ten Differentiale vorſtellen, ſo giebt linker Hand der angenommenen verneinten Ordinate, jede linke Ordinate von der nächſten rechten abgezogen was bejahtes, d. i. ſie iſt ein gröſſeres verneintes, und die verneinten Ordinaten wachſen linker Hand ohne Ende fort.

Jede m — 2n + 1te Differentiallinie verhält ſich gegen die ihr nächſte m — 2n te wie die m — 1te gegen die m — 2te; Und jede m — 2n te gegen die m — 2n — 1te, wie die m — 2te gegen die m — 3te. Alſo geht dieſer Beweis durch alle Differentiallinien eben ſo fort.

Wenn m gerade iſt, ſo iſt die erſte Differentiallinie von einem ungeraden Grade; und hat

vermöge

vermöge des Beweiſes von dem angenommenen x an, linker Hand lauter wachſende verneinte Ordinaten; dieſem x aber gehört in der Hauptlinie eine bejahte Ordinate zu, und ſie hat wegen der verneinten Ordinaten ihrer Differentiallinie, wie im Beweiſe iſt dargethan worden, linker Hand lauter wachſende bejahte Ordinaten.

Wenn m ungerade iſt, ſo iſt die erſte Differentiallinie von einem geraden Grade, und hat linker Hand des angenommenen x lauter wachſende bejahte Ordinaten, Differentiale der Ordinaten der Hauptlinie, die für das angenommene x eine verneinte Ordinate, und folglich linker Hand derſelben lauter wachſende verneinte hat.

196. Aufg. I. Eine bejahte oder verneinte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſſte bejahte Wurzel einer Gleichung, oder kleiner als die kleinſte verneinte iſt, wenn die Gleichung keine bejahten Wurzeln hat.

II. Eine verneinte oder bejahte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſſte verneinte Wurzel, oder kleiner als die kleinſte bejahte iſt, wenn die Gleichung keine verneinten Wurzeln hat.

Aufl. Man ſetze die Gleichung $= y$, und mache alle Differentialformeln an der Zahl $m - 1$. Man ſuche ein x das y und alle Differentialien bejaht macht. Dieſes thut der Foderung I genug (194). Man ſuche ein x das die $m - 1$te Differen-

ferentialformel verneint, die m — 2te bejaht, und ſo alle abwechſelnd verneint und bejaht macht, da denn y bejaht oder verneint werden wird, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Dieſes thut der Foderung II genug (195).

197. Ex. Bey nachſtehender Gleichung habe ich, die Rechnung zu verkürzen, in den Differentialformeln, wo ſich mit einer Zahl durchgängig dividiren lieſſe, dividirt.

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = y$$

$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = \frac{dy}{dx}$$

$$5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = \frac{ddy}{4.dx^2}$$

$$5x^2 - 4x - 5 = \frac{d^3y}{3.4.dx^3}$$

$$5x - 2 = \frac{d^4y}{2.3.4.dx^3}.$$

Setzt man hier + 2 ſtatt x ſo werden die Werthe aller Formeln, von unten hinauf: + 8; 7; 1; 79; 46; alſo iſt 2 gröſſer als die gröſſte bejahte Wurzel. Eben ſo giebt x = − 3 von unten hinauf $-15 - 2 = -17$

$$+45 + 12 - 5 = +52$$

$$-135 - 54 + 45 + 15 = -129$$

$$+405 + 216 - 270 - 180 + 63 = +234$$

$$-243 - 162 + 270 + 270 - 189 - 120 = -74$$

Alſo iſt − 3 die Zahl, die der Foderung II genug

genug thut, und die Gränzen der Wurzeln ſind — 3 und + 2.

198. Zuſ. Will man alſo wiſſen, ob dieſe Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat, ſo darf man aus allen Diviſoren von 120, nur — 2; — 1; und + 1 verſuchen, (Alg. 294.) auch ſieht man, was für Zahlen man für die erſten Näherungen annehmen kann, wenn man die Irrationalwurzeln durch Näherung ſuchen will. (Alg. 317.)

199. Anm. In der Gleichung (197) gehören zu
x = — 3; — 2; — 1; 0; + 1; + 2
y = — 74; — 110; — 146; — 120; — 38 + 46;
woraus ſich ſchlieſſen läſſt, daß ſie nur eine mögliche Wurzel zwiſchen + 1 und + 2 hat.

200. Anm. Newton trägt dieſe Regel (196) ohne Beweis vor. Ar. vn. art. de limitib. aequat. p. 195. Statt des zweyten Theils, verwandelt er die verneinten Wurzeln in bejahte durch Veränderung der Zeichen. (192) Es hat mir aber natürlicher geſchienen, zu zeigen, wie man ſich ohne eine ſolche Verwandelung zu helfen hat.

Der Rechnungen des Unendlichen zweyter Theil.

Die Integralrechnung.

201. Erkl. Das Integral oder die Summe einer Differentialgröſſe, heiſſt die Gröſſe, aus deren Differentiirung die Differentialgröſſe entſtanden iſt. Und aus einer gegebenen Differentialgröſſe, die finden, durch deren Differentiation ſie entſtanden iſt, heiſſt ſie integriren oder ſummiren. In der Fluxionenrechnung, die flieſſende Gröſſe aus der Fluxion finden (ex fluxione inuenire fluentem).

202. Willk. Satz. Man bezeichnet die Summe mit dem Buchſtaben $\int$ vor das Differential geſetzt.

203. Zuſ. So iſt

I) Wenn $dx + dy = 0$; $\int(dx + dy) = x + y = a$ (23)

II) $\int(ydx + xdy) = xy$ (24)

III) $\int\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}\right) = \frac{x}{y}$ (26)

IIII) $\int n x^{n-1}\,dx = x^n$ (30)

V) $\int b x^{m-1}\,dx = \int b.\,\frac{1}{m}.\;m x^{m-1}\,dx =$

$\frac{1}{m}\,b \int m x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}.\,b.\,x^m.$

204. Zuſ. Weil jede veränderliche Gröſſe eben das Differential behält, wenn eine beſtändige zu ihr addirt oder von ihr abgezogen wird; ſo ſind von dieſen Integralen, die drey II; III; IIII eigentlich $xy + Const$; $\frac{x}{y} + Const$; $x^n +$ Conſt; Wo Conſt. eine unveränderliche bejahte oder verneinte Gröſſe bedeutet, die aus den Umſtänden der Aufgabe muß beſtimmt werden.

Von der Quadratur der krummen Linien.

205. Aufg. Das Differential der Fläche einer krummen Linie CPM 1 Fig. zu finden.

Aufl. Die Abſciſſe wachſe um das endliche Stücke PQ und die Ordinate werde QN. So wächſt die Fläche um das Stück PMNQ. Man ziehe NB mit der Axe parallel, bis ſie der verlängerten Ordinate in B begegnet. So iſt das Stück, um welches die Fläche gewachſen iſt = PMSQ + MNS der letzte Theil iſt gröſſer als

das geradelinichte Dreyeck MNS; und kleiner als das Rechteck MBNS. Man heiſſe alſo die Fläche Z und ihr endliches Wachsthum ΔZ; ſo iſt

$$\Delta Z < PM.\,PQ + NS.\,PQ$$
$$\Delta Z > PM.\,PQ + \tfrac{1}{2}\,NS.\,PQ \text{ oder}$$
$$\frac{\Delta Z}{PM.\,PQ} < 1 + \frac{NS}{PM} \text{ und } > 1 + \frac{NS}{2.\,PM}$$

Weil aber die Ordinate NQ der MP ſo nahe rücken kann als man will, ſo können $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ unendlich abnehmen. Wollte man annehmen $\frac{\Delta Z}{PQ.\,PM} = 1 + R$ ſo daß R eine angebliche Gröſſe bedeutete, und der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.\,PM}$ der Einheit nicht näher als um dieſe Gröſſe kommen könnte, ſo wäre $1 + R < 1 + \frac{NS}{PM}$ oder $R < \frac{NS}{PM}$ aber $\frac{NS}{PM}$ kann unendlich abnehmen, und alſo kann R keine Gröſſe bedeuten, die ſich allemahl angeben lieſſe.

Der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.\,PM}$ kann alſo durch unendliche Näherung der Ordinaten, der Einheit unendlich nahe kommen, daß man ihn alſo, wenn es verſtattet iſt, die Ordinaten ſo nahe als man will

anzu-

anzunehmen, der Einheit gleich ſetzen muß. In dieſem Falle, wenn ſich die Ordinaten einander unendlich nähern, verwandelt ſich PQ in dx und

$$\Delta Z \text{ in } dZ; \text{ alſo iſt } \frac{dZ}{ydx} = 1 \text{ oder } dZ = ydx.$$

206. Anm. Wenn man MPpm für das Differential der Fläche, und Mm für eine gerade Linie annimmt, ſo iſt $MPpm = ydx + \frac{1}{2} dxdy$ welches letztere in Vergleichung des erſten verſchwindet. So trägt man den Beweis insgemein vor, und ſtellt ſich die Fläche krummer Linien in lauter ſolche kleine Theilchen wie MmPp getheilt vor. Die ganze Fläche finden, heiſſt alsdenn alle dieſe Theilchen zuſammen addiren, daher man ſich hier das Integriren, welches dieſes verrichtet, als ein wirkliches Summiren vorſtellt.

207. Aufg. **Eine krumme Linie zu quadriren, oder ihre Fläche durch x und y auszudrücken.**

Aufl. Weil die Fläche jeder krummen Linie zu ihrem Differentiale $dZ = ydx$ hat, (205) ſo drücke man aus der Natur der krummen Linie, y durch x, oder dx durch y und dy aus, und ſuche die Gröſſe, aus deren Differentiation dieſes ydx entſtanden ſeyn kann, oder man integrire. (201) Dieſe Gröſſe wird Z ſeyn. Z muß nähmlich eine ſolche Function von x und y, ſeyn, deren Differential für jede Abſciſſe und die ihr zugehörige Ordinate ydx iſt, und folglich findet man Z wenn man dieſe Function findet.

208. Aufg. Die Parabel CMP zu quadriren, wo $CP = x$; der Parameter $= b$; die Gleichung $bx = yy$.

Aufl. I. Hie iſt $dz = y. dx = b^{\frac{1}{2}}. x^{\frac{1}{2}}. dx$ ſetzt man alſo in (203; V) ſtatt

dorten	b	n — 1	m
hie	$b^{1:2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ſo kömmt $\int y. dx = Z = b^{1:2}. \frac{2}{3}. x^{3:2} + Const$ $= \frac{2}{3}. x. \sqrt{b. x} + Const.$

II. Wo die Fläche Z anfangen ſoll, giebt ſich aus der beſtändigen Gröſſe, die dann für alle Abſciſſen einerley bleibt.

III. Man ſetze die Fläche ſoll in C anfangen oder: man verſtehe unter Z die Fläche CMP; ſo verſchwindet Z zugleich mit der Abſciſſe, alſo iſt $o = o + Const$ und $Const = o$; und $Z = \frac{2}{3}. x. \sqrt{b. x} = \frac{2}{3} x. y$. Dieſe Fläche, zwey Drittheile des Rechtecks unter Abſciſſe und Ordinate.

IV. Man ſetze Z ſollte von der Ordinate durch den Brennpunct anfangen, alſo wenn in An. endl. Gr. I. Taf. 11. Fig. AMN eine Parabel iſt, und F derſelben Brennpunct, ſoll Z die Fläche FTMP bedeuten.

Weil $AF = \frac{1}{4} b$, ſo verſchwindet hie Z wenn x dieſe Gröſſe bekömmt, alſo iſt in (I) $o = \frac{2}{3}. \frac{1}{4}. b. \sqrt{\frac{1}{4}. b. b} + Const$ giebt $Z = FTMP = \frac{2}{3}. x. \sqrt{(b. x)} - \frac{1}{12} b. b.$

V. Nähmlich aus (III) iſt die Fläche AFT $= \frac{2}{3}. AF. FT = \frac{1}{12}. b. b.$ So betragen dieſe Fläche, und die (IV) zuſammen die (III).

VI.

VI. In die Formel (IV) ſetze man eine Abſciſſe kleiner als $\frac{1}{4}$ b ſo kömmt ein verneinter Werth von z. Der bedeutet alſo eine Fläche zwiſchen FT, und einer Ordinate linker Hand der nur genannten. Dieſe Fläche bekömmt einen verneinten Werth, weil ſie von FT an gerechnet wird, aber nicht nach der Seite zu liegt, nach welcher FTMP liegt.

VII. Da der Abſciſſe auch eine gleiche Ordinate auf der entgegengeſetzten Seite der Abſciſſenlinie gehört, ſo iſt klar daß die Fläche APm ſo groß als APM; verneint heiſſen würde in ſo fern man darauf ſieht daß ſie an einer verneinten Ordinate liegt, auſerdem aber, mit der Fläche APM zuſammen das Doppelte jeder einzelnen ausmacht. Man kann alſo auch ſagen die Fläche MAm betrage zwey Drittheile eines Rechtecks, deſſen Grundlinie GM = AP.

VIII. Weil die Schenkel der Parabel auf beyden Seiten der Axe gleich und ähnlich ſind, ſo giebt die Integration in (II) eine Fläche der die andre gleich iſt.

IX. Gehören zu jeder Abſciſſe mehr Ordinaten, jede von einer andern Gröſſe, alſo mehr Schenkel einer krummen Linie (An. endl. Gr. 491.) ſo muß man in y. dx die Ordinate für jeden Schenkel beſonders ausdrucken, und dieſem Ausdrucke gemäß integriren. Für Schenkel die verneinten Abſciſſen gehören, würde man die Integration

am beſten auch beſonders vornehmen. Dieſe Erinnerungen mache ich hie nur vorläufig, damit man an ſie denkt wenn ſie brauchbar werden.

209. I. Unter Archimeds Schriften findet ſich eine eigne von der Parabelvierung, wie Joh. Chriſtoph Sturm in ſ. Ueberſetzung: Archimedis Kunſtbücher Nürnb. 1670. den Titel deutſch gegeben hat. Arch. zeigt darinn, ein gleichſeitiges Dreyeck, das ſeine Spitze im Scheitel der Parabel hat, zur Grundlinie eine Sehne welche auf die Axe ſenkrecht iſt, verhalte ſich zur Fläche der Parabel welche von dieſer Sehne begränzt wird = 3 : 4. Er leitet dieſes anfangs aus Lehren vom Gleichgewichte ebener Flächen her, nachdem aus blos geometriſchen Betrachtungen. Man hat keine ältere Quadratur einer krummen Linie.

II. Man giebt alſo hie die Verhältniß der paraboliſchen Fläche, zu einem Dreyecke, oder Rechtecke, in ganzen, ſelbſt kleinen Zahlen, vermöge der Abſciſſe und Ordinate, finden ſich nach der Elementargeometrie, Seiten eines Rechtecks oder Dreyecks, das der Fläche genau gleich iſt.

III. Das Dreyeck, deſſen Fläche genau des Kreiſes ſeiner gleich wäre, (Geom. 41. S. 4. Zuſ.), hätte zur Grundlinie eine gerade Linie, ſo lang als der Umfang des Kreiſes. Aber dieſe gerade Linie könnten wir durch Elementargeometrie aus dem Durchmeſſer nicht finden. So iſt die Quadratur des ganzen Kreiſes genau, nicht

in

in der Bedeutung geometriſch in welcher es die Quadratur der Parabel iſt, eines Stücks deſſen Abſciſſe man hat. Nähern kann man ſich der Fläche des Kreiſes durch die Elementargeometrie. (Geom. 43. S.)

IIII. Der Abſciſſe x, gehört die Fläche $Z = \frac{2}{3} x. \sqrt{(b. x)}$ alſo iſt $\frac{Z^2}{b} = \frac{4}{9}. x^3$ eine algebraiſche Gleichung zwiſchen Fläche und Abſciſſe. Das nennt man: unbeſtimmte algebraiſche Quadratur. Zwiſchen Abſciſſe des Kreiſes und ihr gehöriger Fläche findet man keine algebraiſche Gleichung, wie man ſich da verhalten muß wird unten (275) gewieſen.

210. Aufg. **Eine krumme Linie zu quadriren,** deren Gleichung $y^n = x + a$, wo n eine ganze bejahte Zahl iſt.

Aufl. I. Es verſteht ſich daß man, die Dimenſionen zu ergänzen, $x + a$ mit einer unveränderlichen Gröſſe von $n - 1$ Dimenſionen multiplicirt hat, dieſen Factor nachdem $= 1$ ſetzt.

II. Ich nehme $x + a$ bejaht. Da gehören jeder Abſciſſe ein paar entgegengeſetzte ſonſt gleiche Ordinaten, wenn n gerade iſt, nur eine bejahte, wenn n ungerade iſt. (An. endl. 237.)

III. Man ſetze $x + a = u$; alſo $dx = du$. Nun iſt $y = (x + a)^{1:m}$; alſo $dZ = u^{1:m}. du$; folglich $Z = \frac{m}{m+1} \cdot u^{(m+1):m} + Const$

$= \frac{m}{m+1} \cdot (x+a)^{(m+1):m} +$ Conſt. Soll nun $Z = 0$ für $x = 0$ ſeyn, ſo iſt $0 = \frac{m}{m+1} \cdot a^{(m+1):m} +$ Conſt. alſo $Z = \frac{m}{m+1} \cdot ((x+a)^{(m+1):m} - a^{(m+1):m})$

IV. Wenn m gerade iſt, giebt dieſes die Fläche für die bejahte Ordinate und auch für die verneinte. Wenn m ungerade iſt, die Fläche für die einzige bejahte.

V. Für verneinte Abſciſſe findet man leicht die Fläche nach dieſer Anleitung.

211. Aufg. Die Hyperbel, der die Gleichung $y = \frac{a^3}{x^2}$ zugehört, wo AP 14 F. $= x$; hat zwo Aſymptoten AF für $x = 0$; AE für $x = \infty$; und zieht ſich, weil + und − x einerley y, und allemahl ein bejahtes, geben, mit zwo gleichen und ähnlichen Hälften BCD, bcd; an beyden Seiten der Aſymptote AF, aber an einer der Aſymptote eAE hin. Man verlangt ihre Quadratur.

I. Die krumme Linie iſt (115) betrachtet worden. Hie iſt für ſie $dZ = a^3 . x^{-2} . dx$.

II. Man nehme $AG = a$; welches auch $CG = a$ giebt ſo kann dZ auch Differential der Fläche CGPM, bedeuten, eigentlich Differential jeder Fläche

Fläche die von irgend einer beſtimmten Ordinate an gerechnet wird, die gewählte giebt den einfachſten Ausdruck. Ich verſtehe alſo unter Z die Fläche CGPM.

III. Nun iſt $Z = -\frac{a^3}{x} + \text{Conſt}$. Soll $= 0$ ſeyn wenn $x = a$ alſo iſt $0 = -a^2 + \text{Conſt}$. Folglich $Z = a^2 . \left(1 - \frac{a}{x}\right)$

IV. Die Fläche CGPM iſt alſo immer kleiner als a^2, kömmt aber dieſem Quadrate immer näher je gröſſer x iſt. Die Fläche welche ſich von CG an, zwiſchen Aſymptote und Hyperbel ins Unendliche erſtreckt iſt $= a^2$.

V. Man hätte jede andre beſtimmte Ordinate, auch näher bey A als G iſt zum Anfange der Fläche wählen können, da wäre Z für die ihr zugehörige Abſciſſe verſchwunden, und von dieſer Ordinate an, bis an CG eine bejahte Gröſſe geweſen. Alſo wird ein Z von CG an rückwärts bis an jene Ordinate, einen Verneinten Werth bekommen, der Umſtand des verneinten wird nur dieſe Lage der Fläche, linker Hand an CG andeuten.

VI. So erhellt was Z bedeutet wenn in (III) x kleiner als a iſt.

Für $x = \frac{1}{2} a$ kömmt, r. s $= -a^2$, zwiſchen der Ordinate welche dieſer Abſciſſe gehört und CG, liegt eine Fläche dem Quadrate von a gleich.

Wenn

Wenn die Abſciſſe die kleiner als a iſt abnimmt, wird Z immer eine gröſſere verneinte Gröſſe, und wächſt ſo ins Unendliche wenn $x = 0$ wird. Die hyperboliſche Fläche zwiſchen CG und der Aſymptote AF, iſt unendlich.

VI. Da die Hälfte der Hyperbel innerhalb des Winkels cAf der andern ähnlich iſt, werden ihre Räume eben ſo gefunden.

VII. Eine allgemeinere Gleichung für Hyperbeln iſt $x^m + y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ wo $dZ = a^{m+1}. x^{-m} dx$. Auch da giebt es für eine Abſciſſe $= a$ eine Ordinate eben ſo groß; beſtimmt man alſo in $Z = \frac{-a^{m+1}}{(m+1). x^{m-1}} + C$ die Conſt. ſo daß die Fläche ſich von nur genannter Ordinate anfängt, ſo kömmt die Fläche $z = \frac{a^2}{m-1}. \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{m-1}\right)$, welche ſich für wachſende Abſciſſen gröſſer als a; dem Werthe $\frac{a^2}{m-1}$ ins Unendliche nähert, für Abſciſſen kleiner als a verneint iſt, und für verſchwindende unendlich wird.

VIII. Das iſt deutlich die Fläche bey einer ſolchen Hyperbel in dem Theile von ihr wo bejahten Abſciſ-

Abſciſſen bejahte Ordinaten zugehören. Wenn m ungerade iſt gehören verneinten Abſciſſen verneinte Ordinaten, entwirft man ſich die Figur für dieſen Theil ſo ſieht man leicht wie es da mit der Fläche beſchaffen iſt.

IX. Wenn man in (III) die Conſt = o ſetzt, ſo kömmt $Z = -\frac{a^3}{x}$. Das kann gewiß keine Fläche bedeuten, die von irgend einer Ordinate wie CG, nach der rechten Hand gerechnet würde, wenn auch CG nicht die Ordinate für x = a (II) bedeutete. Denn jede ſolche Fläche wächſt mit x; aber gegenwärtiger Werth von Z verſchwindet für ein unendliches x, und wird eine gröſſere verneinte Gröſſe, je kleiner x wird, verwandelt ſich in $-a^2$ wenn $x = a$; und wird ein verneintes Unendliche wenn $x = o$ wird.

X. Was dieſer Werth bedeutet erhellt aus (IV). Wenn man ſich vorſtellt DE ſey eine Ordinate der Hyperbel, die ins Unendliche hinausrückt, ſo iſt die Fläche CGED $= a^2$. Aber eben dieſe Fläche = CGPM + PMDE; und CGPM $= a^2 - \frac{a^3}{x}$, folglich PMDE $= - \frac{a^3}{x}$

Der verneinte Werth des Ausdrucks zeigt an daß man ſich die Fläche nicht vorſtellen muß wie ſie ſich von PM rechter Hand ins Unendliche hinaus erſtreckt, ſondern, wie ſie aus dem Unendlichen

lichen rechter Hand, ſich nach der linken Hand bis PM ſtreckt, und ſo von der unendlich langen Fläche CGED die $=a^2$ iſt, weggenommen wird.

XI. So wäre DEPM eine verneinte Fläche, unendlich lang, aber von endlicher Gröſſe.

XII. Uebergang wachſender bejahter Gröſſen durchs Unendliche, bringt auf verneinte Gröſſen (Geom. 12 S. 15 Zuſ.). Man könnte verneinte Gröſſen, die ſo entſtehn, gröſſer als unendlich nennen, wie man diejenigen, die aus bejahten Gröſſen, durch beſtändiges Abnehmen, nach dem Uebergange durch o entſtehn, kleiner als Nichts nennt.

XIII. Walliſius kömmt auf verneinte Ausdrückungen ſolcher Flächen, die nach einer Richtung genommen werden, welche der bejahten entgegengeſetzt iſt, und nennt: rationen pluſquam infinitam, qualem nempe habere ſupponatur numerus poſitiuus ad numerum negatiuum, ſiue minorem nihilo. Arithmetica infinitorum Prop. 104. Op. T. I. p. 409. Varignon Mém. de l'Ac. des Sc. 1706; p. 15; hat die Begriffe gehörig aus einander geſetzt. Leibniz, quod rationes ſiue proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero ſenſu methodi infiniteſimalis Act. Erud. 1712. p. 167. erkennt ſolche Ausdrückungen von hyperboliſchen Räumen, über die Varignon Walliſen beſtritt, nicht in der Schärfe für wahr, aber in einer gewiſſen Bedeutung für erträglich.

Zu

Zu dieſer Unterſuchung gehört De infinitis infinitorum et infinite paruorum ordinibus aut. D. Guidone Grandi. Piſis 1710. und Petri Varignonii reſponſio ad P. Grandini librum de infinitis infinitorum. Act. Erud. M. April. 1712; p. 154.

Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die Logarithmen.

213. Erkl. I. Für eine krumme Linie wo ſich die Abſciſſen verhalten ſollten, wie Logarithmen der Ordinaten, lieſſen ſich Puncte folgendergeſtalt finden. V. Taf. 42 Fig.

Auf die Abſciſſenlinie ziehe man ſenkrecht durch der Abſciſſen Anfang $AB = i$; eine beſtimmte gerade Linie, die man in der Folge für Einheit der geraden Linien annimmt, alſo $i = 1$ ſetzt.

Man nehme auf der Abſciſſenlinie $AP = AB$, und ziehe das Perpendikel PC von einer willkührlichen Gröſſe $= c$. Das iſt die Ordinate welcher die Abſciſſe $= i = 1$ gehört.

II. Man nehme eine Abſciſſe $AQ = x$; Sie hat zu $AP = i$ die Verhältniß $x : i$ oder $x : 1$ da x eine Zahl iſt, eine ganze oder gebrochne.

Dieſer Abſciſſe gehöre die Ordinate $QD = y$ deren Gröſſe man ſo beſtimmt: So oft AP in

AQ

AQ enthalten iſt, ſo oft iſt die Verhältniß AB: PC in der AB:QD enthalten, oder es iſt

$$AB:QD = \frac{AQ}{AP} \cdot (AB:PC)$$

$$i:y = \frac{x}{i} \cdot (i:c)$$

Aber die Verhältniß i:c mit $\frac{x}{i}$ multipliciren, iſt ſo viel als den Quotienten $\frac{c}{i}$ auf eine Potenz erheben deren Exponent $\frac{x}{i}$ iſt, wie aus (Nr. VI Cap.) leicht hergeleitet wird, alſo iſt $\frac{y}{i} = \left(\frac{c}{i}\right)^{\frac{x}{i}}$ oder, wenn man $i = 1$ ſeßt

$y = c^x$.

III. Wenn $x = 2; 3;$ u. ſ. w. iſt deutlich, daß $y = c^2; c^3 \ldots$ Wenn aber AQ nicht ein Vielfaches von AP durch eine ganze Zahl iſt, ſo theilt man AP in Theile, und druckt AQ durch ſolche Theile aus.

Wäre $AQ = \frac{3}{2}. AP$; ſo wäre die Verhältniß $AB:QD = \frac{3}{2}. (AP:PC)$

IV. Man ſtelle ſich alſo AP in r Theile getheilt vor, die Menge dieſer Theile iſt eine ganze Zahl, der erſte von ihnen ſey $A\alpha = m$; alſo $AP = r. m$, und $m = \frac{1}{r}$ wenn man 1 ſtatt i ſchreibt.

V.

V. Soll $\alpha\beta$ die Ordinate ſeyn welche dem Puncte α gehört, ſo iſt die Verhältniß AB:PC oder $i:c = r.(i:\alpha\beta)$ alſo $\frac{c}{i} = \left(\frac{\alpha\beta}{i}\right)^r$. Man nenne $\alpha\beta = i + q = 1 + q$, ſo iſt $c = (1+q)^r$ und $1 + q = \sqrt[r]{c} = c^{\frac{1}{r}} = c^m$ (IV) Immer iſt geſtattet gerade Linien wie Zahlen zu betrachten, weil ſie ſich alle auf die angenommene Einheit (I) beziehen.

VI. Man nehme QR = m (IV) der Abſciſſe AR = x + m gehöre die Ordinate RE = y + n, ich ziehe DD* mit QR parallel daß D*E = n. So iſt (II) $y + n = c^{x+m}$ alſo $\frac{y+n}{y}$ oder

$$1 + \frac{n}{y} = c^m,\ \frac{n}{y} = c^m - 1$$

V. Wenn alſo ein Paar Ordinaten um den Theil der Abſciſſe = m von einander abſtehn, ſo giebt beyder Unterſchied mit der kleinern dividirt den Quotienten $c^m - 1$, welcher ungeändert bleibt, wenn m ſo bleibt. Aber ſein Dividendus und ſein Diviſor ſind beyde veränderlich.

VII. Den Abſciſſen AV, und AW = AV + m, gehören die Ordinaten VF, WG, ſo iſt VF eine Potenz von c deren Exponent AV; WG eine Potenz von c deren Exponent AV + m, alſo $WG = VF.\,c^m$, alſo $WG - VF = VF.(c^m - 1)$, wiederum dieſer beyden Ordinaten

Unterſchied mit der kleinſten dividirt $= c^m - 1 = \frac{n}{y}$ (VI)

VIII. Wenn das zweyte Paar Ordinaten (VII) eben den Abſtand hat, welchen das erſte Paar (VI) und AB, $\alpha\beta$, (V) haben, ſo gehören dieſe Paare in eine geometriſche Reihe, deren beyde erſte Glieder die Verhältniß $1 : 1 + q$ haben. Die Unterſchiede der Glieder einer geometriſchen, ſind auch in einer geometriſchen Reihe welche eben die Verhältniß hat (An. endl. 114)

Hätte aber das Paar (VII) nicht eben den Abſtand, welche das Paar (VI) hat, ſo paſſte es nicht in eben die Reihe.

IX. Trägt man auf der Abſciſſenlinie von A aus Theile, jeden $= m$, ſo kann man durch den Endpunct jedes ſolchen Theiles, eine Ordinate $= y$ ziehen deren Gröſſe durch c und ihre Abſciſſe beſtimmt wird (II)

X. Abſciſſen linker Hand des Anfangs der Abſciſſen, werden als verneint betrachtet, einer ſolchen Abſciſſe gehört eine Ordinate welche durch eine Potenz von c angegeben wird, deren Exponent verneint iſt: Aber c iſt gröſſer als 1, mit einem verneinten Exponenten bedeutet es alſo einen Bruch deſſen Zähler $= 1$, der Nenner eine Zahl gröſſer als 1, auf eine Potenz erhoben deren Exponent bejaht iſt; dieſer Bruch wird immer kleiner je gröſſer der verneinte Exponent von c iſt,

kann

kann dieſer Exponent gröſſer werden, als jede Gröſſe die ſich angeben läſſt, ſo wird der Bruch kleiner als jede Gröſſe die ſich angeben läſſt. Für verneinte ins Unendliche wachſende Abſciſſen, nehmen alſo die Ordinaten ins Unendliche ab, aber nie wird eine völlig $= 0$.

Der Ordinaten Endpuncte ziehen ſich alſo für verneinte Abſciſſen, immer näher und näher nach der Abſciſſenlinie wie nach einer Aſymptote.

Daß ſie ſich für bejahte Abſciſſen immer mehr ins Unendliche erheben, iſt offenbahr.

XI. Ohne Zweifel kann man durch jeden Punct, wie Q, eine Ordinate ſo groß als QD unter die Abſciſſenlinie ſetzen, die wäre alſo $= - QD = - y$

XII. Macht man Alles unter der Abſciſſenlinie wie über ihr, ſo bekömmt man auch durch A, α, P Ordinaten $= - AB$, $- \alpha\beta$, $- PC$; und dieſe Ordinaten haben mit denen über der Abſciſſenlinie, einerley Abſciſſen, o, $A\alpha$; AP, AQ.

XIII. Da iſt nun die Verhältniß zwiſchen $- i$ und $- c$ in der zwiſchen $- i$ und $- y$ ſo oft enthalten, ſo oft AP in AQ enthalten iſt, oder es iſt $-i : -y = \frac{x}{i} \cdot (-i : -c)$ Man bemerke daß i, als Diviſor bey x nicht verneint iſt denn da bedeutet es AP, einen Theil der Abſciſſenlinie, der für PC und die entgegengeſetzte Ordinate einerley

 iſt,

iſt, eben wie x = AQ für QD und die entgegengeſetzte Ordinate.

So iſt $\frac{-y}{-1} = \left(\frac{-c}{-1}\right)^{\frac{x}{1}}$ und dieſe Gleichung iſt völlig einerley mit der am Ende von (II)

XIV. Allerdings gehört von den Abſciſſen o, AP, AQ, jede einer bejahten Ordinate und einer entgegengeſetzten ſonſt gleichen, aber die Verhältniſſe zwiſchen den verneinten Ordinaten, die man vermittelſt der Abſciſſen vergleicht, ſind völlig einerley mit den Verhältniſſen zwiſchen den bejahten Ordinaten die eben den Abſciſſen gehören.

XV. Ordinaten laſſen ſich alſo angeben ſoviel als man will. Aber jede muß von der nächſten um m abſtehn. So ſind ein Paar nächſter Ordinaten Endpuncte wie B, β; D, E; F, G; von einander abgeſondert, um Entfernungen noch gröſſer als m.

XVI. Man kann aber m kleiner erhalten wenn man r gröſſer nimmt (IV) Nun kann r gröſſer werden als jede Zahl die ſich angeben läſſt, alſo m kleiner als jede gerade Linie die ſich angeben läſſt. So rücken der Ordinaten Gränzpuncte näher zuſammen als daß ſich ihre Abſtände angeben lieſſen, und geben eine zuſammenhängende krumme Linie.

XVII. Nimmt man eine Verhältniß 1 : c als Maaß jeder andern Verhältniſſe 1 : y an, verſteht ſich die 1 : c wo nöthig in gleiche Theile getheilt,

und

und zeigt eine Zahl x an, wie oft die Verhältniß 1 : c in der 1 : y enthalten iſt, ſo nennt man x, der Zahl y Logarithmen in dieſem Syſteme. (Ar. V. C. 17) Da nun bey den Gröſſen die hie 1 ; c; x; y; ſind genannt worden dieſes ſtatt findet, ſo ſtellt die krumme Linie (XVI) ein logarithmiſches Syſtem vor, wo, von c, der Logarithme = 1 iſt, und die Abſciſſen x; Logarithmen der Ordinaten y ſind. Man nennt ſie daher die logarithmiſche Linie.

XVIII. Hugenius erinnert, dieſer Linie die ſchon von andern betrachtet worden, habe er zuerſt den Nahmen logarithmique oder logiſtique gegeben. De la cauſe de la péſanteur, p. 169 der Ausgabe Leid. 1690.

XIX. Man kann ſie ſicher eben ſo unter der Aſymptote verzeichnen als über derſelben. (XII) Die verneinten Ordinaten des untern Theils und die bejahten des obern, haben einerley Abſciſſen.

Eine ſolche Abſciſſe hat man geſagt iſt Logarithme der verneinten untern Ordinate, wie der bejahten obern. Folglich haben verneinte Gröſſen auch Logarithmen.

Aber die Abſciſſe iſt Logarithme, nicht der Ordinate, ſondern der Verhältniß der Ordinate zu derjenigen welche für Einheit angenommen wird; und bey der Ordinate unter der Aſymptote, liegt die Einheit auch unter der Aſymptote, und die Verhältniß zwiſchen verneinter Ordinate

und verneinter Einheit, iſt völlig einerley mit der Verhältniß zwiſchen bejahter Ordinate und bejahter Einheit. (XIV)

XX. Daß verneinte Gröſſen keine Logarithmen haben, oder: welches eben das iſt: Daß eine Frage deren Beantwortung auf einen verneinten Logarithmen führt, was unmögliches fragt, fand ich bey meinem erſten mathematiſchen Fleiſſe in Eulers Mechanica angenommen, und bewies es mir damals ſo: Iſt $l - a^2$ möglich ſo iſt auch $\frac{1}{2} \log - a^2$ möglich; aber $\frac{1}{2} \log a^2 = \log (a \sqrt{-1})$, und einer unmöglichen Gröſſe Logarithme iſt wohl nicht möglich.

Dieſer Schluß läſſt noch die Frage übrig wenn $l - c$ unmöglich iſt; wie kann $2. l - c = \log + c^2$ möglich ſeyn? Darauf müſſte man antworten daß $+ c^2$ nicht als das Quadrat von $- c$ ſondern als das von $+$ angeſehen werden muß, wenn von Logarithmen die Rede iſt, alſo $\log c^2$ nicht $2. \log - c$ iſt, ſondern $2. \log + c$

Leibnitii et Io. Bernoullii commercium epiſtolicum Lauſann. et Genev. 1745. enthält im II. B. die Streitigkeit über Logarithmen verneinter Gröſſen. Leibnitz läugnete ſie, Bernoulli vertheidigte ſie. Euler Mém. de l'Ac. de Pruſſe 1749; p. 139 entſcheidet für Leibnizen.

Frid. Mallet de logarithmis numeror. negatiuor. Noua Acta R. S. S. Vpſalienſis Vol. IV. Vpſal. 1784. p. 205.

Gian-

Gianfranceſco Malfatti Sulla famoſa queſtione de' logarithmi de' numeri negativi in Memorie della reale Accademia delle ſcienze .... in Mantova 1795. p. 3.

Bernh. Friedr. Thibaut diſſertatio: hiſtoriam controuerſiae circa numerorum negatiuorum et impoſſibilium logarithmos ſiſtens. Gott. 1797.

Logarithmen gehören eigentlich nicht Zahlen, ſondern Verhältniſſen, und die ſind einerley zwiſchen verneinten und zwiſchen bejahten Zahlen.

Daß es keine Logarithmen verneinter Gröſſen giebt, zeige ich im Leipziger Magazin für Mathematik, 1786. 4 Heft. aus den erſten arithmetiſchen Begriffen.

214; I. Man behalte AP = AB, ſetze aber durch P eine Ordinate = f; und nehme nun die Verhältniß 1 : f zum Maſſe der Verhältniſſe zwiſchen AB und den Ordinaten. So gehört jeder Abſciſſe x eine andre Ordinate als vorhin, nun nähmlich f^x

II. Dieſe Linie ſtellt alſo ein andres Syſtem dar. Beyde unterſcheiden ſich durch die Ordinate welcher die Abſciſſe = 1 gehört, das iſt im arithmetiſchen Ausdrucke durch die Zahl deren Logarithme = 1. (213; XVII)

III. Nachdem f gröſſer oder kleiner iſt als c, iſt die Ordinate für x einerley bejahte Abſciſſe in gegenwärtiger Linie gröſſer als in voriger und für einerley verneinte kleiner.

IV. So ſchneiden beyde Linien einander in B; die für welche der Abſciſſe = 1 eine gröſſre Ordinate gehört, erhebt ſich rechter Hand ſchneller über die Aſymptote, und nähert ſich ihr ſchneller linker Hand.

V. Man kann ſich leicht zur Erläuterung, Puncte für ein Paar ſolche Linien verzeichnen. Wenn in der erſten 2, in der andern 3 als Ordinate der Abſciſſe 1 gehört ſo gehören zuſammen

Abſciſſe	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3
Ordinate I	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
II	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

VI. Man nenne eine Abſciſſe der zweyten logarithmiſchen Linie = w, die ihr gehörige Ordinate = z; ſo iſt $z = f^w$ (I)

VII. Die Ordinate welche dieſer zunächſt folgt ſtehe auch um m von ihr ab, ſo iſt ſie $= f^{w+m} = z . f^m$ beyder Unterſchied $= z . (f^m - 1)$, dieſer Unterſchied mit der kleinſten dividirt, auch eine unveränderliche Gröſſe, wie (213; VI) nur hie f ſtatt c.

215. Aufg. Die Lage einer Tangente der logarithmiſchen Linie (213) zu finden.

Aufl. I. Durch die Endpuncte von ein Paar nach einander folgenden Ordinaten, ziehe man die gerade Linie ED, welche verlängert der Aſymptote in T begegne; ſo iſt (213)

$$ED^* : D^*D = DQ : QT$$

$$n : m = y : \frac{m}{c^m - 1}$$

Die

Die vierte Proportionale iſt immer von einer Gröſſe, wie ſich auch x und das zugehörige y ändern (213; VIII)

II. Läſſt man m unendlich abnehmen (213; XVI), ſo wird n : m = dy : dx; und QT = $\frac{y.m}{n}$ verwandelt ſich in die Subtangente $\frac{y.dx}{dy}$. Dieſe Subtangente iſt alſo für eine Stelle der logarithmiſchen Linie ſo groß als für die andere. Setzt man ihre unveränderliche Gröſſe = a, ſo hat man $\frac{y.dx}{dy} = a$ eine Gleichung für die logarithmiſche Linie, zwiſchen einer unveränderlichen Gröſſe, der Ordinate, und der Coordinaten Differentialen.

III. Wenn man in (I) m klein ſetzt, ſo kömmt der daſige Werth von QT, der Subtangente nahe, noch näher wenn man m noch kleiner ſetzt ſo könnte man ſich der Subtangente immer nähern.

IV. Das zeigt wie die Gröſſen a, c; zuſammenhängen; durch die letztere wird eine gewiſſe logarithmiſche Linie beſtimmt und aus c die Subtangente. Die logarithmiſche Linie (214) hätte eine andre Subtangente, der man ſich vermittelſt $\frac{m}{e^m - 1}$ näherte.

V. Einen Begriff von ſolcher Näherung durch die gemeine Arithmetik zu bekommen, darf

 man

man nur m nach einander $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$.... ſetzen.

Als Exempel diene das briggiſche Syſtem. Da iſt $c = 10$; alſo $QT = \frac{m}{10^m - 1}$.

Man ſetze $m = 0,5$; ſo iſt $QT = \frac{0,5}{\sqrt{10} - 1}$ $= \frac{0,5}{2,1622777}$. Für $m = 0,25$ käme $QT = \frac{0,25}{\sqrt[4]{10} - 1}$ und ſo könnte man durch wiederhohlte Ausziehung der Quadratwurzeln aus 10; der Subtangente des briggiſchen Syſtems immer näher kommen.

VI. Eine krumme Linie deren Subtangente an allen Stellen gleich iſt, kann für dieſe Subtangente weder 0, noch eine unendliche Gröſſe haben. Jede dieſer Vorausſetzungen gäbe eine gerade Linie, die erſte ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie die zweyte der Abſciſſenlinie parallel.

216. I. Aus (215; II) folgt $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$. Das Integral linker Hand iſt deutlich $= \frac{x}{a}$; das muß alſo eine Function von y, ſeyn, deren Differential durch y allein ausgedruckt $= \frac{dy}{y}$ iſt.

II.

Von y^δ wäre das Differential $\delta . y^{\delta - 1} . dy$. Sollte das nun $= \frac{dy}{y}$ ſeyn, ſo müſſte $\delta = 0$ ſeyn aber $y^0 = 1$ giebt kein Differential.

Man kann alſo $\frac{dy}{y}$ nicht als Differential einer Potenz anſehn, deren Exponent unveränderlich wäre, folglich nicht nach (203) integriren, denn da käme $\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{0} . y^0 + \text{Conſt}$, dabey ſich nichts denken läſſt.

217. Man weiß aber daß $y = c^x$ (213; II) folglich $\log y = x . \log c$ (Ar. VI. E. 21) das heiſſt: x iſt der Logarithme von y; in einem Syſteme wo 1 der Logarithme von c iſt. (213; II) In eben dem Syſteme wo die Subtangente $= a$ iſt, der man ſich, wenn c gegeben iſt immer mehr und mehr nähern kann; (215; II. III)

218. I. Alſo das beſtimmte logarithmiſche Syſtem verſtanden, kann man ſagen $x = \log y$; $dx = d \log y$, folglich (216; I)

$\frac{dy}{y} = \frac{d \log y}{a}$ wo a eben das Syſtem beſtimmt,

und $\frac{x}{a} = \log y = \int \frac{dy}{y}$ Weil $\log 1 = 0$; ſo muß das Integral ſo genommen werden daß es für $x = 0$ verſchwindet.

II.

II. Die Gleichung $dx = \frac{a.dy}{y}$ zu integriren ſoll man alſo in einer logarithmiſchen Linie deren Subtangente $= a$; zuſammengehörige x und y finden, da wird x in dieſer Linie, der Logarithme von y ſeyn.

219. Man kann wenigſtens zum Anfange verſuchen, ob ſich ſo was für Abſciſſen und Ordinaten unter gewiſſen Einſchränkungen bewerkſtelligen laſſe.

Wenn man $y = 1 + u$ ſetzt, alſo $dy = du$; So kömmt $\frac{dy}{y} = \frac{du}{1+u}$ und $\frac{1}{1+u}$ giebt eine Reihe von Potenzen von u mit bejahten ſteigenden Exponenten, (An. endl. Gr. 13) In der kann man jedes Glied mit du multipliciren, und das Product nach 203; integriren, ſo giebt ſich $\int \frac{dy}{y}$ durch dieſe Reihe von Integralen.

Soll aber jede Reihe des Quotienten, und der Integrale ſich nähern, ſo muß u kleiner als 1 ſeyn, folglich die Ordinate y kleiner als 2. Je näher die Ordinate an 2 kömmt deſto langſamer nähert ſich die Reihe.

Das giebt alſo ein Mittel, für eine Ordinate welche kleiner als 2 iſt, die Abſciſſe zu finden, vorausgeſetzt daß man die Subtangente wüſſte. Weiß man dieſe nicht, ſo findet man doch etwas, das mit ihr multiplicirt, die Abſciſſe gäbe.

Weil

Weil nun die Abſciſſe Logarithme der Ordinate iſt, ſo druckt man die Sache folgendergeſtalt aus.

220. Aufg. Den Logarithmen einer Zahl die zwiſchen 1 und 2 fällt durch eine unendliche Reihe zu finden.

Aufl. Man hat vermöge (219) und (Anendl. 13.) $dx = a. \frac{du}{(1 + u)} =$

$a. (du - u. du + u^2. du - u^3. du \ldots)$

alſo

$x = a. (u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{4} u^4 \ldots)$

Das Geſetz des Fortgangs ſieht man ſehr leicht und überzeugend.

Weil x für $u = 0$ verſchwinden ſoll (218 I) ſo iſt die Conſt $= 0$, und die Reihe wie ſie da ſteht giebt die Abſciſſe welche der Ordinate $1 + u$ gehört.

Wenn $u = 1$; gäbe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ die Abſciſſe welche der Ordinate 2 gehört. Dieſe Reihe nähert ſich aber ſehr langſam, und wäre nicht brauchbar.

221. Aufg. Umgekehrt, u durch x vermittelſt einer unendlichen Reihe auszudrucken.

Aufl. I. Weil $dx + udx = adu$, ſo iſt $\frac{dx}{a} = du - \frac{udx}{a}$. Man verfahre mit dieſer Gleichung nach Alg. 694.

du =

$$du = \frac{dx}{a} + \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{2a^3} + \frac{x^3\,dx}{3.2.a^4} + \frac{x^4\,dx}{4.3.2.a^5}$$

$$\frac{-u\,dx}{a} = \frac{-x\,dx}{a^2} \quad \frac{-x^2\,dx}{2a^3} \quad \frac{-x^3\,dx}{3.2.a^4} \quad \frac{-x^4\,dx}{4.3.2.a^5}$$

$$u = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2.a^3} + \frac{x^4}{4.3.2.a^4} + \frac{x^5}{5.4.3.2.a^5}$$

II.

II. Nähmlich aus $du = \frac{dx}{a}$ findet man das erſte Glied von $u = \frac{x}{a}$. Dieſes in $\frac{udx}{a}$ gebraucht, giebt dieſer Reihe erſtes Glied $\frac{-xdx}{a^2}$ welches mit dem entgegengeſetzten bejahten Zeichen der Reihe du zweytes Glied giebt, daraus die Integration der Reihe u zweytes Glied $\frac{+x^2}{2a^2}$ findet. Dieſes zweyte Glied von u giebt der Reihe $\frac{-udx}{a}$ zweytes Glied $\frac{-x^2dx}{2a^3}$ und eben das bejaht wird der Reihe du drittes Glied, und integrirt das dritte Glied der Reihe u u. ſ. w. Es erhellt, daß alle Glieder der Reihe u bejaht werden, wenn das erſte bejaht iſt, weil jedes bejahte Glied der Reihe u, in $\frac{-udx}{a}$ ein verneintes und folglich in du ein bejahtes giebt. Ferner wenn irgend ein Glied der Reihe u;

$= \frac{x^n}{n.(n-1)\ldots 2a^n}$ iſt, ſo giebt dieſes in $\frac{-udx}{a}$ das Glied $\frac{-x^n dx}{n.(n-1)\ldots 2a^{n+1}}$ und eben das Glied bejaht in der Reihe du; und durch die Integration das folgende Glied der Reihe u;

$+x$

$\frac{+ x^{n+1}}{(n+1).\, n \ldots 2 a^{n+1}}$ woraus die Allgemeinheit des Geſetzes, nach dem die Glieder fortgehen, erhellt.

III. Weil $x = 0$ für $u = 0$ (219) ſo wird keine beſtändige Gröſſe zu der gefundenen Reihe geſetzt.

IV. Man ſetze $\log(1+u)$ ſtatt x, ſo giebt die Reihe, u durch Potenzen von $\log(1+u)$.

Und weil $1 + u = y$ ſo giebt ſich y wenn man zu 1 eben die Reihe addirt, überall in ihr $\log y$ ſtatt x geſchrieben.

222. Wenn die logarithmiſche Linie aus c beſtimmt iſt, ſo iſt zwar die Subtangente gegeben, aber niemand würde die Arbeit übernehmen ſie der Wahrheit nahe nach (215; IV) anzugeben. Dazu müſſen andre Kunſtgriffe gelehrt werden. Eine Vorbereitung dazu iſt nächſtfolgendes.

Man ſuche die Ordinate, deren Abſciſſe der Subtangente gleich iſt.

Aufl. In 221; $x = a$ geſetzt findet man

$u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{2.\,3.\,4.} + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5.}$ wo man nur das erſte Glied 1; mit 2; das zweyte $\frac{1}{2}$ mit 3; das dritte $\frac{1}{2.\,3}$ mit 4; und ſo jedes Glied mit der Zahl welche anzeiget das wievielte das nächſtfolgende iſt, dividiren darf, um dieſes nächſt-

nächſtfolgende zu finden. Dieſes u und folglich 1 + u, iſt jedes eine gegebene Zahl, die nicht nur für alle Stellen einer gegebenen logarithmiſchen Linie, ſondern für alle logarithmiſche Linien einerley bleibt, weil ſie durch die Gröſſe von a, und folglich c gar nicht beſtimmt wird, und nur durch dieſe Gröſſen unterſcheidet ſich eine logarithmiſche Linie von der andern (214) Dieſe Zahl iſt beynah

2, 718 281 828 459 045 235 360 28

Eul. Introd. in Analyſ. inf. L. 1. §. 122. Man nennt ſie der Kürze wegen e; Sie iſt bey den Logarithmen ſo etwas wie P beym Kreiſe (Geom. 44. S.)

Iſt alſo eine logarithmiſche Linie BD . . gegeben ſo nehme man auf der verlängerten AB, die Gröſſe AH = e, und ziehe durch H eine Parallele mit der Aſymptote. Sie wird die krumme Linie irgendwo ſchneiden. Es geſchehe in F, ſo iſt die Ordinate FV = e; und die Tangente an F, geht durch den Anfang der Abſciſſe, daß hie die Abſciſſe AV der Subtangente gleich iſt.

223. Aufg. Eine Reihe für Logarithmen zu finden, die ſich ſchneller nähert als die in 220.

Aufl. I. Der Kürze wegen, bedeute S die Reihe welche in dem Werthe von x (220) in a multiplicirt iſt.

II. Der Ordinate 1 — u gehöre die Abſciſſe = x*. Dieſe Abſciſſe wird verneint ſeyn, weil

die Ordinate kleiner als 1 iſt (213 X.) Man findet dieſe Abſciſſe, wenn man in der Reihe S, u als verneint anſieht, da werden die Potenzen von u welche ungerade Exponenten haben alle verneint, und die welche gerade haben, bleiben es, wie ſie ſchon ſind, weil bejahtes und verneintes u gleiche Potenzen gerader Exponenten geben.

III. Alſo kömmt

$$x^* = a.\,(-u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 \ldots)$$

Dieß nenne ich $= a.\,S^*$

Man fände eben dieſe Reihe, wenn man $y = 1 - u$ ſetzte und $dx^* = \frac{-a.\,du}{1-u}$ integrirte.

IV. So gehören nun zuſammen

Ordinate	$1+u$	$1-u$
Abſciſſe	$a.S$	$a.S^*$

Man ſetze v gehöre als Abſciſſe der Ordinate $\frac{1+u}{1-u}$

Aus 213; II; iſt $1+u = c^{a.S}$

$1-u = c^{a.S^*}$, $\frac{1+u}{1-u} = c^v$

Nun iſt $\frac{1+u}{1-u} = c^{a.(S-S^*)}$ alſo die geſuchte Abſciſſe $v = a.\,(S - S^*)$

V. Dieſe Abſciſſe, iſt in dem Syſteme wo c der Abſciſſe = 1 gehört, und a die Subtangente iſt, Logarithme ihrer Ordinate, folglich

V.

V. $\log \frac{1+u}{1-u} = a. 2. u. (1 + \frac{1}{3} u^2 + \frac{1}{5} u^4 + \frac{1}{7} u^6 \ldots)$ welche Reihe für eben das u ſich ſchneller nähert als a. S, weil die Potenzen von u um Paare von Graden ſteigen.

224. I. N ſey eine willkührliche ganze Zahl; und man ſetze $\frac{1+u}{1-u} = N$ ſo iſt $u = \frac{N-1}{N+1}$ allemahl ein eigentlicher Bruch, nur deſto gröſſer je gröſſer N iſt. Für N = 1001 würde $u = \frac{1000}{1002}$. Alſo nähert ſich die Reihe in 223; allemahl was auch N iſt, nur langſamer für ein groſſes N; und ſo kann man, wenn a bekannt iſt, den Logarithmen jeder ganzen Zahl unmittelbar finden. Dieß zeigt in der Kürze die Möglichkeit jeder ganzen Zahl Logarithmen zu finden; in der Ausübung wird man die Logarithmen kleiner Zahlen lieber durch Reihen, die ſich ſchneller nähern, berechnen, und aus dieſen Logarithmen nachgehends durch Addiren u. ſ. w. die Logarithmen gröſſerer Zahlen finden.

II. Exempel. Man ſuche, wie groß a ſeyn muß, damit 10 = 1 wird. So iſt $\frac{1+u}{1-u} = 10$ oder $1 + u = 10 - 10u$ oder $u = \frac{9}{11}$ und

$$1 = a. 2. \left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} \ldots \right)$$

Weil $\frac{9}{u} = 0{,}8181\ldots$ ſo nehmen die Potenzen davon nur langſam ab, und man müſſte viel Glieder der Reihe berechnen, ihren Werth mit einiger Genauigkeit zu finden; Meine Abſicht war hie nur das Verfahren für ein angenommenes N anzuzeigen. Wird die Reihe berechnet, und 1 mit ihrem Doppelten dividirt, ſo findet ſich die Subtangente der logarithmiſchen Linie für das briggiſche Syſtem. Sie iſt alſo merklich kleiner als $\frac{11}{18}$

III. Soll 1 der Logarithme von c ſeyn, ſo iſt $u = \frac{c-1}{c+1}$ und $1 = a.\,2.\left(\frac{c-1}{c+1}\right).$ $\left(1 + \frac{1}{3}.\left(\frac{c-a}{c+1}\right)^2 \ldots\right)$ woraus ſich die Subtangente der Linie findet die einem willkührlich angenommenen Syſteme (Ar. VI. C. 19) gehört. Hat man die Subtangente berechnet, ſo giebt die Reihe (223; V) in dieſem Syſteme den Logarithmen jeder Zahl.

IV. Das zeigt die Möglichkeit, blos aus (223; V) aller Zahlen Logarithmen zu berechnen.

V. Wenn alſo für irgend eine logarithmiſche Linie $dx = a.\frac{dy}{y}$; ſo ſetze man $y = \frac{1+u}{1-u}$

daraus

daraus $u = \frac{y-1}{y+1}$ und berechne 2. u. $(1 + \frac{1}{3}u^2 \ldots\ldots) = S - S^*$ (223. V.) da iſt dann $x = a. (S - S^*)$ oder $x = a. \log y$, die Abſciſſe für jede Ordinate gegeben.

225. Wenn man der logarithmiſchen Linie Subtangente = 1 ſetzt, alſo $dx = \frac{dy}{y}$ ſo iſt aus (224; V) $x = \log y = S - S^*$

Dieſen Werth der Abſciſſe für eine gegebene Ordinate, heiſſt man der Ordinate natürlichen Logarithmen.

Die Linie der natürlichen Logarithmen heiſſt: wenn Subtangente = AB = 1 iſt.

Jeder Zahl natürlichen Logarithmen findet man vermöge der Reihe $S - S^*$ (224; V); Unmittelbar, oder aus Logarithmen welche man vermöge dieſer Reihe berechnet hat.

226. Aufg. Die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlen vermittelſt der Reihe 223. zu finden.

Aufl. Man ſetze

$$u = \tfrac{1}{5};\ \tfrac{1}{7};\ \tfrac{1}{9}:\ \tfrac{1}{99}$$

So iſt $\frac{1+u}{1-u} = \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{50}{49}$

So findet man die Logarithmen von $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{50}{49}$ ſehr leicht, weil man für u kleine Brüche hat.

 Nun

Nun $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; $l\frac{3}{2} + l2 = l3$; $2\,l2 = l4$; $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $2\,l5 + l2 = l50$; $l50 - l\frac{50}{49} = l49$; $\frac{1}{2}\,l49 = l7$; $3\,l2 = l8$; $2\,l3 = l9$; $l2 + l5 = l10$. Die Logarithmen ſelbſt ſtehen beym Euler Introd. in Analyſ. infinitor. P. I. §. 123. Ich will nur zum Exempel den $l10$ herſetzen. Er iſt

2, 3025850929940456840179914

Dieſes Verfahren zeigt, wie man die Reihe 223 brauchen kann, Logarithmen von ganzen Zahlen zu finden.

Aus den natürlichen Logarithmen von $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; die der ganzen Zahlen 1 ... 10 mit Darſtellung der Rechnung in Hauſen, El. Ar. Schol. Prop. XXVII. auf 21 Decimalſtellen.

Weil man aus ſolchen Logarithmen durch Addiren und Subtrahiren andre herleitet, auch, wie ſich in der Folge zeigen wird, durch multipliciren, briggiſche, ſo berechnet man ſie auf viele Decimalſtellen, damit was aus ihnen hergeleitet wird, auch noch auf ſoviel Decimalſtellen richtig bleibt als die Schärfe der Rechnung erfodert.

227. Lehrſ. Ich ſetze von den beyden logarithmiſchen (213; 214) hat die erſte a zur Subtangente, die zweyte b; Sie ſind durch B über einer Aſymptote beſchrieben (214; IV) In der Weite = y ziehe man eine Parallele mit der Aſymptote. Die ſchneidet jede logarithmiſche Linie in einem andern Puncte und giebt ſo in jeder

eine

eine Ordinate $= y$; der gehöre als Abſciſſe in der erſten x; in der zweyten v; Ich ſage: die Abſciſſen werden ſich verhalten wie die Subtangenten;

Bew. I. Die Ordinate $= e$; gehört in der erſten der Abſciſſe a; in der zweyten der Abſciſſe b (222); Alſo iſt $e = c^a$ in der erſten, und $= f^b$ in der zweyten. Folglich $c = e^{1:a}$ und $f = e^{1:b}$; Daher y als Ordinate der erſten $= c^x = e^{x:a}$; und als Ordinate der zweyten $= f^v = e^{v:b}$.

Das giebt $\frac{x}{a} = \frac{v}{b}$ oder $x : v = a : b$.

II. Nun iſt jede Abſciſſe, in ihrem Syſteme, Logarithme der Ordinate; der Satz ſagt alſo: Einer Zahl Logarithmen in zwey Syſtemen, verhalten ſich wie die Subtangenten der Syſteme.

228. Wenn $a = 1$ ſo iſt x der natürliche Logarithme, und v der künſtliche einer und derſelben Zahl. Ich will jenen durch nat. andeuten dieſen durch art. So iſt $\log \text{art}\, y = b. \log \text{nat}\, y$.

229. I. In 223; V. iſt $\log \text{nat} \frac{1+u}{1-u} =$

$(S - S^*)$ und $\log \text{art} \left(\frac{1+u}{1-u}\right) = b. (S - S^*)$,

wo $\frac{1+u}{1-u}$ jede Zahl $= N$ bedeuten kann. So hat Hauſen den Satz in El. Ar. erwieſen, wo er keine logarithmiſche Linie brauchte. Auch iſt dieſer Beweis richtig. Aus $\log \text{art} (1 + u) = b. S$, dürfte man nicht auf Zahlen gröſſer als 2 ſchlieſſen.

 II.

II. Wenn man alſo $y = \frac{1+u}{1-u}$ ſetzt und log nat y = (S—S*) verſteht, ſo giebt die Differentialgleichung $dx = \frac{a.\,dy}{y}$; x = a. log nat y

230. Die Subtangente der logarithmiſchen Linie zu finden, welche dem briggiſchen Syſteme gehört, oder: wie groß b (227) ſeyn muß, daß die Ordinate = 10; der Abſciſſe = 1 gehört, alſo, wie man es ausdruckt: der Logarithme von 10, hie alſo log art 10; oder log brigg 10; = 1 iſt.

Aufloſung. Weil log brigg 10 = b. log nat 10; ſo iſt 1 = b. log nat 10; $b = \frac{1}{\log nat\ 10}$. Der Diviſor ſteht in (226) den Quotienten hat man berechnet.

0, 434 294 480 903 251 827 651 128 9 (Eul. Intr. in An. inf. L. I. §. 124).

231. Für das briggiſche Syſtem, berechrechnet man jeden künſtlichen Logarithmen, wenn man den natürlichen, eben der Zahl, mit 0, 434 . . . (230) multiplicirt. So würden ſich die briggiſchen Logarithmen, viel leichter finden laſſen, als man ſie wirklich gefunden hat (Ar. VI. 29).

232. I. Die Zahl, deren natürlicher Logarithme = 1 iſt das e (222). Nimmt man alſo

AP =

AP = AB = 1; und PC = e; ſo ſtellt die logarithmiſche Linie die natürlichen Logarithmen vor; und ihre Subtangente iſt = AB.

II. So giebt ſich die Gleichung $e^x = y$ wo x der natürliche Logarithme von y iſt. Sie dient, eine Zahl aus ihrem natürlichen Logarithmen zu finden, weil x. log nat e = log nat y, wo log nat e = 1

III. So, wenn x = 2; iſt $y = (2{,}718\ldots)^2 = 7{,}389\ldots$ die Zahl deren natürlicher Logarithme = 2.

In Schulzens Sammlung logarithmiſcher u. a. Tafeln I. Th. 188 S. ſtehn neben den hyperboliſchen (natürlichen) Logarithmen 1 ... 60, ihre Abſolutzahlen, das ſind Potenzen von e. Der Potenzen Exponenten, gehn nicht durch alle Einheiten.

IV. In 221; fand man Zahl aus Logarithmen, aber $\frac{x}{a}$ durfte nicht gröſſer ſeyn als 1, folglich, bey dem natürlichen Logarithmen, auch x nicht gröſſer als 1. Aber in (II) mag x ſo groß ſeyn als es will, wenn man nur die zugehörige Potenz von e macht, welches freylich in der Anwendung oft ſehr mühſam ſeyn würde.

V. Die Ordinaten können bey der logarithmiſchen Linie, wie bey jeder andern, ſchiefe Win-

 kel

kel mit den Abſciſſen machen. Nach dieſem Unterſchiede, nennt Joh. Bernoulli, logarithmicas acutangulas, rectangulas, obtuſangulas. Op. T. II. n. 125. Dahin gehört eine krumme Linie die Florimond de Beaune dem Carteſius zu conſtruiren vorgelegt hatte, Carteſius aber durch ſeine Kunſtgriffe nicht darſtellen konnte, ſie wird curua Beauniana genannt. Die Analyſis des Unendlichen lehrte ihre Conſtruction Io. Bern. Op. T. I. n. IX; n. XI. Joh. Bern. zeigt merkwürdige Eigenſchaften von ihr.

233. Aufg. BCD iſt eine gleichſeitige Hyperbel (An. endl. Gr. 417) zwiſchen ihren Aſymptoten AF, AE; Man nimmt auf der letzten eine willkührliche Länge AG, welche ſich nicht ändert, imgleichen eine veränderliche AP; durch G, P, zieht man bis an die Hyperbel, der erſten Aſymptote Parallelen CG, PM,

Ich ſuche den Raum GCMP, zwiſchen Hyperbel, beyden Ordinaten, und dem Stücke der Abſciſſe auf der Aſymptote. Er heiſſe Z.

Aufl. I. Was in An. endl. 411; CQ, QM, waren, ſind hie AP, PM, die dortigen beyden Axen hie gleich, jede $= a$; alſo wird a. a. O. hie $AP.\ PM = \frac{1}{8}.\ a^2$ Es ſey Pp das Differential von AP oder GP (22) ſo iſt der Fläche GCMP Differential $PMmp = PM.\ Pp = \frac{1}{8}.\ a^2.$
$\frac{dAP}{AP} = dZ.$

II.

II. Man ſetze, ſenkrecht auf die zweyte Aſymptote gehe durch P unter die Aſymptote hinunter eine gerade Linie $= q = \frac{Z}{a}$ So iſt $dq = \frac{dZ}{a} = \frac{1}{8}. a. \frac{dAP}{AP}$. Man ſetze

in 228. II|dy| a | y
hie |dq|$\frac{1}{8}$a|AP
So iſt $q = \frac{1}{8}$ a. log nat AP.

Weil $q = o$ wo $Z = o$, das iſt wo AP = AG, ſo muß AP als eine Zahl angeſehen werden, die ſich auf AG als Einheit bezieht, und man kann die Gleichung auch ſo ausdrucken: $q = \frac{1}{8}$ a. log nat (AP:AG)

III. Die Gleichung gehört alſo einer logarithmiſchen Linie, deren Abſciſſe $= q$, Ordinate $=$ AP, die Subtangente $= \frac{1}{8}$ a. Man verzeichnet ſie folgendergeſtalt:

Auf der verlängerten Aſymptote FA, von Mittelpuncte niederwärts, nehme man Abſciſſe $w = \frac{1}{8}$ a. log nat (AP:AG), ziehe in dieſer Weite, mit der Aſymptote AC eine Parallele $=$ AP; die gehört als Ordinate zur Abſciſſe.

Abſciſſen und Ordinaten wachſen beyde ins Unendliche. Für Abſciſſe $= o$; iſt die Ordinate $=$ AG. Nimmt man auf der Aſymptote AF, vom Mittelpuncte Abſciſſen aufwärts, die alſo verneint ſind, ſo gehören ihnen Ordinaten kleiner als

als AG, immer kleinere, je gröſſer die verneinten Abſciſſen werden. Die logarithmiſche Linie hat AF auch zu ihrer Aſymptote, an der ſie ſich ins Unendliche hinaufzieht.

IV. Dieſer Linie Abſciſſen w, verhalten ſich wie die hyperboliſchen Flächen GCMP. Verneinte Abſciſſen verhalten ſich wie die Flächen über Stücken der Aſymptote von G nach A zu genommen. Dieſe Flächen werden als verneint angeſehn, und wachſen ins Unendliche (211; V. VII.)

Daher ſagt man dieſe logarithmiſche Linie zeige die Quadratur der Hyperbel ſey Quadratrix hyperbolae. Hauſen El. ſect. conicar. Prop. L. handelt von ihr, da er die Quadratur der Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten lehrt.

V. AG iſt willkührlich, nur nicht = o weil der Raum von der Aſymptote AF bis an GC unendlich groß iſt. Der Raum von GC an der Aſymptote AE iſt ebenfalls unendlich groß, anders als der Raum der Hyperbel (211; II)

VI. Man ſetze die gerade Linie AC halbire den Aſymptotenwinkel, ſey alſo zugleich halbe Axe, ſo iſt $AG = GC = \frac{AO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2.\sqrt{2}}$. Weil dieſes nun = 1 geſetzt wird (II) ſo iſt die Axe der Hyperbel = $a = 2.\sqrt{2}$; Eigentlich dieſe Zahl mit AG = GC multiplicirt.

VII.

VII. Nun iſt (II) $Z = a.q = \frac{1}{8} a^2. \log nat (AP:AG)$ alſo nach (VI) $Z = \log nat AP$.

VIII. Die natürlichen Logarithmen geben alſo den Raum zwiſchen Hyperbel und Aſymptote, daher nennt man ſie auch hyperboliſche.

Logarithmotechnia, ſ. methodus conſtruendi logarithmos, noua, accurata et facilis, ſcripto antehac communicata Anno Sc. 1667. nonis Auguſti, cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae et inuentio ſummae logarithmorum auct. Nicolao Mercatore Holſato, e Societate Regia. Huic etiam iungitur Michaelis Angeli Riccii exerc. geometrica, de maximis et minimis, hic ob argumenti praeſtantiam et exemplarium raritatem recuſa. Londin. 1668; 4°. Newton iſt auf Vergleichungen der Logarithmen mit der Fläche der Hyperbel auch für ſich gerathen.

Mehr Betrachtungen über hyperboliſche Flächen ſ. unten (317.)

IX. In der Rechnung des Unendlichen kömmt man häufig auf das Differential $\frac{dy}{y}$; deſſen Integral der natürliche, oder wie man ihn auch nennt hyperboliſche Logarithme von y iſt. Dergleichen Logarithme wird alſo verlangt, nicht, wie man die briggiſchen gewöhnlich braucht, Multiplication und Diviſion, in die beyden leichtern

Rech-

Rechnungsarten zu verwandeln, ſondern als eine Zahl mit der man ſelbſt rechnet, wie mit andren Zahlen. Ein Beyſpiel iſt: Wieviel das Queckſilber im Barometer ſinkt, wenn man um eine gegebene Höhe ſteigt; man ſ. die Abhandlung von Höhenmeſſungen mit dem Barometer, bey meinen Anmerkungen über die Markſcheidekunſt Gött. 1775. In der höhern Mechanik kommen beſonders Integrale ſehr häufig vor, die man durch natürliche Logarithmen angeben muß.

X. Briggiſche Logarithmen auf mehr Decimalſtellen als geſchehen iſt zu berechnen, oder für gröſſere Zahlen anzugeben als man in den vorhandenen Tafeln findet geſchieht leichter, wenn man natürliche berechnet, und ſie vermöge (230) auf briggiſche bringt.

XI. So hatten Mathematiker die ſich mit höhern Rechnungen beſchäfftigten, oft Veranlaſſung, Tafeln natürlicher Logarithmen zu wünſchen. Und doch war von dergleichen Tafeln nicht viel bekannt.

Joh. Heinr. Lambert, Zuſätze zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen Berlin 1770; meldet im 59 §. der Einleitung er habe ſich ſchon vor mehr Jahren dergleichen Tafel bis auf ſieben Decimalſtellen für die erſten hundert Zahlen berechnet.

So was iſt mehrmahl, und vollkommner von Liebhabern der Mathematik wiederhohlt worden.

Der

Der Hr. Gen. v. Stamford, ſandte mir ſchon 1774; für die erſten 100 Zahlen, hyperboliſche Logarithmen auf 20 Decimalſtellen.

In erwähnten Zuſätzen iſt die XV. Tafel Simpſons, für 1,01 bis 10 durch alle Hunderttheile hyperboliſche Logarithmen. Man kann dieſe Tafel, mit gehöriger Zubereitung von 100 bis 1000 brauchen.

Eben dieſe Tafel findet ſich bey: Tables de Logarithmes ... publiées cidevant en Angleterre par M. Gardiner Avignon 1770.

Schärfre, und für gröſſere Zahlen berechnete hyperboliſche Logarithmen machte zuerſt Joh. Carl Schulze bekannt, Er ſtarb zu Berlin 13 Jun. 1790 in einem Alter von 41 Jahren als K. Pr. geheimer Oberbaurath und Mitgl. d. K. Ak. d. Wiſſenſchaften.

Neue und erweiterte Sammlung logarithmiſcher, trigonometriſcher, und a. zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln; 2 Bände 8. Berl. 1778.

Im erſten Bande befinden ſich natürliche oder hyperboliſche Logarithmen, auf 48 Decimalſtellen. Hr. Wolfram, damaliger Artillerielieutenant in holländiſchen Dienſten hat ſie berechnet. Die Zahlen gehn von 1 . . . 2200 durch alle Einheiten, von da bis 10009 durch Primzahlen. Bey einigen Zahlen iſt leerer Raum gelaſſen.

H. W.

Hr. W. konnte die Logarithmen wegen Krankheit nicht berechnen. Dieſe hat Hr. M. Lüdike ergänzt Wittenbergiſches Wochenblatt 1781; 245 S. und verſichert zugleich die Richtigkeit mehrerer Wolframiſchen Logarithmen.

Hr. Ritter Georg Vega; Logarithmiſche, trigonometriſche u. a. Tafeln... Wien 1783; liefert natürliche Logarithmen in acht Decimalſtellen, für 1 .. 1000 durch alle ganze Zahlen, von da an bis 9973 durch Primzahlen.

Ge. Vega, Theſaurus logarithmorum, Vollſtändige Sammlung gröſſerer logarithmiſchtrigonometriſcher Tafeln Leipz. 1794. fol. enthält am Ende des zweyten Bandes Wolframs Tafel der natürlichen Logarithmen, die welche in der ſchulziſchen Ausgabe fehlten beygefügt.

Ge. Vega, logarithmiſchtrigonometriſche Tafeln Leipz. 1797; 2 Quartbände, enthalten natürliche Logarithmen, wie die Ausgabe 1783.

Lambert, Schulz, Vega, geben auch Formeln und Hülfszahlen zu Berechnung der natürlichen Logarithmen, Verwandlung derſelben in briggiſche, und umgekehrt.

235. I. Die neperiſchen Logarithmen ſind die erſten welche in Gebrauch gekommen ſind, es iſt alſo dienlich derſelben Zuſammenhang mit dem bisherigen zu zeigen.

Jn

In dem (44; XIX) angeführten Buche def. 6. ſagt Neper: Logarithmus cuiuſcunque ſinus, eſt numerus, quam proxime definiens lineam, quae aequaliter creuit, interea dum ſinus totius linea proportionaliter in ſinum illum decreuit, exiſtente vtroque motu ſynchrono, atque initio aequiueloce. Das läſſt ſich folgendergeſtalt darſtellen:

Der Sinustotus heiſſe $= r$; in irgend einem angeblichen Zeittheile nehme er um g ab, ſo entſteht der Sinus $r - g$; Nun ſoll der Sinustotus in gleichen Zeittheilen, proportionirlich abnehmen, alſo entſteht am Ende des zweyten Zeittheils der Sinus $\frac{(r-g)^2}{r}$; am Ende des dritten, $\frac{r-g)^3}{r^2}$ u. ſ. f. Mit dem abnehmenden Sinustotus, ſoll eine Linie wachſen, in gleichen Zeiten gleichviel, und ihr wachſen ſoll im Anfange ſo geſchwind ſeyn, als jenes abnehmen, alſo iſt ſie $= g$; $2.g$; .. am Ende des erſten, zweyten .. Zeittheils. So gehören zuſammen

Sinus	r	$r-g$	$\frac{(r-g)^2}{r}$	....	$\frac{(r-g)^{n-1}}{r^{n-2}}$	$\frac{(r-g)^n}{r^{n-1}}$
Logarithme nach Neper	0	g	$2.g$	....	$(n-1).g$	$n.g$

Hie iſt jeder folgende Sinus kleiner als der nächſtvorhergehende, und des folgenden Logarithme um g gröſſer als des vorhergehenden. Stellt

man ſich alſo die Sinus von o bis zum Sinustotus wachſend vor ſo zieht man in der dargeſtellten Reihe den folgenden vom vorhergehenden ab, der Unterſchied $= g. \left(\frac{r-g}{r}\right)^{n-1}$ iſt der Ueberſchuß des gröſſern über den kleinern, und indem ſich der kleinere in den gröſſern verwandelt nimmt des kleinern Logarithme um g ab.

Auch giebt, der Ueberſchuß mit dem kleinern dividirt den Quotienten $\frac{g}{r-g}$. In dieſem Quotienten, iſt der Dividend, das Gegentheil von dem um was ſich der neperiſche Logarithme ändert indem ſich der kleinere Sinus in den nächſtgröſſern verwandelt, denn da nimmt der Logarithme um g ab.

II. Man ſetze alſo die Aenderungen der Sinus und Logarithmen gehn durch unendlich kleine Stufen der kleinere Sinus heiſſe w; ihm gehöre der neperiſche Logarithme v; ſo gehören zuſammen, $w + dw$ und $v - dv$; und es iſt $dv = g$; So, verwandelt ſich der Quotient (I) in $\frac{-dv}{r}$

$$= \frac{+dw}{w}$$

III. Das giebt Conſt $- \frac{v}{r} = \log \text{nat } w$.

Nun kann der kleinere Sinus wachſen bis an r

hat

hat er dieſen Werth erreicht, ſo iſt er freylich nicht mehr kleinerer, ſondern Sinustotus. Mit ſeinem Wachſen nimmt v ab und wird = o wenn er = r wird. Alſo iſt Conſt = log nat r, folglich $\log nat \frac{r}{w} = \frac{v}{r}$ und $v = - r. \log nat \frac{w}{r}$

IV. Es ſey $\frac{w}{r} = \sin \varphi$ für den Sinustotus = 1; Da nun v neperiſcher Logarithme iſt, ſo kömmt: $\log nep \sin \varphi = - r. \log nat \sin \varphi$ Eben ſo: $\log nep \cos \varphi = - r. \log nat \cos \varphi$ Folglich

$$\left.\begin{matrix}\log nep \sin \varphi \\ - \log nep \cos \varphi\end{matrix}\right. = + r. \begin{Bmatrix}\log nat \cos \varphi \\ - \log nat \sin \varphi\end{Bmatrix}$$

das iſt

$$\log nep \tang \varphi = + r. \log nat \cot \varphi$$

V. Dieſes zeigt wie neperiſche Logarithmen mit den natürlichen zuſammenhängen, auch daß der neperiſche Logarithme einer Tangente, Differenz zwiſchen Logarithmen des Sinus und Coſinus iſt.

VI. Wenn man den Sinustotus = 1 ſetzt ſo iſt der natürliche Logarithme jedes Sinus verneint, weil der nun mit — r multiplicirt wird, ſo kömmt jeder neperiſche Logarithme des Sinus bejaht.

VII. Die neperiſchen Logarithmen der Sinus nehmen ab, indem die Winkel wachſen, der ne-

periſche Logarithme der Tangente eines Winkels unter 45 Grad iſt alſo bejaht, und eben dieſer Logarithme mit dem Zeichen — genommen, giebt den Logarithmen der Cotangente dieſes Winkels. So machen die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten nur eine Columne aus. Jedes Glied von ihr mit + giebt Tangente eines Winkels unter 45 Grad, und mit — eben deſſelben Cotangente, alſo das Glied mit —, Tangente eines Winkels über 45 Gr. und mit + darunter. So erfodern die neperiſchen trigonometriſchen Logarithmen weniger Raum als die briggiſchen.

VII. Nepers (I) angezeigter Canon, enthält Bogen des Quadranten durch alle Minuten, Ergänzungen neben einander auf einer Blattſeite, auf einer ſolchen Seite fünf Columnen, die Ueberſchriften ſind: Sinus, (unter 45 Grad) Logarithmi (dieſen gehörig) differentiae (Logarithmen der Tangente über den rechter Hand + linker Hand — ſteht) Logarithmi (über 45 Gr.) Sinus (über 45 Grad). Die Minuten der Bogen in Spalten, und beyden Seiten angegeben. Der Sinustotus iſt zehn Millionen.

VIII. Wie Neper ſeine Logarithmen berechnet hat findet ſich in angeführter Ausgabe nicht, auch nicht in einer Lugduni 1620; die nur ein Abdruck der 1614; iſt. Karſten Lehrbegr. der Mathem. II. Th. (Greifsw. 1768) Allgemeine Rechenk. 145 §. erwähnt eine Ausgabe 1619, nach

nach Nepers Tode von deſſen Sohne, wo die Gründe vollſtändiger aus einander geſetzt ſind.

Für 30 Grad iſt $\frac{w}{r} = \frac{1}{2}$;

Nun − log nat 2 = − 0,69314718o
Alſo r = 10000000 geſetzt,

$- r. \log nat \frac{w}{r} = + 6931471,80$

Beym Neper ſteht 6931469 um zwey Zehnmilliontheilchen zu wenig welches von ſeiner Berechnung herrühren muß.

Für $\varphi = 45$ iſt $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, davon der natürliche Logarithme $= - \frac{1}{2}. \log nat\ 2 =$
− 0,346573590279972
Nepers Logarithme iſt + 3465735.

IX. Beni. Vrſini Math. El. Brandenb. Trigonometria cum magno logarithmorum canone. Coloniae (an der Spree) 1625; 2 Quartbände. Der erſte, Trigonometrie, auch etwas von Berechnung der Logarithmen, der zweyte den Canon, durch den Quadranten, von zehn zu zehn Secunden. Die Columnen, wie beym Neper (VII) zwiſchen ihnen noch Spalten, für Aenderungen der Zahlen, bey Proportionaltheilen zu brauchen. Der Sinustotus = 100000000; die Logarithmen der Sinuſſe von
30 Gr; = 69314718
45 Gr; = 34657359.

Beni. Urſini Sprott. Sileſ. Curſus Mathematico Practici Volumen I. Colon. 1618; 8°; enthält Nepers Canon (VII) von jeder Zahl die beyden niedrigſten Zifern weggelaſſen. Ich rede davon, in meiner Aſtronomiſchen Abhandlungen II. Samml. (1774).

IV. Abh. Von gröſſern, oder ſonſt merkwürdigen logarithmiſchen Tafeln, 62 §.

X. Neper hatte bey ſeinen Logarithmen anfangs blos an Erleichterung der ſphäriſchen Trigonometrie gedacht. Das zeigt ſich daraus, weil er blos Logarithmen für Sinus und Tangenten berechnete, mit denen man bey dieſer Trigonometrie auskömmt.

Seine Logarithmen auch für andre Zahlen zu brauchen, ſchlägt er vor, wenn ein Logarithme gegeben iſt, den Sinus aufzuſuchen der dieſem Logarithmen am nächſten kömmt, oder umgekehrt eine Zahl unter den Sinuſſen aufzuſuchen, und dann den ihr gehörigen Logarithmen.

Das Verfahren iſt auch bey den briggiſchen trigonometriſchen Logarithmen vorgeſchlagen worden. Meine Anmerkungen über die Markſcheidekunſt, 20. Anm. Es wird beſchwerlich, weil die trigonometriſchen Logarithmen nicht Zahlen gehören die immer gleichviel wachſen.

XI. Kepler berechnete neperiſche Logarithmen für Sinus die immer gleich viel wachſen, und

dieſe

dieſe Logarithmen ſind alſo als Logarithmen gemei≈ner Zahlen bequem zu brauchen, aber die Bogen die ihnen zugehören wachſen durch ungleiche Un≈terſchiede. Kepleri Chilias Logarithmorum Marp. 1624. Supplementum Chil. log. Marp. 1625. Ich beſchreibe ſie: Geometriſche Abhandlungen, I. Sammlung (1790) 495 S.

XII. In (III) bedeutet v den neperiſchen Lo≈garithmen einer Zahl = w; in welche ſich r durch Abnehmen verändert hat, während der Logarithme o der r gehörte, durch Wachſen ſich in v geändert hat. Daß $\frac{w}{r}$ Sinus eines Winkels für den Si≈nustotus = 1 iſt, braucht nicht in Betrachtung gezogen zu werden. So bleibt noch die Gleichung am Ende von III, die man ſo ausdrucken kann

v = r. (log nat r — log nat w)

Und da iſt v der neperiſche Logarithme von w, wenn von r der neperiſche Logarithme = o ge≈ſetzt wird.

XIII. Hie könnte auch w gröſſer als r wer≈den, nur mit der Vorausſetzung, daß die Gröſſe über r eben ſo proportionirlich wüchſe, wie ſie unter r abnahm. Da wäre in (I) g verneint, der Logarithme dieſes w würde auch verneint, wie der Werth von v in (XII) anzeigt.

XIV. Der Unterſchied der natürlichen Loga≈rithmen in (XII) wird in Decimaltheilen ohne Ende

 fort≈

fortgehen. Wäre nun r eine Potenz der 10 z. E. 10000; ſo betrüge erwähnter Unterſchied mit 10000 multiplicirt, Ganze, Zehntheile ... Da könnte man nun den Werth von v, nur in Ganzen ausdrucken, und die Decimaltheile weglaſſen. Es iſt aber auch geſtattet ihn mit Zehntheilen, Hunderttheilen u. ſ. w. anzugeben. So ſtehn die briggiſchen Logarithmen in den gewöhnlichen Tafeln nur bis auf Zehnmilliontheile, in Vlacqs gröſſern die Vega im Theſaurus wiederum herausgegeben hat (233; XI) auf drey Stellen weiter. Nur, wenn man eine Tafel für v giebt, muß jedes Glied derſelben bis auf die Decimalſtelle angegeben ſeyn, bis auf welche das andre angegeben iſt, z. E. aller bis auf Zehntheile, nicht eins bis auf Zehntheile das andre bis auf Hunderttheile.

XV. Man ſetze r = 10000 und ſuche v für jedes w kleiner als 10000. So iſt v = 10000. (log nat 10000 — log nat w)

Exempel: w = 1, davon der natürliche Logarithme = 0; Nun iſt
log nat 10000 = 9,2130340371976;
alſo v = 92130,34 .....
giebt man alſo jedes v bis auf Zehntheile an, ſo ſetzt man gegenwärtiges = 921303.

Es ſey w = 7351 ſo iſt
log nat w = 8,9025916373 74
von log nat 10000 abgezogen

bleibt

bleibt 0,307748734602; das zugehörige v bis auf Zehntheile angegeben iſt 30774.

XVI. Praxis trigonometriae logarithmicae, a M. Petro Crugero Reip. Dantiſcanae mathematico, Dantiſci 1634; enthält unter den Tafeln zuerſt neperiſche Logarithmen für gemeine Zahlen von 1 ... 10000, ſind die v bis auf Zehntheile ausgedruckt, die beyden Exempel (XV) finden ſich in dieſer Tafel.

Dann neperiſche trigonometriſche Logarithmen, wie die im Canon mirificus, nur bey jedem die niedrigſten beyden Zifern weggelaſſen, alſo für den Sinustotus 100000; natürliche Sinus nicht dabey. Noch einige Tafeln zur Bequemlichkeit der Rechnung mit neperiſchen Logarithmen.

Dieſe Tafeln ſind alſo für die Rechnung mit neperiſchen Logarithmen, ſo was wie unſre gewöhnlichen trigonometriſchen Tafeln für die briggiſchen, und verdienen als die einzigen ihrer Art Erwähnung.

Damahls waren ſchon briggiſche Logarithmen bekannt. Krüger behielt aber die ältern, weil ſie bey den Rudolphiniſchen Tafeln gebraucht wurden.

XVII. Schulze hat bey ſeinen trigonometriſchen Tafeln (233; XI) Columnen, mit den Ueberſchriften: Loghyp; Sin. Tang. Coſ. Es ſind: neperiſche Logarithmen, aus Urſins groſſem Canon, (IX) aber ſo ausgedruckt daß jeder Loga-

rithme wie Urſin ihn angiebt, mit 100000000 dividirt iſt. Nun iſt was in (IV) r heiſſt beym Urſin hundert Millionen, Schulze bringt durch ſeine Diviſion dieſes auf 1; und ſo iſt bey Schulzen

log hyp ſin φ = — log nat ſin φ
log hyp tang φ = + log nat cot φ

Man braucht auch zuweilen natürliche Logarithmen der trigonometriſchen Linien, und da ſind dieſe Schulziſchen ſehr bequem. Wer die ſeltenen gröſſern neperiſchen beſitzt findet ſolche Logarithmen von 10 zu 10 Secunden, wenn er jeden neperiſchen mit hundert Millionen dividirt.

XVIII. Ich habe von den Logarithmen hiſtoriſche Nachrichten gegeben ſo weit ſolche in Verbindung mit der Rechnung des Unendlichen ſtehn. Noch gehört hieher eine Diſputation: Hiſtoriae logarithmorum naturalium primordia . . . M. Io. Sam. Traugott Gehler, Lipſ. 1776. Der Verf. der nachdem durch phyſikaliſche Schriften, beſonders das phyſikaliſche Wörterbuch bekannt geworden iſt, geb. zu Görlitz 1751 ſtarb als Oberhofger. Aſſeſſ. u. Senator zu Leipzig 16 Oct. 1795.

Wegen Beſchreibungen von logarithmiſchen Tafeln, verweiſe ich auf die vierte aſtronom. Abh. in der zweyten Sammlung, und die 60 geometriſche Abh. in der erſten Sammlung, auch meine Fortſetzung der Rechenkunſt (1786) 79 u. f. S. wo ich von Byrgs Logarithmen rede.

Scripto-

Scriptores logarithmici, or a collection of ſeveral curious tracts on the nature and conſtruction of logarithms. Lond. 1791. 2 Bände groß Quart, der Herausgeber nennt ſich Francis Maſeres. der 3. Band Lond. 1796.

Sammlung von Büchern und einzelnen Aufſätzen, welche Logarithmen, auch binomiſchen Lehrſatz und Reihe, betreffen.

Vſus logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum, auct. Mauricio de Praſſe Lipſ. 1796. eine wichtige Anwendung von Hr. Pr. Hindenburg combinatoriſcher Analytik.

Von der Exponentialrechnung.

235. **Erkl.** Eine Exponentialgröſſe heiſſt, deren Exponent eine veränderliche Gröſſe iſt z. E. z^x. Die Wurzel mag veränderlich oder unveränderlich ſeyn.

Logarithmen verſtehe ich hie natürliche, und zeige den natürlichen Logarithmen von z durch lz an.

236. Aufg. **Eine Exponentialgröſſe zu differentiiren.**

Aufl. Sie ſey $z^x = y$; Man ſucht dy.

Nun iſt $x.\, lz = ly$ (Ar. VI. E. 21) aſo $dx.$ $lz + \frac{x.\, dz}{z} = \frac{dy}{y}$ (218) folglich das geſuchte $dy = z^x.\, lz.\, dx + x.\, z^{x-1}\, dz.$

Wäre

Wäre z unveränderlich $= a$; ſo käme von a^x das Differential $a^x. la. dx$.

237. Aufg. Das Differential einer Exponentialgröſſe $x^x dx$ zu integriren.

Aufl. Man ſetze $x = 1 + y$ alſo das Differential $(1 + y)^{1+y} dy$. Man ſetze ferner $(1 + y)^{1+y} = 1 + v$ alſo $(1 + y). l(1 + y) = l(1 + v)$ oder (220) $(1 + y). (y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \ldots) = v - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} v^3 - \frac{1}{4} v^4 \ldots)$ Die Reihe linker Hand wird $y + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} y^3 \ldots$ Um nun v durch y auszudrucken verfahre man nach Alg. (694.)

$$\begin{array}{lllll}
v & = y & + \left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ +\frac{1}{2}\end{array}\right\} y^2 & - \left.\begin{array}{l}\frac{1}{6}\\ +\frac{2}{3}\\ -1\\ +\frac{1}{3}\end{array}\right\} y^3 & \\
-\frac{1}{2} v^2 & = & -\frac{1}{2} y^2 & -1 & \\
+\frac{1}{3} v^3 & = & & +\frac{1}{3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
v & = y & + y^2 & + \frac{1}{2} y^3 & \ldots \\
v^2 & = & y^2 & + 2 y^3 & \ldots \\
v^3 & = & & y^3 & \ldots
\end{array}$$

Man nimmt nähmlich y für das erſte Glied von v an; dieſes giebt $- \frac{1}{2} yy$ für das erſte Glied von $- \frac{1}{2} vv$ dieſes erſte Glied von $- \frac{1}{2} vv$ mit entgegengeſetzten Zeichen zu $+ \frac{1}{2} yy$ welches ſchon v gegenüberſtund, addirt, giebt $+ yy$ für das zweyte Glied von v. Daraus findet ſich $- y^3$ für das zweyte Glied von $- \frac{1}{2} vv$; imgleichen aus dem erſten Gliede von v; $+ \frac{1}{3} y^3$ für das erſte Glied von $+ \frac{1}{3} v^3$; dieſe beyden Gröſſen zuſammen machen $- \frac{2}{3}. y^3$ welches mit entge-

genge-

gengeſeꝫten Zeichen zu $-\frac{1}{6}y^3$ das ſchon v gegenüberſteht, addirt, $+\frac{1}{2}y^3$ zum dritten Gliede von v giebt. Und ſo findet man $1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5 \ldots$ Dieſe Reihe nun, weil ſie $= (1+y)^{1+y}$ iſt, muß mit dy multiplicirt, und was herauskömmt, integrirt werden, ſo findet man $\int (1+y)^{1+y}.\, dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6 \ldots$ wo man ſtatt y; $x - 1$ ſeꝫen müſſte, wenn man das dieſer Reihe gleiche Integral $\int x^x\, dx$ unmittelbar durch x ausdrucken wollte. Es würde dieſes aber nicht bequem ſeyn, weil jedes Glied, das eine Potenz von y enthält, verſchiedene geben würde, wenn man $x - 1$ ſtatt y ſeꝫte, da man denn die Glieder, die einerley Potenzen von x enthalten, wieder zuſammen rechnen müſſte.

238. Anm. Von der Exponentialrechnung hat Joh. Bernoulli zuerſt Regeln und Exempel bekannt gemacht, Act. Erud. Lipſ. 1697. Menſ. Mart. Op. T. I. n. 36. Das Integral (237) hat er beſonders betrachtet, und beſondere Eigenſchaften daran bemerkt. Op. T. III. n. 148.

239. Aufg. Die Gröſſe e^x (232) durch eine Reihe, die nach x fortgeht, auszudrücken.

Aufl. Es ſey $x = l(1+u)$ ſo iſt auch $x\, le = l(1+u)$ (232) oder $l e^x = l(1+u)$ oder $e^x = 1 + u = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \ldots$ (221).

240. Zuſ. Man ſeꝫe $a^y = e^x$ ſo iſt $y\, la = x$ also $a^y = 1 + y\, la + \frac{yy.\,(la)^2}{2} + \frac{y^3.\,(la)^3}{6} \ldots$

So

So läſſt ſich jede Exponentialgröſſe vermittelſt der hyperboliſchen Logarithmen durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

241. Aufg. e^{mx} zu differentiiren.

Aufl. Es ſey $e^{mx} = u$ ſo iſt $mx = lu$ (232) und $m\,dx = \frac{du}{u}$ alſo du oder $de^{mx} = me^{mx}dx$

242. Aufg. Das Differential $e^{mx}x^{\varepsilon}dx$ zu integriren, wenn ε eine ganze bejahte Zahl iſt.

Aufl. Man ſetze $\int e^{mx}x_{\varepsilon}\,dx = \frac{e^{mx}x^{\varepsilon}}{m} - p$ auf beyden Seiten differentiirt, kömmt nach (241.)

$e^{mx}.\, x^{\varepsilon}.\, dx = e^{mx}.\, x^{\varepsilon}.\, dx + \frac{\varepsilon}{m}\, x^{\varepsilon - 1}.\, e^{mx}.$

$dx - dp$; Alſo $dp = \frac{\varepsilon}{m}.\; x^{\varepsilon - 1}.\, e^{mx}.\, dx.$

Man ſetze die erſte Ergänzung

$p = \frac{\varepsilon.\, x^{\varepsilon - 1}.\, e^{mx}}{m^2} - q$; ſo iſt

$dp = \frac{\varepsilon.\, x^{\varepsilon - 1}.\, e^{m}.\, dx}{m} + \frac{\varepsilon.\,(\varepsilon - 1).\, x^{\varepsilon - 2}.\, e^{mx}.\, dx}{m^2}$

$- dq$; oder $dq = \frac{\varepsilon.\,(\varepsilon - 1).\, x^{\varepsilon - 2}.\, e^{mx}.\, dx}{m^2}$

So ſetze man die zweyte Ergänzung $q =$
$\frac{\varepsilon.\,(\varepsilon - 1).\, x^{m - 2}.\, e^{mx - 1}}{m^3}$

und

und es iſt $dq = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1).x^{\varepsilon-2}.e^{mx}dx}{m^2}$

$+ \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)x^{\varepsilon-3}.e^{mx}dx}{m^3} - dr$ oder

$dr = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-)(\varepsilon-2)x^{\varepsilon-3}.e^{mx}dx}{m^3}$

Ueberhaupt ſetze man unter den Ergänzungen p; q; r; u. ſ. w. ſey man auf eine dt gekommen, ſo daß

$dt = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n)x^{\varepsilon-n-1}.e^{mx}dx}{m^{n+1}}$

ſo ſetze man die $n+1$te Ergänzung

$t = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n)x^{\varepsilon-n-1}.e^{mx}}{m^{n+2}} - u$

da iſt $dt = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n)}{m^{n+1}}x^{\varepsilon-n-1}e^{mx}dx$

$+ \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n-1)}{m^{n+2}}x^{\varepsilon-n-2}.e^{mx}dx - du$

oder $du = \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-n-1)}{m^{n+2}}x^{\varepsilon-n-2}e^{mx}.dx$

wo man wieder für u einen ſolchen Ausdruck wie für t annehmen kann, iſt aber $n=\varepsilon$ ſo wird $t=0$ und die Reihe bricht da ab: die nte Ergänzung

überhaupt iſt $\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots.(\varepsilon-n+1)}{m^{n+1}}x^{\varepsilon-n}e^{mx}$

—t

— t ſie wird alſo die letzte für $n = \varepsilon$ und da iſt ſie $\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)\ldots\ldots 1}{m^{\varepsilon+1}} x^0 e^{mx}$. Folglich iſt, alle Ergänzungen zuſammengerechnet, das geſuchte Integral, $= e^{mx}.\left(\frac{x^\varepsilon}{m} - \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{m^2}. - \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)}{m^3}.\right.$ $\left.x^{\varepsilon-2} - \frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)\ldots\ldots 1)}{m^{\varepsilon+1}}\right)$ wozu keine beſtändige Gröſſe addirt zu werden braucht, wenn es für $x = o$ auch der Reihe letztes Glied ſeyn ſoll. Der Kunſtgriff bey dieſem Verfahren, welcher auch anderswo oft angebracht wird, kömmt darauf an: Wenn man das Differential einer Gröſſe wie z. E. dp in voriger Rechnung hat, ſo nimmt man für das Integral davon zweene Theile an; erſtlich eine Gröſſe, deren Differential zwey Stücken hat, von welchen eines dem vorgegebenen Differential wie dp, gleich iſt; ſo bleibt alſo beym Differentiiren das andere Stück übrig, welches einem neuen Differentiale, nähmlich dem Differentiale des andern Theils des angenommen Integrals muß gleich geſetzt werden. So nähme man an $p = \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1} e^{mx}}{m^m} -- q$ wo beym Differentiiren das erſte Stück des Differentials des erſten Theils des angenommenen Werthes von p, dem vorhin gefundenen dp gleich iſt, und alſo für den

den Werth von dq das zweyte Stück übrig bleibt. Wenn man nun mit q auch ſo verfährt, u. ſ. w. ſo gibt ſich für das geſuchte Integral eine Reihe, die unter den gehörigen Umſtänden abbricht. Folgendes Exempel iſt von eben der Art.

243. Aufg. $x^\varepsilon (lx)^n dx$ zu integriren, wenn n eine ganze bejahte Zahl iſt.

Aufl. Man muß ſich erſtlich erinnern, daß
$$d(lx)^n = n.(lx)^{n-1}. dlx = \frac{n.(lx)^{n-1}. dx}{x}$$
Nun ſetze man das geſuchte Integral
$$= \frac{x^{\varepsilon+1}.(lx)^n}{\varepsilon+1} - p$$
So iſt auf beyden Seiten differentiirt
$$x^\varepsilon (lx)^n dx = x^\varepsilon (lx)^n dx + \frac{n.x^\varepsilon (lx)^{n-1} dx}{\varepsilon+1}$$
$- dp$. Man begreift, warum für des geſuchten Integrals erſten Theil eben die Gröſſe angenommen worden: damit ſich nähmlich der erſte Theil von ihrem Differentiale mit dem Differentiale, deſſen Integral man ſucht, aufhübe.

Nun hat man $dp = \frac{n.x^\varepsilon (lx)^{n-1} dx}{\varepsilon+1}$. Man ſetze
$$p = \frac{n x^{\varepsilon+1}.(lx)^{n-1}}{(\varepsilon+1)^2} - q$$
ſo wird $dp =$
$$\frac{n.x^\varepsilon.(lx)^{n-1} dx}{\varepsilon+1} + \frac{n.(n-1).x^\varepsilon.(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^2}$$

 $- dq$

— dq von den drey Differentialen rechter Hand hebt ſich das erſte mit dp auf. Wegen des andern, das $= dq$ iſt, ſetze man

$$q = \frac{n.(n-1)x^{\varepsilon+1}.(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^3} - r \text{ ſo iſt}$$

$$dq = \frac{n.(n-1).x^{\varepsilon}.(lx)^{n-2}dx}{(\varepsilon+)^2}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)x^{\varepsilon}.(lx)^{n-3}dx}{(\varepsilon-+1)^3} - dr$$

wo ſich wiederum das erſte der drey Differentiale linker Hand mit dp aufhebt Ueberhaupt, wenn man für die Ergänzung t deren Zahl $\varkappa$ iſt, dergleichen p die erſte, q die zweyte iſt, folgende Gleichung annimmt:

$$t = \frac{n.(n-1)....n-\varkappa+1}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.x^{\varepsilon+1}.$$

$(lx)^{n-\varkappa}$ ſo iſt

$$dt = \frac{n(n-1)...(n-\varkappa+1)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa}}.x^{\varepsilon}.(lx)^{n-\varkappa}dx$$

$$+ \frac{n.(n-1)...(n-\varkappa+1).(n-\varkappa)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.x^{\varepsilon}.$$

$(lx)^{n-\varkappa-1}.dx - du$

wo ſich von den drey Gliedern rechter Hand das erſte mit dt aufhebt und

$$du = \frac{n.(n-1)...(n-\varkappa)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+1}}.(lx)^{n-\varkappa-1}dx$$

wieder-

wiederum $u = \frac{n.(n-1)\ldots.(n-\varkappa.)}{(\varepsilon+1)^{\varkappa+2}} . x^{\varepsilon+1}$. $(lx)^{n-\varkappa-1} - w$ giebt. Hieraus folgt, daß die Ergänzung u, deren Zahl $\varkappa + 1$ iſt, $= 0$ ſeyn wird, wenn $\varkappa = n$; da bricht alſo die Reihe ab, und wenn alſo die $(n+1)$te Ergänzung $= 0$ iſt, ſo iſt die nächſtvorhergehende nte, die letzte. Sie wird alſo, wenn man in t, $\varkappa = n$ ſetzt, $\frac{n.(n-1)\ldots.1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} . x^{\varepsilon+1}$. Folglich iſt das geſuchte Integral, wenn man p; q, u. ſ. w. zuſammen rechnet

$$x^{\varepsilon+1} . \left(\frac{(lx)^n}{\varepsilon+1} - \frac{n.(lx)^{n-1}}{(\varepsilon+1)^2} - \frac{n.(n-1)}{(\varepsilon+1)^3} . (lx)^{n-2} \ldots . - \frac{n.(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} \right)$$

$+$ Conſt Dieſe Reihe wird nicht $= 0$ wenn $x = 0$ weil alsdenn lx unendlich wird, und daher kann das Integral nicht $= 0$ für $x = 0$ werden. Aber für $x = 1$ wo $lx = 0$ wird die Reihe 1. $\frac{-n.(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}$. Geſetzt alſo, das geſuchte Integral ſolle $= m$ für $x = 1$ werden, ſo hat man folgende Gleichung $m = -n. \frac{(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}$ $+$ Conſt oder Conſt $= m + \frac{n.(n-1)\ldots 1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}$. Oder es iſt vollſtändig

$$\int x^{\varepsilon} (lx)^n\, dx = x^{\varepsilon+1}.\left\{\frac{(lx)^n}{\varepsilon+1} \ldots - \frac{n.(n-1)..1}{(\varepsilon+1)^{n+1}}\right\}$$

$$+ \frac{n.(n-1)\ldots.1}{(\varepsilon+1)^{n+1}} + m.$$

244. Anm. Wenn x unendlich wird, ſo wird zwar lx auch unendlich, aber von einem niedrigern Grade, ſo daß man ſetzen muß $l\,\infty$ ſey eine unendliche Gröſſe, auf eine Potenz erhoben deren Exponent ein bejahter eigentlicher Bruch iſt; Dieſes erhellt daraus, weil die Zahlen in der geometriſchen Verhältniß, die Logarithmen aber in der arithmetiſchen wachſen, und bekanntermaſſen die Glieder in einer ſteigenden geometriſchen Reihe viel ſchneller zunehmen als in einer ſteigenden arithmetiſchen. So gehört in den gewöhnlichen Tafeln der kleine Logarithme 6 ſchon der groſſen Zahl 1000000 zu. Eben ſo verhält es ſich mit dem verneinten Logarithmen einer unendlich kleinen Gröſſe. Es iſt nähmlich $l\,\frac{1}{\infty} = l\,1 - l\,\infty = -(\infty^{m:n})$.

So iſt unter den briggiſchen Logarithmen, der verneinte Logarithme, $0 - 6$, der $\frac{1}{1000000}$ zugehört, welcher bey weitem nicht ſo groß iſt, daß ſeine Gröſſe mit der Kleinigkeit der ihm zugehörigen Zahl in Vergleichung käme, oder daß man etwas dieſer Zahl nahe kommendes herausbringen würde, wenn man 1 durch den Logarithmen dividirte.

Einige allgemeine Formeln zuſammengeſetzte Differentiale zu integriren.

245. Aufg. Wenn X eine Function von x iſt, $c\,dX.(a+X)^p$ zu integriren.

Aufl. Weil $a+X$ eine veränderliche Gröſſe, deren Differential dX, ſo iſt das Integral

$= c.$

$= c. \frac{(a+X)^{p+1}}{p+1}$ (201. V.). Wer dieſes nicht ſo überſehen kann, kann ſich durch folgende Verwandelung (Transformatio differentialis, quae fit ſubſtituendo aliam incognitam) helfen: Er ſetze $a + X = z$ alſo $dX = dz$ und das Differential verwandelt ſich in $cz^p dz$ deſſen Integral $\frac{cz^{p+1}}{p+1}$ eben das vorige giebt, wenn man ſtatt z ſeinen Werth ſetzt. Ich nehme hier und in dem Folgenden überall an, daß die beſtändige Grösse, ſo wie es die beſondern Umſtände erfodern, gehörig addiret wird.

246. Ex. Wenn das vorgegebene Differential $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} \cdot (a + \sqrt{(aa-xx)})^2$ wäre, alſo $X = \sqrt{(aa-xx)}$ ſo muß man aus den Regeln des Differentiirens wiſſen, daß $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ $= dX$ alſo das Integral $= \frac{1}{3}(a + \sqrt{(aa-xx)})^3$

247. Anm. Es iſt ein Vortheil, wenn man verſchiedene endliche Formeln, die man nach Gefallen annimmt, beſonders Wurzelgröſſen, differentiirt, weil man in ſolchen Fällen wie gegenwärtig vorkommen, die Kenntniß ſolcher Differentiale mit Nutzen brauchen kann. Beym Differentiiren ſelbſt ſind ſolche Verwandelungen, da man eine Gröſſe ſtatt einer andern ſetzt, oft brauchbar. Wenn man z. E. nicht gleich überſehen könnte, wie das Differential von $\sqrt{(aa-xx)}$

xx) ausſähe, ſo dürfte man dieſe Grösſe nur $= y$ ſetzen, da $aa - xx = yy - xdx = ydy$; und

$$\frac{-xdx}{\sqrt{(aa - xx)}} = dy \text{ wäre.}$$

248. Aufg. Umſtände anzugeben, unter denen ſich $x^m. (a + bx^n)^p. dx$ durch eine endliche Reihe integriren läſſt.

Aufl. I. Wenn p eine ganze bejahte Zahl iſt, ſo giebt ſich die Potenz von $a + bx^n$ durch eine endliche Reihe; Jedes Glied dieſer Reihe mit $x^m dx$ multiplicirt giebt ein Differential das ſich nach 203 V; integriren läſſt, und dieſe Integrale zuſammen gerechnet geben das Geſuchte. Da alſo dieſe Vorausſetzung, gar keine neuen Kunſtgriffe brauchte, ſo nehme man an, p ſey entweder ein Bruch (auch wohl ein uneigentlicher) oder eine verneinte ganze oder gebrochne Zahl.

II. Man ſetze $a + bx^n = z$, alſo $x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b}$ und $nbx^{n-1} dx = dz$. Druckt man nun alles durch z aus, ſo verwandelt ſich das vorgegebene Differential in $\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^p \cdot \frac{dz}{n.b}$

III. Iſt nun hier $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl zum wenigſten $= 1$, ſo giebt ſich die Potenz von $\frac{z-a}{b}$ durch eine endliche Reihe und ſolcherge-

chergeſtalt auch das Integral (wie in I). Will man dieſes Integral wieder durch x ausdrucken, ſo ſezt man ſtatt z ſeinen Werth aus (II).

IIII. Hier mögen alſo m, n, p, was man will ſeyn, wenn nur die (III) angenommene Bedingung ſtatt findet. Dieſe Bedingung läſſt ſich ſo ausdrucken $\frac{m+1}{n} = r + 1$ wo r eine ganze bejahte Zahl, oder $= 0$ ſeyn muß. Das giebt $m = rn + n - 1$; alſo muß ſich das vorgegebene Differential ſo ausdrucken laſſen: $x^{rn}.\, x^{n-1}.\, (a + bx^n)^p.\, dx$; wo r eine ganze bejahte Zahl oder $= 0$ ſeyn muß.

V. Indeſſen hat man gegenwärtigen Kunſtgriff für $r = 0$ nicht nöthig ſondern es wäre

in 245	X	dX	c
hier	bx^n	$nbx^{n-1}dx$	$\frac{1}{nb}$

alſo das Integral $\frac{(a + bx^n)^{p+1}}{nb.\,(p+1)}$; wie auch aus gegenwärtiger Methode gefunden wird, wenn man das Differential in (II) für dieſen Fall integrirt.

VI. Iſt nicht $r = 0$ ſo wird in II. $\frac{m+1}{n} - 1 = r$ und $(z-a)^n = z^r - r.\, az^{r-1} + r.\, \frac{(r-1}{1.2} a^2 z^{r-2} \ldots . - a^r$

Dieſe Reihe hat $r+1$ Glieder, und weil die deren Zahl gerade iſt das Zeichen — vor ſich haben, ſo hat das letzte Glied — oder + nachdem I ungerade oder gerade iſt.

VII. Dieſe Reihe nun multiplicire man mit $z^p.dz$ und integrire ſie. Das Integral iſt

$$\frac{z^{p+r+1}}{p+r+1} - \frac{r.az^{p+r}}{p+r} + \frac{r.(r-1)a^2z^{p+r+1}}{1.2.(p+r-1)}$$

$$-\frac{+a^rz^{p+1}}{p+1} \cdots\cdots \frac{\pm a^rz^{p+1}}{p+1}$$

VIII. Wenn man die Reihe (VII) mit nb^{r+1} dividirt, ſo hat man das verlangte Integral.

VIIII. Man kann die Reihe (VII) auch ſo ausdrucken

$$z^{p+1}.\left(\frac{z^r}{p+r+1} - \frac{raz^{r-1}}{p+r}\right.$$

$$\left.+\frac{r(r-1)a^2.z^{r-2}}{p+r-1} - \cdots\cdots \frac{\pm a^r}{p+1}\right)$$

Dieſer Ausdruck hat die Bequemlichkeit, daß nur der Factor z^{p+1} irrational ſeyn kann, der andere rational iſt.

X. Nun kann man auch z wegſchaffen, und ſtatt deſſelben überall $a+bx^n$ ſetzen.

XI. Noch iſt die Ergänzung des Integrals (204) übrig. Soll es für $x=0$ verſchwinden, und

und iſt n keine verneinte Zahl, ſo muß in (VIII) $z = a$ geſetzt werden und es iſt

$$a^{p+1} \cdot a^r \cdot \left(\frac{1}{p+r+1} - \frac{r}{p+r} + \frac{r.(r-1)}{p+r-1} \ldots \frac{\pm 1}{p+1} \right) + \text{Conſt} = 0, \text{ oder}$$

$$\text{Conſt} = - a^{p+r+1} \cdot \left(\frac{1}{p+r+1} \ldots \frac{\pm 1}{p+1} \right)$$

XII. Die Reihe VIIII; und der Werth der Conſt; XI; zuſammen mit $n\,b^{r+1}$ dividirt (VIII) geben das geſuchte Integral.

XIII. Wenn p eine verneinte ganze Zahl nicht gröſſer als $-r-1$ iſt, ſo daß $p+r+1$ bejaht iſt, ſo bekömmt die Reihe (VI) mit z^p multiplicirt ein Glied darinnen $\frac{dz}{z}$ befindlich iſt, deſſen Integral iſt $\log z$. Alsdenn läſſt ſich der Ausdruck (VIIII) nicht brauchen.

Ex. $\frac{x^3\,dx}{(1+x)^2}$ giebt $m = 3$; $n = 1$; $p = -2$; $r = 3$; $a = 1$; $b = 1$ und die Reihe VI; nach VII mit $z^{-2}\,dz$ multiplicirt $z\,dz - 3\,dz + \frac{3\,dz}{z} + \frac{dz}{z^2}$ Davon iſt das Integral

$$\tfrac{1}{2} z^2 - 3z + 3 \log z - \frac{1}{z} + \text{Conſt} = 0$$

 Soll

Soll es für $x = 0$ oder $z = 1$ verſchwinden, ſo iſt $\frac{1}{2} - 3 - 1 + Conſt = 0$ oder $Conſt = \frac{7}{2}$ alſo $1 + x$ ſtatt z geſetzt und nach VIIII mit 2 dividirt, kömmt $\int \frac{x^3 dx}{(1+x)^2} =$

$$\frac{(1+x)^2}{4} - \frac{3(1+x)}{2} + \frac{3}{2} \log (1+x) - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{7}{4}$$

249. Für $n = 1$ findet allemahl 248; II ſtatt, wenn m eine ganze bejahte Zahl oder auch $= 0$ iſt; alsdenn iſt $r = m$; und man hat das Integral von $x^m . (a + bx)^p dx$

250. Iſt in (249) ferner $p = + \frac{1}{2}$ oder $= - \frac{1}{2}$ ſo hat man die Integrale von

$$\text{I)}\ x^m dx . \sqrt{(a+bx)};\ \text{II.}\ \frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)}}$$

251. Zuſ. Wenn m in (249) gerade iſt ſo ſetze man es $= 2c$; und $x^2 = u$; alſo $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ ſo verwandelt ſich (249) in $\frac{1}{2} u^{c - \frac{1}{2}} . (a + bu)^p . du$ welches ſich alſo auch integriren läſſt, c mag welche ganze bejahte Zahl man will ſeyn, oder auch $= 0$

252. Wenn $n = 2$ ſo folgt aus (248) das Integral von $x^{2r+1} . (a + bx^2)^p dx$

253. Nachdem man in (252), $p = + \frac{1}{2}$ oder $= - \frac{1}{2}$ ſetzt, hat man die Integrale von

$$\text{I)}\ x^{2r+1}.\sqrt{(a+bx^2)}\,dx;\ \text{II.}\ \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{(a+bx^2)}}$$

wo $2r+1$ jede ungerade Zahl ſeyn kann. Beyde ſind durch endliche Reihen ohne Logarithmen gegeben (249 VIII)

Ex. Für $x^3.\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$ iſt $r = 1$; $p + r = \frac{3}{2}$ alſo wird die Reihe in 248; VIIII; $(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{2}{5}.(a+bx^2) - \frac{2}{3}a\right)$
$= \frac{2}{15}.(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.(3bx^2 - 2a) = M$
Ferner aus 249; XI Conſt $=$
$- a^{\frac{5}{2}}.\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = + \frac{2}{15}.\ 2a^{\frac{5}{2}}$ Dies zu M geſetzt giebt $\frac{2}{15}.\left((a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.(3bx^2 - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}}\right)$ und dieſes nach 248 VIII; mit $2b^2$ dividirt giebt das verlangte Integral ſo daß es für $x + 0$ verſchwindet.

II. Ex. Eben ſo iſt für $\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ nur $p = -\frac{1}{2}$; $p + r = + \frac{1}{2}$ und das verbeſſerte Integral $\frac{\sqrt{(a+bx^2)}.(bx^2 - 2a) + 2a\sqrt{a}}{3bb}$

254. $(ax^q + bx^s)^p.\,dx = x^{pq}.$
$(a + bx^{s-q})^p.\,dx$; da iſt aus (248) $m = pq$; $n = s - q$, und das Differential läſſt nach 248; III; ſich integriren wenn $\frac{pq \quad 1}{s-q}$ eine ganze bejahte

jahte Zahl iſt, die man $= r + 1$ ſetzen kann. Es iſt $z = a + bx^{s-q}$

255. Wenn $p = \frac{1}{2}$; $s = q + 1$, ſo läſſt ſich $\sqrt{(ax^q + bx^{q+1})}.\, dx$ allemahl integriren wenn q gerade iſt. Es iſt alsdenn $r = \frac{1}{2}q$

Ex. Für $\sqrt{(ax^2 + bx^3)}.\, dx$ iſt $q = 2$; $r = 1$; $z = a + bx$ und das verbeſſerte Integral

$$2.\left(\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}.\,(3bx - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}}}{15b^2}\right)$$

256. Anm. Wenn man die gefundenen Integrale differentiirt, und daraus die angenommenen Differentiale herausbringt, ſo verſichert man ſich von der Richtigkeit der gefundenen Integrale, nicht in Abſicht auf die Gewißheit der Regeln, von denen man durch die Beweiſe überzeugt ſeyn muß, ſondern ob man ſolche richtig angebracht und gehörig gerechnet hat.

Andere Verwandlungen.

257. Aufg. $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$ zu integriren.

Aufl. Man ſetze $\sqrt{(ax+xx)} = \frac{zx}{b}$ alſo

$a + x = \frac{zzx}{b^2}$ und $x = \frac{ab^2}{z^2 - b^2}$ folglich $\frac{zx}{b}$

$= \frac{abz}{zz - bb}$ und $dx = \frac{abb. - 2zdz}{(zz - bb)^2}$ alſo

$$\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}} = \frac{a.\,a - 2abbzdz}{(zz-bb)^2}.\ \frac{zz - bb}{abb}.$$

zz —

$$\frac{zz - bb}{abz} = \frac{-2adz}{b}$$ davon das Integral

$$\frac{-2az}{b} = \frac{-2a\sqrt{(ax + xx)}}{x}$$

258. Anm. Die Abſicht bey dieſem Verfahren iſt die Irrationalgröſſe wegzuſchaffen; daher man ſich hier ſolcher Kunſtgriffe gebraucht wie bey den unbeſtimmten Aufgaben (Alg. 183.). Dergleichen lehrt auch Eul. Intr. in analyſ. inf. L. I. c. 3.

259. Die Differentiale die nur eine veränderliche Gröſſe enthalten, werden folgendergeſtalt abgetheilt. Wenn eine Gröſſe unterſchiedene Glieder enthält, in deren einem oder mehrern die veränderliche Gröſſe befindlich iſt, und aus dieſer zuſammengeſetzten Gröſſe, eine Wurzel gezogen wird, ſo heiſſt man das hier eine Irrationalgröſſe; und wenn dergleichen in einem Differentiale vorkommt, iſt es ein irrationales Differential.

Wie in 248; wenn p ein Bruch iſt, und in den folgenden Abſätzen.

Enthält das Differential keine ſolche zuſammengeſetzte Irrationalgröſſe, ſo heiſſt es rational.

Wie das (248) wenn p eine ganze Zahl, bejaht oder verneint wäre.

Hiebey hindert nichts, daß in einem Differentiale Theile vorkommen, wo aus der veränderlichen Gröſſe eine Wurzel gezogen iſt, wenn

ſolche

ſolche Theile nur keine zuſammengeſetzten Gröſſen ſind. So iſt in (208) das Element der Fläche der Parabel ein rationales Differential, denn das Verfahren nach 203. V; iſt einerley, m — 1 mag eine ganze Zahl oder ein Bruch ſeyn.

260. Wenn eine rationale Function ein Quotient iſt, wo ſich die veränderliche Gröſſe im Diviſor befindet, ſo heiſſt ſie eine gebrochne. Iſt die veränderliche Gröſſe nicht im Diviſor, eine ganze.

So wäre $\frac{a+bx}{c+fx^2}$ eine gebrochne Function, aber $\frac{m+nx}{g}$ eine ganze.

Wenn die ganze Function mit dx multiplicirt iſt, ſo hat die Integration keine Schwürigkeit. Bey einer gebrochnen Function aber ſind Kunſtgriffe nöthig die unten (347 u. ſ.) vorkommen werden.

261. Irrationale Differentiale, ſucht man in rationale zu verwandeln (wie 248) und wenn alsdenn gebrochne Functionen vorkommen bedient man ſich der nur erwähnten Kunſtgriffe.

Von der verkehrten Methode der Tangenten.

262. **Erkl.** Man heiſſt die verkehrte Methode der Tangenten das Verfahren, da man aus gegebenen Eigenſchaften der Tangenten oder Normal=

Normallinien u. ſ. w. einer krummen Linie, die Gleichung für die krumme Linie findet.

263. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{r+x}$ iſt.

Aufl. Alſo iſt $(r+x)\,dx = ydy$ oder $rx + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}y^2 + \text{Conſt.}$ Sollen x und y zugleich $= 0$ ſeyn, ſo iſt $\text{Conſt} = 0$ und $2rx + xx = yy$ und die krumme Linie iſt eine gleichſeitige Hyperbel (Alg. 417.) wo (Alg. 389.) $b = a = 2r$.

264. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie unveränderlich iſt.

Aufl. Weil $\frac{ydy}{dx} = a$ ſo iſt $ydy = adx$ folglich $\frac{1}{2}yy = ax + \text{Conſt.}$ Geſetzt nun, es ſoll $y = cc$ für $x = 0$ ſeyn: So iſt $\frac{1}{2}cc = 0 + \text{Conſt}$; oder $\text{Conſt} = \frac{1}{2}cc$; und $yy = 2ax + cc$. Man ſetze $x = u + e$ alſo $yy = 2au + 2ae + cc$; und nehme $e = -\frac{cc}{2a}$ ſo iſt $yy = 2au$. Man kann alſo die allgemeinſte Gleichung, die aus der Integration gefunden ward, $yy = 2au + 2ae + cc$, allemahl auf $yy = 2au$ eine Gleichung für eine Parabel, deren Parameter $2a$ wäre, bringen. Folglich hat blos die Parabel dieſe Eigenſchaft.

265.

265. Anm. Daß die Parabel dieſe Eigenſchaft hat, iſt ſchon (93) dargethan worden. Hier zeigt ſich, daß dieſe Eigenſchaft keiner andern krummen Linie zukömmt. Und ſo kann man vermittelſt dieſer Methode verſuchen, welche von den Sätzen, die durch die vorhin (77; 92) gelehrte Methode: (methodus directa tangentium) gefunden worden ſind, ſich umkehren laſſen.

Von der Rectification der krummen Linien.

266. Aufg. Das Differential des Bogens CM 1 F. einer gegebenen krummen Linie zu finden.

Aufl. Der Bogen CM heiſſe s, und wachſe um das endliche Stück MN = Δs indem die Abſciſſe AP um das endliche Stück PQ = MS wächſt. Nun iſt Δs allemahl gröſſer als die Sehne MN oder $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2 + NS^2)}} = 1 + p$ daß p eine bejahte Gröſſe bedeutet. Aber p kann unendlich abnehmen, weil die Sehne MN ihrem Bogen ſo nahe kommen kann als man will, wenn man die Ordinate NQ unendlich nahe an PM rücken läſſt. (68) Die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2 + NS^2)}}$ bey dieſer unendlichen Näherung iſt $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ welches = 1 ſeyn muß, weil p kleiner als jede angebliche Gröſſe werden kann. Wäre dieſe Gränze = 1 + q daß q eine angebliche Gröſſe bedeu-

bedeutete, ſo könnte p nicht kleiner als q werden. Daß die Gränze nicht kleiner als 1 iſt, erhellt, weil $\frac{\Delta s}{\surd(MS^2 + NS^2)}$ nicht kleiner als 1 werden kann. Alſo iſt s eine ſolche Function von x und y, daß $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Wenn man Mm für eine gerade Linie annimmt, wo $MR = dx$; $Rm = dy$ iſt, ſo iſt $Mm = \surd(dx^2 + dy^2)$. So trägt man den Beweis insgemein vor.

267. Aufg. **Die Länge s einer gegebenen krummen Linie zu finden.**

Auflage. Aus der Gleichung drucke man $\surd(dx^2 + dy^2)$ durch x, dx, oder durch y, dy, allein, wo möglich, aus, und integrire ſolches. Das Integral muß s ſeyn (266).

268. Aufg. **Eine Parabel für die $y^3 = axx$ iſt, zu rectificiren.**

Aufl. Weil $x = \frac{y^{3:2}}{\surd a}$ ſo iſt $dx = \frac{3}{2}.dy \surd\frac{y}{a}$; alſo

$$ds^2 = dy^2.\left(\frac{1 + 9.y}{4.a}\right) = dy^2.\left(\frac{4^a + 9.y}{4^a}\right);$$

Daher $2.\surd a.\,ds = (4.a + 9.y).\,dy$

Man vergleiche das Differential das rechter Hand ſteht, mit (245) und ſetze

dorten	p	X	a	dX	c
hie	$\frac{1}{2}$	9y	4a	9.dy	$\frac{1}{9}$

 ſo

ſo kömmt das Integral $= \frac{2}{27}.(4a + gy)^{3:2}$ $+ Conſt$

Soll nun die Länge der krummen Linie an⸗gehn wo $y = 0$; ſo iſt das gefundene Integral auch $= 0$ für die Ordinate $= 0$; folglich $Conſt = \frac{-2.8.a\sqrt{a}}{27}$ alſo $s = \frac{1}{27}.\left((4a + 9.y).\sqrt{\left(\frac{4a + 9y}{a}\right)} - 8.a\right)$

269. Weil $y = \sqrt[3]{ax^2}$; ſo gehört jeder Ab⸗ſciſſe nur eine mögliche Ordinate; Alle Ordinaten ſind bejaht, Einer verneinten Abſciſſe gehört eine Ordinate, ſo groß als der entgegengeſetzten bejahten ihre. So ſtreckt ſich die krumme Linie vom An⸗fange der Abſciſſe, auf einer Seite der Abſciſſen⸗linie, über bejahte und verneinte Abſciſſen ins Unendliche.

Die gefundne Länge, s, geht alſo vom An⸗fange der Abſciſſen, bis an die angenommene Ordinate, in einem der beyden Schenkel, dem welcher den bejahten, oder dem welcher den ver⸗neinten Abſciſſen gehört. Will man die Länge für ein gegebenes x haben, ſo darf man nur die Or⸗dinate berechnen welche dieſer Abſciſſe gehört.

270 Anm. Man heiſſt dieſe Parabel die neiliſche. Wilhelm Neil hat ihre Rectification gefunden und 1657 bekannt gemacht. Es iſt, ſo viel man weiß die erſte krumme Linie, die rectificirt worden iſt. S. Walli⸗ſens Brief an Hugen, der ſich bey Walliſens Schrift von

von der Cycloide befindet. Walliſ. Op. Math. Vol. I. p. 551. Unter den Erläuterungen über Carteſens Geometrie 517. S. findet ſich Heinrich v. Hevraet Schreiben von Verwandelung krummer Linien in gerade, an Franz v. Schooten, 1659 aufgeſetzt, wo Hevraet eben dieſe Parabel zum Exempel ſeiner Methode anführt. Neils Erfindung iſt ihm vermuthlich unbekannt geweſen. S. unten 559.

271. I. Einer Apolloniſchen Parabel Parameter ſey $= b$, Abſciſſe vom Scheitel auf der Axe $= u$; Ordinate $= z$, alſo $z^2 = b.\,u$, der Parabel Fläche $= \frac{2}{3}.\,u.\,\surd\,(b.\,u)$

II. Ich ſuche eine krumme Linie, deren Coordinaten x; y; ſind und deren Länge s ſich wie die Fläche der Parabel verhalten ſoll, alſo, wenn g eine unveränderliche Gröſſe bedeutet $g.\,ds = du.\,\surd\,bu$. III. Daher $g^2.(dx^2 + dy^2) = b.\,u.\,du^2$;

IV. Ich ſetze $y = u - e$, $dy = du$, alſo $g^2.\,dx^2 = (b.\,y + b.\,e - g^2).\,dy^2$

V. Hie ſetze ich $b.\,e = g^2$ So kömmt $g.\,dx = b^{\frac{1}{2}}.\,y^{\frac{1}{2}}.\,dy$ und wenn der geſuchten Linie Coordinaten beyde zugleich verſchwinden ſollen $g.\,x = \frac{2}{3}.\,y.\,\surd\,b.\,y = \frac{2}{3}.\left(u - \frac{g^2}{b}\right).\,\surd\left(\left(u - \frac{g^2}{b}\right).\,b\right)$

VI. Stellt man ſich alſo die halbe Parabel über ihrer Axe vor, ſo nehme man von ihrem Scheitel, auf der Axe $\frac{g^2}{b}$, da iſt die krumme Linie in der Axe; Nimmt man von dieſem Puncte auf der

Axe als Abſciſſe der krummen Linie y; ſo gehört derſelben als Ordinate $x = \frac{2.y}{3.g} \cdot \sqrt{b.y}$.

Dieſe Ordinate über die Abſciſſe genommen giebt den Schenkel der krummen Linie, deſſen Länge ſich wie die Fläche der obern Hälfte der Parabel verhält, und wenn man die Ordinate unter die Axe nimmt, giebt ſich der Schenkel für der Parabel untere Hälfte.

VII. Als Probe der Rechnung hat man (V) $g.\,dx = \left(u - \frac{g^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{b.}\,du$ daraus $g^2.(dx^2 + du^2) = u.b.du^2$; Folglich $g.\,s = \frac{2}{3}.u.\sqrt{(b.u)} = \frac{2}{3}.\left(y + \frac{g^2}{b}\right).$
$\sqrt{\left(b.\left(y + \frac{g^2}{b}\right)\right)}$

VIII. Aus (VI) iſt $\frac{9.g^2}{4.b} \cdot x^2 = y^3$ Soll der Coefficient linker Hand $= g$ ſeyn (II) ſo iſt $\frac{4}{9}.b = g$. Das giebt bey dieſem angenommenen Verhalten der unveränderlichen Gröſſen eine durch die andre.

IX. Setzt man $g = a$ ſo kömmt die Gleichung (271)

272. I. Man findet alſo die Länge der neiliſchen Parabel, für jede ihre Ordinate y, weil

man

man die Fläche der koniſchen Parabel für jede ihre Abſciſſe $u = y + \frac{g^2}{b}$ weiß.

II) In (271; VII) hat man $g^2 . s^2 = \frac{4}{9} . b . \left(y + \frac{g^2}{b}\right)^3$ eine algebraiſche Gleichung zwiſchen unbeſtimmter Abſciſſe, und Länge der krummen Linie.

So was nennt man unbeſtimmte algebraiſche Rectification einer krummen Linie, wie in (209; IV) Quadratur.

III) Hat man einer krummen Linie algebraiſche Quadratur, eine algebraiſche Gleichung zwiſchen ihrer unbeſtimmten Abſciſſe $= u$; und der zugehörigen Fläche $= Q$; ſo dividire man die Fläche, durch eine willkührliche unveränderliche gerade Linie $\frac{Q}{g}$, der Quotient iſt dann auch algebraiſch durch u gegeben.

Dieſer Quotient kann alſo Länge einer krummen Linie bedeuten. Dieſe Länge iſt gewiß durch u algebraiſch gegeben, und es kömmt darauf an, der geſuchten krummen Linie zu u gehörige Coordinate anzugeben.

IV. Wie man es bey der Parabel macht, wenn man (267) brauchen will zeigt (271), Neil,

 muſſte

muſſte anders verfahren. Hevraet verzeichnete eine krumme Linie, und wies was ihre Rectification für eine Quadratur erfoderte.

Quadraturen und Rectificationen, die zum Kreiſe gehören.

273. Aufg. Das Stück der Kreisfläche CDMP 17 F. zu quadriren, wo $CP = x$, $PM = y$; $CD = CA = 1$.

Aufl. Weil $y = \surd(1 - xx)$ alſo $ydx = dx\surd(1 - xx)$ ſo mache man die Reihe $\surd(1 - xx) = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$. Ein allgemeines Geſetz dieſer Reihe findet man aus 51 wenn dort $n = 2$ geſetzt wird. Da ſind die Coefficienten von $(1 + y)^{\frac{1}{2}}$; folgende, die erſte 1 nicht mitgerechnet,

$$\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{8}. -\frac{3}{3.2} = +\frac{1}{16}; +\frac{1}{16}.$$

$$-\frac{5}{4.2} = -\frac{5}{128}; -\frac{5}{128}.\frac{7}{5.2}$$

$= \frac{+7}{256}$ und ſo der r te Coefficient

$$\frac{1. - 1. - 3. \ldots\ldots - (2r - 3)}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots\ldots r. 2^r}$$ Es iſt aber $2r - 3$ die $r - 1$te ungerade Zahl, (wie man aus Alg. 38 findet, wenn man das dortige $2m + 1$ hier

hier $= 2r - 3$ ſetzt); und der rte Coefficient iſt bejaht oder verneint, nachdem die Zahl ſeiner verneinten Factoren, d. i. nachdem $r - 1$ gerade oder ungerade iſt. Um alſo was beſtimmtes zu haben, ſo ſetze man, er ſoll bejaht, alſo $r - 1 = 2t$ und $r = 2t + 1$ ſeyn, ſo iſt $2r - 3 = 4t + 2 - 3 = 4t - 1$ und der rte oder $2t + 1$ te Coefficient $=$

$$+ \frac{1.\ 1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ldots (4t-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots (2t+1)\, 2^{2t+1}} = P;$$

Alſo der folgende $(2t+2)$ te $= Q =$

$$\frac{P. - (2r-1)}{2.\ (r-1)}\ (51) = P.\ \frac{-(4t+1)}{2.\ (2t+2)} =$$

$$-\frac{P.\ (4t+1)}{2.\ (2t+2)}$$

Wenn man nun $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ macht, ſo wird der erſte Coefficient in $- xx$; der zweyte in $+ x^4$; der dritte in $- x^6$; und ſo der rte in $(-x^2)^r$ oder der $(2t+1)$ te in $(-x^2)^{2t+1}$ d. i. in $- x^{4t+2}$ multiplicirt, der $r + 1$ te oder $(2t+2)$te in $(-x^2)^{2t+2} = + x^{4t+4}$. Alſo wird jeder Coefficient, der in $(1 + y)^{\frac{1}{2}}$ bejaht iſt, in eine verneinte Gróſſe, und jeder verneinte in eine bejahte multiplicirt. Die Producte werden alſo alle verneint, und es iſt

$$\sqrt{(1 - xx)} = 1 - \tfrac{1}{2} xx - \tfrac{1}{8} x^4 - \tfrac{1}{16} x^6 - \tfrac{5}{128} x^8 - \tfrac{7}{256} x^{10} \ldots$$

$$\frac{-1.\,1.\,3.\,5.\ \ldots\ldots (4t-1).\ x^{4t+2}}{1.\,2.\,3.\,4.\ \ldots\ldots (2t\quad 1)\ 2^{t+1}}$$

$$-\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}.\ x^{4t+4}\ldots.$$

Wenn man nun hier jedes Glied mit dx multiplicirt und integrirt, ſo erhält man:

$$\int dx \sqrt{(1-xx)} = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{8.5} - \frac{x^7}{16.7}$$

$$-\frac{5x^9}{128.9} - \frac{7x^{11}}{256.11}\ldots.$$

$$-\frac{1.1.3.5\ldots\ldots(4t-1).\ x^{4t+3}}{1.2.3.4\ldots\ldots(2t+1).\ 2^{2t+1}.(4t+3)}$$

$$-\frac{P.(4t+1).\ x^{4t+5}}{2.(2t+2).(4t+5)}\ldots..$$

Wo die allgemeinen Glieder wegen des Geſetzes des Fortganges zu merken ſind. Die Conſt iſt hier und in der Folge $= 0$ weil das Integral mit den Gröſſen, nach denen die Reihen fortgehen, wie hier x, in (275) u iſt, verſchwinden. Dieſe Reihe gibt ein Stück DCPM bald ziemlich genau, wenn x klein iſt.

Wenn man in ihr $x = 1$ ſetzt, ſo bekömmt man den Innhalt des Quadranten DCA $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}\ldots.$

274. Das Stück CDMP beſteht aus dem Ausſchnitte MCD und dem Drenecke CMP; Es iſt alſo $\frac{1}{2}$ Bog DM $+ \frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2}$; des Bo-

gens

gens DM Sinus für den Halbmeſſer $= 1$, iſt x; dieſer Bogen heiſſe δ; So iſt CDMP $= \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}.\sin 2\delta$ (Trig. 19. S. 5. Zuſ.) Folglich $\int\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \int\cos\delta.\,d\sin\delta = \frac{1}{4}.(2\delta + \sin 2\delta)$

275. Aufg. Den Abſchnitt APM zu quadriren, wo AP $= u = 1 - x$ (273.)

Aufl. Hier iſt $y = \sqrt{(2u - uu)}$ alſo das Element des Abſchnitts $= du\sqrt{(2u - uu)}$. Dieſes zu integriren muß die Irrationalgröſſe in eine unendliche Reihe verwandelt, und denn wie in (273) verfahren werden. Dieſe Verwandelung bequem zu verrichten, erwege man, daß die Irrationalgröſſe $= \sqrt{2u}.\sqrt{(1 - \frac{1}{2}u)}$. Man ſuche alſo nur die unendliche Reihe für den letzten Factor; dieſe hat man aus (273), wenn man ſtatt des dortigen xx, hier $\frac{1}{2}$ u ſchreibt. Sie wird alſo

$$1 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}.u.u - \frac{1}{16.8}.u^3 - \frac{5}{128.16}.u^4 - \frac{7}{256.32}.u^5 \ldots\ldots - P.(\tfrac{1}{2}u)^{2.t+1}$$

$- Q.(\frac{1}{2}.u)^{2.t+2}\ldots$ Folglich iſt $\sqrt{(2.u - u - u)} = \sqrt{2}.\sqrt{(u - \frac{1}{2}.u^2)} = \sqrt{2}.(u^{1:2} -$

$$\frac{1}{4}.u^{3:2} - \frac{1}{8.4}u^{5:2} - \frac{1}{16.8}.u^{7:2} - \frac{5}{128.16}.u^{9:2}\ldots\ldots - \frac{P}{2^{2.t+1}}.u^{(4.t+3):2} - \frac{Q}{2^{2.t+2}}.u^{(4t+5):2}\ldots\ldots)$$

Jedes Glied dieſer Reihe

 mit

mit du multiplicirt und integrirt giebt die Fläche

$$APM = \sqrt{2}\left(\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}.\tfrac{2}{5}.u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8.4}.\tfrac{2}{7}.u^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16.8}.\tfrac{2}{9}.u^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{128.16}.\tfrac{2}{11}.u^{11:2}\ldots\ldots - \frac{P}{2^{2t+1}}.\frac{2}{4t+5}.u^{(4t+5):2} - \frac{Q}{2^{2t+2}}.\frac{2}{4t+7}.u^{(4t+7):2}\ldots\ldots\right)$$

Man ſieht gleich, daß ſich jede zwey folgende Glieder der Reihe ſo ausdrücken laſſen, wenn P einen Coefficienten, für den r ungerade iſt, (273) bedeutet:

$$-\frac{P}{2^{2t}}.\frac{u^{(4t+5):2}}{4t+5} - \frac{Q}{2^{2t+1}}.\frac{u^{(4t+7):2}}{4t+7}$$

Daher denn auch für dieſe Reihe ein allgemeines Geſetz dargethan iſt.

276. Man kann ſie auch ſo ausdrücken:

$$2\sqrt{2}\,u.\left(\tfrac{1}{3}u - \frac{1}{4.5}u^2 - \frac{1}{8.4.7.}u^3 - \frac{1}{16.8.9}u^4 - \frac{5}{128.16.11}u^5\ldots\ldots\frac{\ldots - P.u^{2t+2}}{2^{2t+2}.(4t+5)} - \frac{Q\,u^{2t+3}}{2^{2t+2}.(4t+7)}\ldots\right)$$

277. Wenn z; v; als Ordinate und Abſciſſe eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer r iſt, einem

Bogen

Bogen zugehören, der dem Bogen AM 17 F. ähnlich iſt; ſo iſt $z = ry$; $v = ru$; $dv = rdu$ (Trig. 1. S.) alſo das Element des ähnlichen Abſchnittes in dieſem Kreiſe $= zdv = ry.\ rdu = rr.\ ydu$; und folglich der Abſchnitt der in dieſem Kreiſe einem Bogen zugehört, der dem Bogen AM ähnlich iſt; $= rr\int ydu$; Man findet ihn alſo, wenn man $\frac{v}{r}$ ſtatt u ſetzt, aus 276 folgendergeſtalt:

$$2rr.\ \sqrt{\frac{2v}{r}}.\left(\tfrac{1}{3}.\frac{v}{r} - \frac{1}{4.5}.\frac{vv}{rr} - \frac{1}{8.4.7}.\left(\frac{v}{r}\right)^3 - \frac{1}{16.8.9}.\left(\frac{v}{r}\right)^4 - \frac{5}{128.16\,11}.\left(\frac{v}{r}\right)^5 \ldots. - \frac{P}{2^{2t+1}.(4t+5)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+2} - \frac{Q}{2^{2t+2}.(4t+7)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3}\ldots\right)$$

278. Man ſetze nun den Durchmeſſer $= 1$ alſo $r = \frac{1}{2}$; ſo iſt $2rr\sqrt{\frac{2v}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{4v} = \sqrt{v}$; und die Fläche wird

$$\sqrt{v}.\left(\tfrac{2}{3}v - \tfrac{1}{5}vv - \frac{1}{4.7}.v^3. - \frac{1}{8.9}.v^4 - \frac{1}{64.11}.v^5 \ldots.. - \frac{2P}{4t+5}.v^{2t+2} - \frac{2Q}{4t+7}.v^{2t+3}\ldots.\right)$$

279.

279. Man kann in der Reihe (273) jedes Glied durch das vorhergehende ausdrucken, das wo $4t+3$ der Exponent von x iſt ſey $= \zeta$; und das folgende $= \vartheta$; ſo iſt $P = \frac{-(4t+3)\zeta}{x^{4t+3}}$ welcher Werth von P im folgenden Gliede gebraucht $\vartheta = \frac{(4t+3).(4t+1)}{2.(2t+2).(4t+5)}.\zeta x^2$ giebt; welches verneint iſt, weil ζ verneint iſt.

Exempel. Wenn $4t+3 = 7$ alſo $t = 1$ und $\zeta = \frac{-x^7}{16.7}$ ſo iſt $\vartheta = \frac{7.5}{2.4.9}.\frac{-x^7}{16.7}.xx = -\frac{5}{128.9}x^9$. Dieſes dient, daß man nicht jedes Glied von neuem berechnen darf, ſondern aus jedem berechneten das nächſtfolgende finden kann.

280. Eben ſo in 277; wenn in der Reihe, die in $2rr\sqrt{\frac{v}{r}}$ multiplicirt wird; das Glied, deſſen Exponent $2t+2$ iſt ζ; das folgende ϑ heiſſt; ſo iſt $P = 2^{t+1}.(4t+5).\left(\frac{v}{r}\right)^{-2t-2}.\zeta$ und weil $Q = \frac{-P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$ (293) ſo iſt

$= \vartheta$

$$\vartheta = \frac{(4t+5).(4t+1)}{4.(2t+2).(4t+7)}\zeta.\frac{v}{r}.$$

Exempel. Wenn $\zeta = -\frac{1}{16.8.9}.\left(\frac{v}{r}\right)^4$

alſo $t = 1$ ſo iſt $\vartheta = \frac{9.5}{4.4.11}.-\frac{1}{16.8.9}.$

$$\left(\frac{v}{r}\right)^4.\frac{v}{r} = \frac{-5}{128.16.11}.\left(\frac{v}{r}\right)^5.$$

281. Aufg. Es ſey 17 F. $CA = r$; $PM = s$; $AM = a$ welches hier eine veränderliche Gröſſe bedeutet. Man ſoll den Bogen a aus ſeinem Sinus s finden.

Aufl. $AP = r - CP = r - \sqrt{(rr-ss)}$ alſo $dAP = Pp = MR = \frac{-sds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ und

(266) $da = \sqrt{\left(ds^2 + \frac{s.s.ds^2}{r^2-s^2}\right)} = \frac{rds}{\sqrt{(rr-ss)}}$

oder das Differential eines Bogens iſt ein Product aus dem Halbmeſſer in das Differential des Sinus, mit dem Coſinus dividirt; welche Formel von häufigem Gebrauche iſt.

Alſo iſt $da = \frac{r.ds}{r.\sqrt{\left(1-\frac{ss}{rr}\right)}}$

$= ds.\left(1-\frac{s.s}{r.r}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Die Irrationalgröſſe

wird

wird aus (52) in eine Reihe verwandelt. Man ſetzt ſtatt

dorten	y	e	r
hie	$\frac{-s.s}{r.r}$	2	n

Nun ſind in (52) alle Coefficienten, die zu ungeraden Potenzen von y d. i. hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, verneint, alle aber, die zu geraden von y oder hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, bejaht. Das erhellt daraus, weil in 52 iſt gewieſen worden, daß jeder folgende Coefficient dem vorhergehenden entgegengeſetzt iſt, zu y aber gehört ein verneinter. Da nun hier die ungeraden Potenzen von $\frac{-ss}{rr}$ verneint, die geraden bejaht ſind, ſo iſt jedes Glied der Reihe ein Product aus zwo verneinten, oder zwo bejahten Gröſſen, und folglich allemahl bejaht. Daher ſieht die Reihe ſo aus

$$1 + \tfrac{1}{2}.\frac{ss}{rr} + \frac{1.3.}{1.2.4}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1:3.5}{1.2.3.8}.$$

$$\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^4$$

$$\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}.\left(\frac{ss}{rr}\right)^5 \ldots.$$

I.

$$+ \frac{1.3.5.\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3.\ldots\ldots n.\ 2^n} \cdot \left(\frac{ss}{rr}\right)^n$$

$$+ \frac{P.(2n+1)}{(n+1).2} \cdot \left(\frac{ss}{rr}\right)^{n+1} + \ldots\ldots$$

Wenn man hier jedes Glied mit ds multiplicirt, und integrirt; und Conſt = o ſetzt, weil a und s zugleich = o ſind, ſo erhält man

$$a = s + \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{3}.\ \frac{s^3}{r^2} + \frac{1.3}{1.2.4}.\ \tfrac{1}{5}.\ \frac{s^5}{r^4}$$

$$+ \frac{1.3.5}{1.2.3.8}.\ \tfrac{1}{7}\ \frac{s^7}{r^6} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}.\ \tfrac{1}{9}.\ \frac{s^9}{r^8}$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}.\ \tfrac{1}{11}.\ \frac{s^{11}}{r^{10}} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.\ 3.\ \ldots\ldots 2n-1}{1.2.\ \ldots\ \ n.\ 2^n}.\ \frac{1}{2n+1}.\ \frac{s^{2n+1}}{r^{2n}}$$

$$+ \frac{P.(2n+1)}{(n+1).\ 2.\ (2n+3)}.\ \frac{s^{2n+2}}{r^{2n+2}} \ldots\ldots$$

welche Reihe alſo wieder durch ein allgemeines Geſetz gegeben iſt.

Wenn das Glied, deſſen Exponent $2n+1$ iſt; ζ; und das folgende ϑ heiſſt; ſo iſt

$P = (2n+1).\left(\frac{s}{r}\right)^{-2n} \cdot \frac{\zeta}{s}$ daraus findet ſich

$$\vartheta = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)\,(2n+3)}.\ \zeta.\left(\frac{s}{r}\right)^2$$

Exem=

Exempel. Wenn $2n + 1 = 9$ alſo $n = 4$; ſo iſt

$$\vartheta = \frac{9.9}{10.11} \cdot \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{s^9}{r^8} \cdot \frac{ss}{rr}$$

$$= \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{s^{11}}{r^{10}}$$

282. Wenn das erſte Glied der Reihe A, das zweyte B, das dritte C u. ſ. w. heiſſt, ſo iſt für

$n = 0; \quad 1; \quad 2; \quad 3;$
$\zeta = A; \quad B; \quad C; \quad D;$

$$\vartheta = \frac{1.1}{2.3} \cdot \frac{A.ss}{rr}; \; \frac{3.3}{4.5} \cdot \frac{B.ss}{rr}; \; \frac{5.5}{6.7} \cdot \frac{C.ss}{rr}; \ldots$$

alſo die Reihe; wenn $r = 1$

$$a = s + \frac{1.1}{2.3}; ss.A + \frac{3.3.ss}{4.5.} B + \frac{5.5.ss}{6.7.} C + \frac{7.7.ss}{8.9} \cdot D + \frac{9.9.ss}{10.11.} E \ldots$$

283. Für $r = 1$; iſt $\frac{a}{s}$

$$= 1 + \frac{As}{6} + \frac{3.3.B.s}{4.5} \ldots$$

Dieſer Quotient wird am gröſſten, wenn die Reihe, die ihm gleich iſt, am gröſſten wird. Weil aber dieſer Reihe

Reihe Glieder alle bejaht ſind, ſo iſt ſie am grösſten, wenn s am grösſten, oder = 1 iſt; da denn a dem Bogen von 90 Gr. gleich wird. Alſo giebt der Bogen von 90 Gr. durch ſeinen Halbmeſſer dividirt, einen grösſern Quotienten, als jeder andere Bogen, durch ſeinen Sinus dividirt.

Der grösſte Sinus iſt = 1 alſo iſt der grösſte Bogen den die Reihe giebt, der Quadrant $= 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} \ldots$ wo der Werth dem ſich die Reihe unendlich nähert aus Ludolphs von Cöln Zahlen = 1,5707.... iſt. (Geom. 44. Satz) Zugleich grösſter Bogen, und grösſter Quotient eines Bogens durch ſeinen Sinus.

Es verſteht ſich daß hie nur die Bogen betrachtet wreden die von 0 bis zum Quadranten wachſen. Begreiflich giebt der Bogen von 150 Graden mit ſeinem Sinus dividirt fünfmahl ſoviel als der Bogen von 30 Graden mit ebendem Sinus dividirt, und wenn die Bogen über den Quadranten bis zum Halbkreiſe wachſen, nehmen ihre Sinus bis an Nichts ab und die Quotienten wachſen ins Unendliche. Von ſolchen iſt hie nicht die Rede.

284. Wenn man $a = \frac{1}{2} b$; $s = \frac{1}{2} c$ ſetzt, ſo giebt ſich der Bogen b durch ſeine Sehne c; aus (281) folgendergeſtalt

$$b = c + \frac{c^3}{24} + \frac{3 \cdot c^5}{640} \ldots$$

285. Aufg. Aus dem Bogen a; den Sinus s zu finden. Ich will dabey $r = 1$ ſetzen.

Aufl. Man könnte zu dieſer Abſicht nur die Reihe (281) umkehren. Sie iſt nähmlich $a = s + hs^3 + is^5 \ldots$, wo h; i; u. ſ. w. die gegebenen Coefficienten ſind, wenn man nun in Alg. 690. ſtatt des dortigen x; y; λ; δ;
hier a; s; 1; 2;
ſetzet, ſo erhellt, daß die umgekehrte Reihe $s = Aa + Ba^3 \ldots$ iſt wo man die Coefficienten A; B; ... beſtimmen müſſte. Dieſes geſchähe ſo, daß man ſtatt s; s^3; u. ſ. w. die nur angenommene Reihe ſetzt; folgendergeſtalt

$$\begin{array}{llll} a = s = & Aa & + Ba^3 & + C \\ + \frac{1}{6}s^3 = & & + \frac{1}{6}A^3 & + \frac{1}{6}.\,3AAB \\ + \frac{3}{40}s^5 & & & = \frac{3}{40}A^5 \end{array} \Big] a^5$$

Alſo $A = 1$; und weil die folgenden Glieder alle $= 0$ ſeyn müſſen, $B = -\frac{1}{6}$; $C = + \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = + \frac{1}{120}$ u. ſ. w. alſo giebt dieſes $s = a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{120}a^5 \ldots\ldots$

So pflegt man insgemein dieſe Aufgabe aus der vorhergehenden herzuleiten. Dazu nun muß man hohe Potenzen der Reihe $Aa + Ba^3 \ldots$ machen, wenn man viel Coefficienten derſelben haben will; und auſerdem daß dieſes eine ſehr mühſame Rechnung erfodert, ſo ſehe ich nicht, wie ſich daraus ein allgemeines Geſetz für die Coefficienten A, B, ... zuverläſſig beſtimmen läſſt, weil die höhern Glieder der Potenzen der unend-

unendliche Reihen, aus denen man die folgenden Coefficienten beſtimmen muß, gar zu ſehr zuſammengeſetzt werden. Ich will alſo von dieſem Verfahren hier nichts beybehalten als die Geſtalt der Reihe, die man für s annehmen muß. Ich will nähmlich ſetzen

$$s = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 \ldots . + \pi a^{2n-1}$$
$$\varrho a^{2n+1} + \sigma a^{2n+3} \ldots .$$

Ich nehme da unveränderlich an, und finde

$$\frac{ds}{da} = 1 + 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 \ldots .$$
$$+ (2n-1)\pi a^{2n-2} + (2n+1)\varrho a^{2n}$$
$$+ (2n+3)\sigma a^{2n+2}$$

und

$$\frac{dds}{da^2} = {}^* + 3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 + 7.6.\gamma a^5 \ldots$$
$$+ (2n-1).(2n-2)\pi a^{2n-3}$$
$$+ (2n+1).\ 2n.\ \varrho a^{2n-1}$$
$$+ (2n+3).(2n+2).\ \sigma a^{2n+1}$$

Nun iſt (281) $\frac{ds^2}{da^2} = 1 - ss$; alſo $\frac{2dsdds}{da^2}$

$= -- 2sds$ oder $\frac{dds}{da^2} = -- s$

Folglich

$$3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 + 7.6.\gamma.a^5 \ldots .$$
$$+ (2n+1).\ 2n.\ \varrho a^{2n-1}$$
$$+ (2n+3).(2n+2)\sigma a^{2n+1}$$

 $= --$

$= - a - \alpha a^3 - \beta a^5 \ldots\ldots - \pi a^{2n-1}$
$- \varrho a^{2n+1} \ldots\ldots$

Wenn man hier die Coefficienten bey einerley Potenz von a gleich ſetzt, ſo erhält man

$$\alpha = \frac{-1}{3.2};\ \beta = \frac{-\alpha}{5.4};\ \gamma = \frac{-\beta}{7.6}\ldots\ldots$$

$$\varrho = \frac{-\pi}{(2n+1).2n};\ \sigma = \frac{-\varrho}{(2n+3).(2n+2)}$$

wo das Geſetz des Fortganges deutlich in die Augen fällt. Jeder Coefficient iſt dem vorhergehenden entgegengeſetzt, und alſo wechſeln bejahte und verneinte ab. Alſo iſt, wenn man jeden Coefficienten mit ſeinem Zeichen nimmt, daß $\alpha =$

$$-\frac{1}{3.2};\beta = -\left(\frac{1}{3.2}\right) : 5.4 = \frac{+1}{5.4.3.2}$$

u. ſ. w.

$$s = a - \frac{1}{3.2}a^3 - \frac{\alpha}{5.4}.a^5 - \frac{\beta}{6.7}a^7 \ldots$$

$$\frac{-\pi}{(2n+1).2n}a^{2n+1}\frac{-\varrho}{(2n+3).(2n+2)}.a^{2n+3}$$

π gehört zum Exponenten $2n-1$;

So gehören zuſammen

$2n-1=$	3	5	7
$\pi =$	$+\frac{1}{3.2}$	$-\frac{1}{5.4.3.2}$	$+\frac{1}{7.6.5.4.3.2}$

Jeder

Jeder folgende Coefficient kömmt nähmlich heraus, wenn man den vorhergehenden durch ein Product, aus dem Exponenten, zu dem der folgende gehört, in die nächſt kleinere Zahl dividirt. Da nun die Exponenten die ungeraden Zahlen nach der Reihe ſind, ſo iſt der Diviſor jedes Coefficienten ein Product aus allen ganzen Zahlen nach der Reihe, von dem Exponenten an, dem er zugehört. Alſo iſt überhaupt

$$\pi = \frac{\pm 1}{(2n-1).(2n-2).(2n-3)\ldots\ldots 2};$$

ob aber π bejaht oder verneint iſt, erhellt daraus: Wenn $2n - 1$ die zweyte ungerade Zahl; 3; bedeutet, ſo iſt π verneint, und alſo auch weil die Zeichen der Coefficienten abwechſeln, verneint, wenn π die vierte, ſechſte u. ſ. w. ungerade Zahl bedeutet: Folglich bejaht, wenn es die dritte, fünfte, u. ſ. w. ungerade Zahl bedeutet. Aber für die dritte, fünfte, u. ſ. w. ungerade Zahl, oder für eine Zahl, deren Stelle unter den ungeraden Zahlen durch eine ungerade Zahl angedeutet wird, iſt n ungerade; weil $2n - 1$ die nte ungerade Zahl bedeutet. Man ſetze alſo $n =$ einer ungeraden Zahl $= 2t + 1$ ſo iſt $2n - 1 = 4t + 1$ und

$$\pi = \frac{+1}{(4t+1).4t.(4t-1)\ldots 2}$$ Folglich der Coefficient bey dem Exponenten $2n+1$ oder $4t + 3$; oder

$$\varrho = \frac{-1}{(4t+3).(4t+2).4t+1\ldots.2}$$

und die drey Glieder, welche die Exponenten $2n-1$; $2n+1$; $2n+3$ oder $4t+1$; $4t+3$; $4t+5$; haben, ſind

$$\frac{+a^{4t+1}}{(4t+1).4t.(4t-1)\ldots.2}$$

$$\frac{-a^{4t+3}}{(4t+3).(4t+2).(4t+1).4t\ldots.2}$$

$$\frac{+a^{4t+5}}{(4t+5).(4t+4)\ldots.2}$$

Wenn dieſe drey nur gefundenen Glieder ζ; ϑ; η; heiſſen ſo iſt $\pi = \zeta.a^{-4t-1}$ folglich $\vartheta = -\frac{\zeta aa}{(4t+1).(4t+3)}$ auch $\varrho = \vartheta.a^{-4t-3}$ und $\eta = \frac{-\vartheta.a.a}{(4t+5).(4t+4)}$. Man kann, dieſe Formel zu gebrauchen, zuerſt $\frac{-\alpha}{5.4}.a^5 = \zeta$ ſetzen, da $t=1$ iſt. Heiſſt man nun die völligen Glieder, nicht die Coefficienten der Reihe s, nach der Ordnung;

$a = A$; $-\frac{1}{2.3.}a^3 = B$ u. ſ. w. ſo iſt

$s =$

$$s = a - \frac{Aaa}{2.3} - \frac{Baa}{4.5} - \frac{Caa}{6.7} - \frac{Daa}{8.9}$$

$$- \frac{Eaa}{10.11} \ldots$$

286. Zuſ. Aus 284; wird hier $c = b$

$$- \frac{b^3}{24} + \frac{b^5}{1920} \ldots$$

287. Aufg. Aus dem Querſinus (Sinus verſus) AP; den Bogen $AM = a$; zu finden.

Aufl. Es ſey $AP = u$; $CA = 1$ wie in 275; ſo iſt (nach Geom. 44. S. 8. Z.) der Abſchnitt

$$APM = a. \tfrac{1}{2} - \frac{(1+u). \sqrt{(2u - uu)}}{2}$$ alſo

$$2. APM + (1-u). \sqrt{2u}. \sqrt{1 - \tfrac{1}{2} u} = a$$

Nun iſt (275)

$$\sqrt{2u}. \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2} uu)} = \sqrt{2u}. \Big(1 - \tfrac{1}{4} u$$

$$- \frac{1}{8.4}. u^2. - \frac{1}{16.8}. u^3 - \frac{5}{128.16} u^4$$

$$- \frac{7}{256.32}. u^5 \ldots - \frac{P. u^{2t+1}}{2^{2t+1}}$$

$$- \frac{Q. u^{2t+2}}{2^{2t+2}} \ldots \Big)$$

Dieſes multiplicirt mit $1 - u$ giebt

$$\sqrt{2u}.\left(1-\tfrac{5}{4}u+\frac{7uu}{8.4}+\frac{9u^3}{16.8}+\right.$$

$$\frac{11}{128.16}u^4+\frac{13}{256.32}.u^5\ldots$$

$$\left.+\frac{2P-Q}{2^{2t+2}}u^{2t+2}+\frac{2Q-R}{2^{2t+3}}.u^{2t+3}\ldots\right)$$

wo aus 273. $P=\frac{1.1.3.5\ldots.(4t-1)}{1.2.3.4\ldots(2t+1).2^{2t+1}}$

und $Q=\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$ und $R=\frac{Q.(4t+3)}{2.(2t+3)}$

und $2P-Q=\frac{(4t+7)P}{2(2t+2)}$

$$2Q-R=\frac{(4t+9).Q}{2.(2t+2)}$$

alſo die beyden Glieder deren Exponenten $2t+2$ und $2t+3$ ſind

$$+\frac{(4t+7).P.u^{2t+2}}{2^{2t+3}.(2t+2)}+\frac{(4t+9).Q.u^{2t+3}}{2^{2t+4}.(2t+3)}$$

auf die Zeichen der Coefficienten wird hier nicht geſehen, ſondern ſie werden alle als bejaht angenommen, weil ſich durch jedes Multiplication mit der zugehörigen Potenz von $-\frac{1}{2}u$ das Zeichen des Products giebt, (275; 273;)

Zu dieſer Reihe nun muß man 2. APM addiren, um a zu haben. Ich nehme 2. APM aus 276.

wo

wo man $4\sqrt{2u}$ in die Reihe $\frac{1}{3}u\ldots$ zu multipliciren hat. Um nun den gemeinſchaftlichen Factor $\sqrt{2u}$ in beyde unendliche Reihen in $\frac{1}{3}u\ldots$ und in $1-\frac{5}{4}u\ldots$ zu multipliciren, ſo multiplicire ich bey 2 APM ſogleich 4 in alle Glieder der Reihe $\frac{1}{3}u\ldots\ldots$ dieſes giebt

$$2.\,APM = \sqrt{2.u.}\left(\tfrac{4}{3}u - \tfrac{1}{5}uu - \frac{1}{8.7}u^3\ldots\right.$$

$$\left.-\frac{4P.\,u^{2t+2}}{2^{2t+1}.\,(4t\,5)} - \frac{4Q\,u^{2t+3}}{2^{2t+2}.(4t+7)}\ldots\right)$$

dazu addire man die nur jetzo gefundene Reihe $\sqrt{2u.}\,(1-\frac{1}{2}uu)$; ſo bekömmt man, die Glieder, die einerley Potenz von u haben, zuſammengerechnet:

$$a = \sqrt{2u.}\,(1 + \frac{u}{12} + \frac{5u^3}{16.8.7}\ldots$$

$$+\frac{5.\,7.\,u^4}{64.\,32.\,9} + \frac{63\,u^5}{256.\,32.\,11}\ldots\ldots$$

$$+\frac{16\,tt+16t+3}{(2t+2).\,(4t+5)}.\,\frac{1}{2^{2t+3}}.\,P.\,u^{2t+2}$$

$$+\frac{16\,tt+32\,t+15}{(2t+3).\,(4t+7)}.\,\frac{1}{2^{2t+4}}.\,Q\,u^{2t+3}$$

288. Wenn das Glied der Reihe, deſſen Exponent 2t 2 iſt, ζ; das folgende ϑ heiſſt, ſo

$$\text{iſt } P = \frac{(2t+2).\,(4t+5).\,2^{2t+3}}{16\,tt+16t+3}.\,\zeta\,u^{2t-2}$$

 woraus

woraus Q nach 287 gemacht, und mit den gehörigen Gröſſen multiplicirt $\vartheta =$

$$\frac{(16tt + 32t + 15).(4t + 5).(4t + 1)}{(16tt + 16t + 3).(2t + 3).(4t + 7)4}.\zeta u$$

giebt.

Ex. Wenn $t + 1$ ſo iſt $\vartheta = \frac{63.\,9.\,5.}{35.\,5.\,11.\,4.}$

$$\frac{5.\,7u^4.u}{64.\,32.\,9} = \frac{63u^5}{256.\,32.\,11}$$

289. Zuſ. Zu ſehen, ob ſich $16tt + 32t + 15$ in Factoren zerfällen läſſt, ſetze man es $= (4t + \alpha)(4t + \beta) = 16tt + 4.(\alpha + \beta) + \alpha\beta$. Dieſes giebt $\alpha + \beta = 8$; $\alpha\beta = 15$ oder $\beta = \frac{15}{\alpha}$ ſoglich $\alpha + \frac{15}{\alpha} = 8$ oder $\alpha\alpha = 8\alpha - 15$ oder $\alpha = 4 \pm \surd(16 - 15)$ das iſt, $\alpha = 5$ oder 3; da alsdenn $\beta = 3$ oder 5 wird, alſo iſt dieſe Gröſſe $= (4t + 5).(4t + 3)$. Eben ſo findet man $16tt + 16t + 3 = (4t + 1).(4t + 3)$ alſo $\vartheta = \frac{(4t + 5)^2}{(4t + 7).(4t + 6).\,2}.\zeta$

290. Wenn S der Binomialcoefficient iſt, der nach R folgt, alſo $S = \frac{R.(4t + 5)}{2.(2t + 4)}$ ſo iſt der Reihe $\surd(1 - \frac{1}{2}uu)$ (287) Glied das nach dem folgt, deſſen Exponent $2t + 3$ iſt,

$\frac{2R-S}{2^{2t+4}}u^{2t+4}$ und das Glied der Reihe (276) das eben den Exponenten hat

$-\frac{R.u^{2t+4}}{2^{2t+3}.(4t+9)}$. Es iſt ferner

$$2R-S=\left(2-\frac{(4t+5)}{2.(2t+4)}\right)R=\frac{4t+11}{2.(2t+4)}.$$

R rechnet man alſo die beyden Glieder der Reihen (287); (276) die den Exponenten 2t 4 haben, zuſammen, ſo bekömmt man nach gehöriger Rechnung die wie 287; 289; bewerkſtelliget wird, das Glied der Reihe 287; das eben den Exponenten hat $\frac{(4t+7).(4t+5)}{(2t+4).(4t+9)}.\frac{R}{2^{2t+5}}.u^{2t+4}$

291. Wenn dieſes Glied η heiſſt, und $R=\frac{Q.(4t+3)}{2.(2t+3)}$ geſezt wird, ſo iſt

$$\vartheta=\frac{(4t+5).(4t+3)}{(2t+3).(4t+7).2^{2t+4}}Qu^{2t+3}$$

daraus findet man $\eta=\frac{(4t+7)^2}{(4t+9).(4t+8).2}$. ϑu wie in (288).

292. Wenn man die drey Glieder ϑ, ζ, η; (289; 291) mit einander vergleicht, wo wenigſtens $t=1$ alſo 4 der kleinſte Werth von $2t+2$;

ſeyn

ſeyn muß, ſo erhellt aus ihnen ein allgemeines Geſetz der Reihe, welches für die 4 erſten Glieder auch durch die Rechnung richtig gefunden wird, wenn nähmlich die Glieder nach der Reihe $1 = A$; $\frac{1}{12} = B$ u. ſ. w. heiſſen, ſo iſt

$$a = \sqrt{2u}\left(1 + \frac{1}{2.3.2} \cdot Au + \frac{3.3}{4.5.2} \cdot Bu\right.$$
$$+ \frac{5.5.}{6.7.2} Cu + \frac{7.7}{8.9.2.} \cdot Du$$
$$\left. + \frac{9.9}{10.11.2.} Eu \ldots\ldots\right)$$

293. Aufg. Aus dem Bogen a; den Querſinus u zu finden.

Aufl. Weil $a = u^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} + \frac{u^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}{12}$. (287);

ſo iſt, wenn man dieſe Reihe umkehren will (Alg. 690.) das dortige; x; y; λ; δ
hier ; a; u; $\frac{1}{2}$; 1;

alſo $\frac{1}{\lambda} = 2$; $(1 + \delta) : \lambda = 2 : \frac{1}{2} = 4$; folglich die umgekehrte Reihe

$$u = \alpha aa + \beta a^4 + \gamma a^6 \ldots + \pi a^{2n} + \varrho a^{2n+2} + \sigma . a^{2n+4} + \tau . a^{2n+6}$$

und $\frac{du}{da} = 2\alpha a + 4\beta a^3 + 6\gamma a^5 \ldots$

$$+ 2n\,\pi a^{2n-1} + (2n+2)\varrho a^{2n+1} + (2n+4)\sigma a^{2n+3} + (2n+6)\tau a^{2n+5}$$

und,

und, wenn da beſtändig angenommen wird,

$$\frac{ddu}{da^2} = 2\alpha + 4.3\beta aa + 6.5.\gamma a^4 \ldots$$
$$+ 2n.(2n-1).\pi a^{2n-2} + (2n+2)(2n+1)\varrho a^{2n}$$
$$+ (2n+4).(2n+3)\sigma a^{2n+2}$$
$$+ (2n+6).(2n+5).\tau a^{2n+4}\ldots$$

Nun iſt $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (281) und $ss = 2u - uu$ alſo $sds = (1-u)\,du$ und $ds = \frac{1-u}{s}.\,du$ aber $1 - ss = 1 - 2u + uu = (1-)^2$ alſo $da = \frac{(1-u)\,du}{\sqrt{(2u-uu)}\,(1-u)}$ oder

$$(2u-uu)\,da^2 = du^2;\ \frac{ddu}{da^2} = 1 - u =$$
$$1 - \alpha aa - \beta a^4 - \gamma a^6 \ldots - \pi a^{2n} - \varrho a^{2n+2} - \sigma a^{2n+4}\ldots$$

Die Glieder, welche einerley Exponenten haben, in beyden Reihen, die $\frac{ddu}{da^2}$ ausdrucken, gleich geſetzt, giebt ſich $a = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{\alpha}{4.3} = -\frac{1}{4.3.2}$; $\gamma = \frac{-\beta}{6.5} = +\frac{1}{6.5.4.3.2}\ldots\ldots$

$\varrho =$

$$\varrho = -\frac{\pi}{(2n+2).(2n+1)};$$

$$\sigma = \frac{-\varrho}{(2n+4).(2n+3)}\,\tau = \frac{-\sigma}{(2n+6).(2n+5)}$$

Die Zeichen der Coeſſicienten wechſeln ab, und der erſte α der in der Reihe $= \alpha aa \ldots$ zum Exponenten 2 gehört, iſt bejaht, alſo ſind alle bejaht, die zu Exponenten 2; 2. 3; 2. 5; ... 2. (2t+1) (numeris pariter imparibus) gehören, und alle verneint, die zu Exponenten 2. 2; 2. 4; 2. 6; 2. 8. . . 2. 2t; (numeris pariter paribus) gehören. Es ſey alſo $n = 2t$ ſo iſt π verneint, ϱ bejaht, σ verneint, τ bejaht, u. ſ. w.

Nun nehme man ferner an, π ſey ein Bruch, deſſen Zähler $= 1$; der Nenner ein Product aus allen ganzen Zahlen, vom Exponenten an, dem π zugehört, ſey; oder es ſey

$$\pi = \frac{-1}{2n.(2n-1).(2n-2)\ldots 2}$$ ſo iſt

$$\varrho = +\frac{1}{(2n+2).2n.(2n+1)\ldots 2}$$ und

$$\sigma = \frac{-1}{(2n+4).(2n+3).(2n+2)\ldots . 2}$$

u. ſ. w. oder alle folgende Coeſſicienten ſind auch ſolche Brüche, nur daß die Zeichen der Zähler abwechſeln. Das Angenommene aber iſt wahr, wenn

wenn $\pi = \beta$ und alſo die Folge durchgängig wahr. Alſo iſt, 2 t ſtatt n geſetzt

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{a^4}{4.3.2} + \frac{a^6}{6.5.4.3.2} \ldots$$

$$- \frac{a^{4t}}{4t.(4t-1)\ldots 2} + \frac{a^{4t+2}}{(4t+2).(4t+1).2}$$

$$- \frac{a^{4t+4}}{(4t+4).(4t+3)\ldots 2} \ldots$$

295. Wenn das erſte Glied $\frac{aa}{2} = A$ das zweyte B u. ſ. w. heiſſt; ſo iſt

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{Aaa}{3.4} - \frac{Baa}{5.6} - \frac{Caa}{7.8} - \frac{Daa}{9.10} \ldots$$

296. Aufg. Aus dem Bogen AM = a den Coſinus CP = x zu finden.

Aufl. $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (281) aber

$\sqrt{(1-ss)} = x$, alſo $\frac{-sds}{\sqrt{(1-ss)}} = dx$ und

$da = -\frac{dx}{s}$ oder $-sda = dx$. Nun

iſt aus (285) $dx = -ada + \frac{1}{3.2} a^3 da$

$$- \frac{1}{5.4.3.2} a^5 da + \frac{2}{6.7.5.4.3.2} a^7 da \ldots$$

$$- \frac{1}{(4t+1).\,4t.\,(4t-1)\,\ldots\,2} \cdot a^{4t+1}\,da$$

$$+ \frac{1}{(4t+3).\,(4t+2)\,\ldots\,2}\, a^{4t+3}\,da$$

$$- \frac{1}{(4t+5).\,(4t+4)\,\ldots\,2} \cdot a^{4t+5}\,da\,\ldots$$

Folglich $x =$ Conſt $+$ den Integralen der Glieder dieſer unendlichen Reihe. Nun verſchwinden dieſe Integrale alle, wenn $a = 0$ und da wird $x = 1$ alſo iſt Conſt $= 1$ und

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}aa + \frac{1}{4.3.2} \cdot a^4 - \frac{1}{6.5.4.3.2} a^6$$

$$+ \frac{1}{8.7.6.5.4.3.2} a^8 \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{(4t+2).\,(4t+1)\,\ldots\,2} \cdot a^{4t+2}$$

$$+ \frac{1}{(4t+4).\,(4t+3)\,\ldots\,2} \cdot a^{4t+4}$$

$$- \frac{1}{(4t+6).\,(4t+5)\,\ldots\,2} \cdot a^{4t+6}\ldots$$

297. Wenn man $-\tfrac{1}{2}aa = A$;

$+ \frac{1}{4.3.2} a^4 = B \ldots$ das Glied, deſſen Exponent $4t+2$ iſt, ζ; die folgenden beyden ϑ; η; nennt, ſo iſt $x = 1 - \tfrac{1}{2}aa - \frac{1}{4.3} Aaa$

— 1

$$-\frac{1}{6.5}.\ Baa - \frac{1}{8.7}.\ Caa \ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{(4t+4).(4t+3)}.\ \zeta aa$$

$$-\frac{1}{(4t+6).(4t+5)}.\ \vartheta aa \ldots\ldots$$

298. Anm. Umgekehrt den Bogen aus dem Coſi-nus zu finden, berechne man nach (281) den Bogen deſſen Sinus x iſt, und ziehe ihn vom Quadranten ab.

299. Aufg. Aus der Tangente AT = t 18 F. den Bogen AM zu finden.

Aufl. Weil $t = \frac{s}{\surd(1-ss)}$ (Trig. 4. Erkl. 3. Zuſ.) ſo iſt $dt = \frac{ds}{(1-ss).\surd(1-ss)}$ $= \frac{da}{1-ss}$ (281). Aber $1 : 1-ss = 1+tt : 1$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.) alſo $1+tt = \frac{1}{1-ss}$ und $dt = da.\ (1+tt)$ oder $\frac{dt}{1+tt} = da.$ oder das Differential des Bogens, iſt das Differential der Tangente, mit dem Quadrate der Secante dividirt. Wenn At eine nächſtgröſſere Tangente, und CO = CT iſt, ſo laſſe man ſich den Punct t dem Puncte T unendlich nähern; dadurch ver-

mindert ſich zugleich der Winkel TCt unendlich, weil CT : Tt = ſin CtA : ſin TCt, und CtA endlich bleibt; Folglich vermindern ſich die Bogen Mm, TO; als Maaſſe dieſer Winkel unendlich, und nähern ſich unendlich, geraden Linien die mit CMT; CmO, rechte Winkel machten. Ferner iſt CTA = CtA + TCt; wenn alſo TCt unendlich abnimmt, ſo nähert ſich CtA unendlich dem Winkel CTA. Die Gränzen alſo, welche man den Gröſſen, die ſich durch dieſe unendlichen Abnahmen verändern, ſetzen kann, ſind CtA = CTA; tOT = R alſo $\Delta CAT \backsim \Delta TOt$ und CA : CT = OT : Tt;

oder $Tt = \frac{OT.\ CT}{CA}$ aber CM : Mm

$= CT : OT$ alſo $Tt = \frac{CT^2.\ Mm}{CM^2}$ und Mm

$= \frac{CM^2.\ Tt}{CT^2}$. Nennt man alſo CM = 1;

Mm = da; Tt = dt, ſo iſt $da = \frac{dt}{1 + tt}$

wie vorhin. Folglich $da = dt.\ (1 - t^2 + t^4 - t^6 \ldots + t^{4n} - t^{4n+2} \ldots\ldots)$ und

$a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 \ldots + \frac{1.\ t^{4n+1}}{4n+1}$

$- \frac{t^{4n+3}}{4n+3} \ldots$ oder $a = t.\ (1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4$

$- \frac{1}{7}$

$$-\frac{1}{7}t^6 \ldots + \frac{1}{4n+1} \cdot t^{4n} - \frac{1}{4n+3} t^{4n+2}.$$

Euler Introd. in An. inf. L. I. c. 8. ſchreibt dieſe Reihe Leibnizen zu: Aber Maſeres in ſ. Sammlung: Scriptores logarithmici Vol. 3. p. 169. erinnert Jacob Gregory habe ſie im Anfange 1671 gefunden und Joh. Collins mitgetheilt. Maſeres hat dahin gehörige Aufſätze im II. B. ſeiner Sammlung 18 u. 19. S. eingerückt. In 1671 hatte Leibniz ſich noch nicht mit höherer Mathematik beſchäfftigt. Collins machte Entdeckungen die er erfahren hatte, gern weiter bekannt. Er mag nun aber die Reihe Leibnizen angezeigt haben oder nicht, ſo iſt doch Leibnizens dahin gehöriger Aufſatz erſt in den leipziger Actis Erud. 1682 erſchienen alſo die Reihe eigentlich Jacob Gregory zuzuſchreiben.

Halleys Reihe für die Rectification durch eine Tangente, in eine verwandelt wo die Coefficienten nach Potenzen der 80 abnehmen alſo ſchneller, giebt John Hellins Philoſ. Tranſ. 1794; P. II. art. 16.

300. I. Wenn $a = 45^{\circ}$ ſo iſt $t = 1$ alſo iſt der achte Theil des Umkreiſes $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$. woraus man alſo den ganzen Umkreis berechnen, und deſſelben Verhältniß zum Durchmeſſer finden könnte.

II. Dieſe Reihe giebt mir Anlaß zu analytiſchen Bemerkungen über unendliche Reihen.

 In

In (224) kömmt u deſto näher an 1 je gröſſer N iſt. Soll alſo N unendlich werden, ſo ſetze man u = 1, da kömmt N = $\frac{2}{0}$ alſo unendlich.

III. Daß dieſer unendlichen Ordinate der logarithmiſchen Linie, eine unendliche Abſciſſe zugehört, der unendlichen Zahl ein unendlicher Logarithme, iſt offenbahr.

IV. Für Subtangente a = 1 wird dieſer Logarithme (223) $\log \frac{2}{0} = 2.\ (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots)$ Alſo, da des Unendlichen Hälfte ohne Zweifel auch unendlich iſt, iſt

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots = \infty$$

welches auch Schriftſteller von unendlichen Reihen ſchon längſt, aus andern Gründen gezeigt haben.

V. Die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots$ convergirt alſo nicht; das iſt: Man darf nicht annehmen daß die Summe einiger ihrer erſten Glieder, beynahe die Summe aller ſey, und daß man ſich der Summe aller deſto mehr nähere, je mehr man von den erſten Gliedern zuſammenrechnet.

Denn die Summe aller iſt unendlich, und ſoviel man auch von den erſten Gliedern zuſammen rechnet bekömmt man immer was Endliches.

VI. Es giebt alſo Reihen von Brüchen, wo jedes folgende Glied kleiner iſt als das vorhergehende, und wo doch die Summe dieſer immer kleinern und kleinern folgenden Glieder, unendlich

gröſſer

gröſſer werden kann als die Summe der erſten Gröſſern.

Wie das ſtatt findet, kann man ſich ſo vorſtellen: Weil die Reihe ohne Ende fortgeht, ſo läſſt ſich allemahl ſo eine groſſe Menge als man will von den kleinern folgenden Gliedern denken, und dieſe können zuſammen mehr austragen, als die Summe der gröſſern, aber wenigern vorhergehenden.

VII. Daraus alſo daß in einer Reihe die folgenden Glieder immer kleiner und kleiner werden, flieſſt nicht, daß die Reihe convergirt, ſondern man muß das nach der Formel woraus die Reihe iſt gefunden worden beurtheilen.

Z. E. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots.$

Dieſe Reihe convergirt allemahl wenn x ein eigentlicher Bruch iſt, denn alle ihre Glieder zuſammen machen nicht mehr als die endliche Gröſſe $\frac{1}{1-x}$.

VIII. Bedeutet $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe, ſo iſt (I)

$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \ldots\ldots$

Aber (VI) $\infty = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \ldots\ldots$

Alſo

$$\infty + \tfrac{1}{4}\pi = 2.(1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} \ldots$$
$$\infty - \tfrac{1}{4}\pi = 2.(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{15} \ldots$$

VIIII. Beyde dieſe Reihen ſind alſo unendlich; oder es iſt

$\tfrac{1}{2}\infty + \tfrac{1}{8}\pi = 1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} \ldots\ldots$

Unendlich $= P$

$\tfrac{1}{2}\infty - \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{15} \ldots\ldots$

Unendlich $= Q.$

$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} \ldots$

$= P - Q$

X. Nun iſt $P - Q = \tfrac{1}{4}\pi$ (VIII); Alſo iſt $\tfrac{1}{4}\pi$ der endliche Unterſchied, der beyden unendlichen Gröſſen.

XI. Es iſt ferner $\frac{P}{Q} - 1 = \frac{\pi}{4.Q}$ alſo $\frac{P}{Q} = 1 + \frac{\pi}{4Q}$; der zweyte Theil rechter Hand, iſt Quotient einer endlichen Gröſſe durch eine unendliche dividirt, alſo läſſt ſich $\frac{P}{Q}$ von 1 nicht unterſcheiden. Jede dieſer Reihen iſt eine unendliche Gröſſe, ſie werden gleich geſchätzt weil ihr endlicher Unterſchied in Vergleichung mit jeder verſchwindet.

Sie werden aber nur gleich geſchätzt, wenn man ihre geometriſche Verhältniß betrachtet für die arithmetiſche iſt $P - Q = \tfrac{1}{4}\pi$

XII.

XII. Jacob Bernoulli hat zu Baſel ſeit 1689, einige Diſputationen von unendlichen Reihen gehalten, ſie finden ſich unter der Geſtalt auch mit den beygefügten Theſen, in der Sammlung ſeiner Werke. Mit Weglaſſung der Diſputationstitel und Theſen ſind ſie als ein Tractatus de ſeriebus infinitis earumque ſumma finita ſeiner Arti Coniectandi beygefügt die als opus poſthumum Baſel 1713 herausgekommen iſt. Es kommen da auch Reihen vor deren Summe unendlich iſt. Die erſten Lehren von unendlichen Reihen die Jacob damahls vorgetragen hat, ſind ſeitdem ſehr vermehrt worden.

301. Wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange (S. 44. S.) ſo iſt 2π ein Kreis, deſſen Durchmeſſer $= 2$ oder der Halbmeſſer $= 1$ iſt, weil $1 : \pi = 2$: Umfange dieſes Kreiſes. Alſo iſt $\frac{2\pi}{8}$ oder $\frac{1}{4}\pi = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ oder $\pi = 4.(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ Wenn nun ein Kreis, 1 zum Durchmeſſer, π zum Umfange hat, ſo iſt ſeine Fläche $= \frac{1}{4}.\pi = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ So hat Leibniz dieſe Reihe für die Quadratur des Kreiſes bekannt gemacht. Act. Er. Lipſ. Febr. 1682. Aber dieſe Reihe nähert ſich zu langſam, als daß ſie die Peripherie bald auf viel Decimalbrüche genau zu finden diente. Wenn man nähmlich den Umkreis bis auf n Decimalſtellen, oder bis auf die Ordnung $-$ n richtig will berechnet

haben, ſo muß man bis auf die Glieder der Reihe kommen, die keine Decimalzifern von dieſer Ordnung enthalten. Aber dieſer Reihe fünftes Glied enthält noch Zehntheilchen, oder eine Zifer von der Ordnung − 1. Alſo geben die erſten fünf Glieder den Umkreis nicht bis auf Zehntheile. Nach Eulers Erinnerung Comm. Ac. Petrop. T. VIIII. p. 226. müſſte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen den Umfang auf 100 Stellen zu haben, welches eine Ewigkeit erfodern würde. Leibniz hat ſie auch a. a. O. nicht vorgeſchlagen den Umfang wirklich daraus zu berechnen, ſondern nur zu zeigen, daß ſich die Quadratur des Kreiſes durch eine Reihe giebt, deren Geſetz ſo leicht zu überſehen iſt.

301. Aufg. Aus dem Bogen die Tangente zu finden.

Aufl. Weil $da + t^2\,da = dt$ (299) ſo iſt das erſte Glied von $t = a$; Man kann nähmlich nach (Alg 694) ſetzen

$$dt = da + a^2\,da + \tfrac{2}{3}a^4\,da$$

$$-tt\,da = -a^2\,da - \frac{2a^4}{3}\,da$$

$$t = a + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{2}{15}a^5$$

So würde man die folgenden Glieder von t auch finden. Leichter aber geht es ſo an: Wenn in Alg. 690. und hier 299.

x; y;

$$x;\ y;\ \lambda;\ \delta;\ \frac{1}{\lambda};\ (1+\delta):\lambda;$$

hier a; t; 1; 1; 1; 2;
ſo iſt

$$t = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 + \delta a^9 + \varepsilon a^{11} \ldots$$

$$tt = a^2 + 2\alpha a^4 + \left.\begin{matrix}\alpha\alpha \\ +2\beta\end{matrix}\right) a^6 + \left.\begin{matrix}2\alpha\beta \\ +2\gamma\end{matrix}\right) a^8 + \left.\begin{matrix}\beta\beta \\ +2\alpha\gamma \\ +2\delta\end{matrix}\right\} a^{10}$$

$$\frac{dt}{da} - 1 = 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 + 9\delta a^8 + 11\varepsilon a^{10} \ldots$$

Alſo die Coefficienten, die zu einerley Potenzen von a gehören, gleich geſetzt

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\ \beta = \frac{2\alpha}{5} = \frac{2}{5.3};\ \gamma = \frac{2\beta + \alpha\alpha}{7}$$

$$= \tfrac{1}{3}.\left(\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{3}\right).\tfrac{1}{7} = \frac{17}{9.7.5} = \tfrac{17}{315};$$

$$\delta = \frac{2.(\alpha.\beta + \gamma)}{9} = 2.\left(\frac{2}{5.3.3} + \frac{17}{9.7.5}\right).\tfrac{1}{9}$$

$$= 2.\left(2 + \tfrac{17}{7}\right).\frac{1}{9.5.9} = \frac{2.31}{9.7.5.9} = \tfrac{62}{2835};$$

$$\varepsilon = 2.\left(\frac{(\delta + \alpha.\gamma) + \beta.\beta}{11}\right) = \left(2.\left(\frac{2.31}{9.9.7.5}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{17}{3.9.7.5}\right) + \frac{4}{5.5.3.3}\right).\tfrac{1}{11} = \left(\frac{1}{9.7.5.3}\right.$$

$$\left(\frac{4.31}{3} + 2.17\right) + \frac{4}{25.9}\right) \cdot \frac{1}{11}$$

$$= \left(\frac{1}{9.7.5.3} \cdot \frac{113.2}{3} + \frac{4}{5.5.9}\right) \cdot \frac{1}{11}$$

$$= \frac{1}{9.5} \cdot \left(\frac{1}{7.3} \cdot \frac{113.2}{3} + \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{11}$$

$$= \frac{1}{9.5} \cdot \frac{691.2}{7.9.5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{691.2}{11.9.9.7.5.5}$$

$= \frac{1382}{155925}$ Alſo iſt

$$t = a + \tfrac{1}{3} a^3 + \tfrac{2}{15} a^5 + \tfrac{17}{315} a^7 + \tfrac{62}{2835} a^9 + \tfrac{1382}{155925} a^{11} \ldots\ldots$$

Ein allgemeines Geſetz dieſer Reihe zu finden, braucht man nur einen unbeſtimmten Coefficienten der Reihe tt anzugeben; welches ſich aus (59) thun lieſſe: Aber dieſer Coefficient wird ſo zuſammengeſetzt, daß es keinen practiſchen Nutzen haben würde, das Geſetz der Reihe durch ihn anzugeben, wie ein ſolcher Nutzen ſich bey den Geſetzen der vorigen Reihen findet, daß man nähmlich jedes folgende Glied bequem aus dem vorhergehenden berechnen kann. Daher iſt es der Mühe nicht werth dergleichen allgemeines Geſetz hier zu ſuchen; zumahl, da man a ordentlich ſo klein nimmt, daß die berechneten Glieder der Reihe nicht alle nöthig ſind, t in der verlangten Schärfe zu finden.

302. Aufg. Aus dem Bogen die Cotangente τ zu finden.

Aufl.

Aufl. $\tau = \frac{1}{t}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ.) alſo da $t = a.(1 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}a^4 + \frac{17}{315}a^6 + \frac{62}{2835}a^8 \ldots)$ (301) ſo iſt $\tau = a^{-1}$ in die unendliche Reihe auf die Potenz -1 erhoben multiplicirt. Um alſo dieſe unendliche Reihe auf die Potenz -1 zu erheben, ſetze man in (56) $m = 1$) $z = aa$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{2}{15}$; $\gamma = \frac{17}{1315}$; $\delta = \frac{6}{2835}$. Alſo iſt aus (65; V) $A = -\frac{1}{3}$; $B = (-2. -\frac{1}{3}. \frac{1}{3} - 2. \frac{2}{15}). \frac{1}{2} = +\frac{1}{9} - \frac{2}{15} = \frac{1}{3}.(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}) = -\frac{1}{45}$; $C = \left(-3. -\frac{1}{45}. \frac{1}{7} - 3. -\frac{1}{3}. \frac{2}{15} - \frac{3.17}{315}\right).$

$$\frac{1}{3} = \left(+\frac{1}{45} + \frac{2}{15} - \frac{17}{15.7}\right). \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{15}. \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{17}{7}\right). \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{45}. \frac{7 + 42 - 51}{21} = \frac{-2}{45.21} = \frac{-2}{945}$$

So findet man

$$\tau = \frac{1}{a} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 - \frac{2}{945}a^4 - \frac{1}{4725}a^5 \ldots$$

303. Aufg. Aus dem Bogen die Secante S zu finden.

Aufl. $S = x^{-1}$ (296. und Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.) $= \left(1 - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4.3.2}a^4 \ldots\right)^{-1}$ (296).

(296). Alſo iſt in (56. V.) $z = aa$, $m = -1$;

$\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = +\frac{1}{4.3.2} \ldots$ und

$A = +\frac{1}{2}$; $B = \left(-2. + \frac{1}{2}. - \frac{1}{2} - \frac{1}{4.3}\right). \frac{1}{2}$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{6}\right).\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{+5}{24}.$

So findet man

$$S = 1 + \frac{1}{2}aa + \frac{5a^4}{24} + \frac{61}{720}a^6 + \frac{277}{8064}a^8 \ldots$$

304. Aufg. Aus dem Bogen die Coſecante Σ zu finden.

Aufl. $\Sigma = 1.s^{-1}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ. und hier 281.) $= a^{-1}\left(1 - \frac{1}{3.2}a^2 + \frac{1}{5.4.3.2}a^4 \ldots\right)^{-1}$ (285). Alſo in (56. V) $\alpha = -\frac{1}{6}$; $\beta = +\frac{1}{120}$; $z = aa$; $m = -1$; und $A = +\frac{1}{6}$; $B = \left(-2.\frac{1}{6}. - \frac{1}{6} - \frac{1}{60}\right).\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.\left(\frac{2}{6} - \frac{1}{10}\right).\frac{1}{2} = \frac{7}{360}$ ſo findet man

$$\Sigma = \frac{1}{a} + \frac{a}{6} + \frac{7a^3}{360} + \frac{31a^6}{15120} \ldots$$

305. Anm. Die zehen Sätze 281; 285; 287; 293; 296; 299; 301; 302; 303; 304; ſind hier in der Ordnung vorgetragen, wie ſie in Hauſens Calculo Extenſorum, El. Ar. & Geom. p. 180. ſtehen; die Analyſis aber iſt bey vielen anders. Die umgekehrten

Sätze

Sätze von denen, welche unmittelbar durch die Integration gefunden werden, zu finden, beruft ſich Hauſen auf die Umkehrung der Reihen; wie bey 285; 293; 301; der ich mich aber aus der 285 angezeigten Urſache nicht habe bedienen wollen. Dieſe Reihen dienen die trigonometriſchen Linien zu berechnen, wenn man die Quadratur des Kreiſes, die gleich ſoll gewieſen werden, annimmt, und ihnen andere Lehrſätze, als von der Zuſammenſetzung der Winkel (Trig. 19. S.) und derſelben Vervielfältigung und Theilung (Alg. 175.) beyfügt.

306. Aufg. Die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe zu finden.

Aufl. Von einem Bogen, deſſen Verhältniß in Graden zu 180 Gr. bekannt iſt, berechne man die Tangente und brauche ſolche ſtatt t in der Reihe (299) daraus den Bogen zu berechnen, aus welchem man alsdenn den halben Umkreis für den Halbmeſſer 1, und folglich den ganzen für den Durchmeſſer = 1 berechnet, oder die Zahl P G. 44. S. findet. Man muß aber den Bogen ſo nehmen, daß t ein kleiner Bruch des Halbmeſſers wird, damit ſich die Reihe bald nähert. Es ſey der Bogen von 30 Gr. ſo iſt $s = \frac{1}{2}$; $\surd(1 - ss) = \frac{\surd 3}{2}$ alſo (299) $t = \frac{1}{\surd 3} = \surd \frac{1}{3}$. Folglich

$$a = \surd \tfrac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3.3} - \frac{1}{7.3.3.3} + \frac{1}{9.3.3.3.3} - \frac{1}{11.3.3.3.3.3..}\right)$$

Alſo

Alſo 6a oder der halbe Umfang =

$$\sqrt{12}.\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\frac{1}{11.3^5}\ldots\right)$$

Dieſes giebt folgendes Verfahren: Man dividire $\sqrt{12}$ durch 3; und 9; und 27; u. ſ. w. mit einem Worte durch alle Potenzen der 3. Dieſes geſchieht leicht, wenn man erſtlich $\sqrt{12}$ durch 3; den Quotienten wieder durch 3, dieſen Quotienten wieder durch 3; u. ſ. w. jeden Quotienten, der durch die vorige Diviſion durch 3 entſtanden iſt, wieder durch 3 dividirt, und giebt die Zahlen, welche in folgenden Columnen unter A ſtehen: Nähmlich bey 1, 3, 5; 7; ... befinden ſich die Quotienten $\frac{\sqrt{12}}{1}$; $\frac{\sqrt{12}}{3}$; $\frac{\sqrt{12}}{3.3}$; $\frac{\sqrt{12}}{3.3.3}$ u. ſ. w. was neben jeder ungeraden Zahl ſtehet iſt $\frac{1}{3}$ deſſen, was neben der nächſtvorhergehenden ſtehet, ſo ſtehet 331 neben 43 und iſt $\frac{1}{3}$ von 993 das neben 41 ſteht. Weil nun 47 die 24 ungerade Zahl iſt, ſo iſt 0, 000 000 000 037 = $\sqrt{12} : 3^{23}$, die ungeraden Zahlen aber haben bey dieſen Quotienten folgende Bedeutungen: der Columne A erſtes Glied 3, 464.... mit 1 dividirt, alſo ungeändert giebt der Columne B erſtes Glied; der Columne A zweytes Glied 1, 15... mit 3 dividirt giebt der Columne

lumne C erſtes Glied 0,384900179460; und ſo geben, der Columne A, 3; 5; 7; 9; u. ſ. w. alle ungeraden Glieder, mit den neben ihnen ſtehenden ungeraden Zahlen 5; 9; 13; 17; ... dividirt, das 2; 3; 4; 5; u. ſ. Glieder der Columne B; aber der Columne A; 4; 6; 8; u. ſ. w. alle geraden Glieder mit den neben ihnen ſtehenden ungeraden Zahlen 7; 11; 15; ... dividirt, das 2; 3; 4; u. ſ. Glieder der Columne C. Aber die Glieder der Columne B; ſind die ungeraden oder bejahten Glieder der Reihe $\sqrt{12}.\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^2} \ldots\right)$ wenn nähmlich $\sqrt{12}$ überall wirklich multiplicirt wird, daß man $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{3.3} + \frac{\sqrt{12}}{5.3^2} \ldots$ bekömmt, und die Glieder der Columne C ſind der nur genannten Reihe gerade, oder verneinte Glieder. Wenn man alſo die Summe der Columne C von der Summe der Columne B abzieht, ſo hat man von der Reihe, welche den halben Umkreis ausdrückt, ſoviel Glieder zuſammengerechnet, als B und C zuſammen enthalten, und alſo den halben Umfang für den Halbmeſſer 1; d. i. den ganzen für den Durchmeſſer = 1; d. i. P auf ſoviel Decimalfiguren gefunden, ſoviel Decimalfiguren die Glieder der Reihe, die man zuſammengerechnet hat, geben. Es kömmt nähmlich darauf an, daß

A

A

1	3. 464101615138	(
3	1. 154700538379	(
5	384900179560	(
7	123800059830	
9	42766686607	(
11	14255562202	
13	4751854067	(
15	1583951356	
17	527983785	(
19	175994595	
21	58664865	(
23	19555955	
25	6518318	(
27	2172773	
29	724258	(
31	241419	
33	80473	(
35	26824	
37	8641	(
39	2980	
41	993	(
43	331	
45	110	(
47	37	

B	C
3.464101615138	$=\sqrt{12}$
	(0.384900179460
76980035892	
	(18328579974
4751854072	
	(1295960200
365527236	
	(105596757
31057870	
	(9262873
2793565	
	(850215
260733	
	(80473
24974	
	(7788
2438	
	(766
242	
	(76
24	
	(8
2	
	(1
+ 3.546233172181	0.404640517591
− 0.404640518591	
+ 3.141592653590.	

das letzte Glied der Reihe in der Decimalſtelle keine Zifer mehr hat, bis auf welche man die Zahl P haben will. So hat eigentlich das letzte Glied der Columne C keine Zifer mehr in der 12 Decimalſtelle, weil in A; 37 von der Ordnung — 12 mit 47 dividirt keine 1 dieſer Ordnung giebt. Da indeſſen 370 von der Ordnung — 13 mit 47 dividirt, 7 und beynahe 8 von dieſer Ordnung gäbe, welches beynahe 1 von der Ordnung — 12 austrägt, ſo iſt das letzte Glied von C, von dieſer Ordnung geſetzt worden. Aus einem ähnlichen Grunde iſt der Columne A letztes Glied 37 angenommen worden, welches durch die Diviſion mit 3 aus dem nächſtvorhergehenden auch nicht ſo herauskäme. So findet man P auf 12 Decimalſtellen, weil man $\sqrt{12}$ auf ſoviel Stellen geſucht hat, und der Reihe, die P ausdruckt, letztes Glied, oder hier der Columne C unterſtes Glied; nichts mehr in der 12 Decimalſtelle hat. Es erhellt aber aus dem nur erklärten Verfahren, daß die letzten Zifern von P unrichtig ſeyn können, weil oft die letzten Glieder von A; B; C; unrichtig angenommen werden. Will man alſo P auf viel mehr Decimalſtellen haben, ſo darf man nur $\sqrt{12}$ auf mehr Decimalſtellen ausziehen, wobey der Vortheil Alg. 321. XXX. zu gebrauchen iſt; auch dienen kann, daß $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

307. Wenn man die Reihe 299 brauchen will, kann man nicht leicht einen andern Bogen als den von 30 Gr. nehmen, weil kein anderer Bogen, der etliche mahl genommen den Halbkreis ausmacht, eine Tangente hat, die kleiner als der Halbmeſſer iſt, und ſich auf eine ſo einfache Art beſtimmen läſſt. Wollte man mehr zuſammengeſetzte Tangenten nehmen, die denn alle, zum Halbmeſſer Irrationalverhältniſſe haben, ſo würde die Rechnung mit ihnen gar zu beſchwerlich werden.

308. I. Vermittelſt der Reihe (299) iſt P auf 74 Decimalfiguren gefunden worden, wobey die ganze Schwürigkeit des Verfahrens (306) darauf ankömmt, $\sqrt{12}$ in ſehr viel Decimalfiguren zu haben. Euler de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, Comm. Petrop. T. VIIII. p. 227. giebt eine Methode an, dieſe verdrießliche Ausziehung der Wurzeln zu erſparen, die ſich aber auf Erfindungen von ihm gründet, welche ich hier nicht habe vortragen können. In eben dieſer Schrift 2. §. giebt er für den Durchmeſſer = 1. den Umkreis bis auf 127 Decimalſtellen folgendergeſtalt an:

3, 141592 653989 793238 462643 383279
502884 197169 399375 105820 974944
592307 816406 286208 998628 034825
342117 067982 148086 513272 306647
093844 6 +

die erſten 100 Zifern hat Machin, alle aber Lagny durch einen noch nicht bekannten Kunſtgriff erfunden.

Eine Reihe, die bequemer als die gebrauchte geweſen wäre, findet ſich ſo: Es ſey $\frac{1}{4}$ P oder 45° = a + b alſo (Trig. 19. S. 3. Z.) $1 = \frac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a.\ \text{tang } b}$

und $\text{tang } b = \frac{1 - \text{tang } a}{\text{tang } a + 1}$ alſo = $\frac{1}{3}$ wenn

tang a = $\frac{1}{2}$; folglich (299)

$$a = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} \ldots\ldots$$

$$b = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \ldots\ldots$$

welche beyde Reihen zuſammen addirt $a + b = \frac{1}{4}p$ geben; ohne daß man zu wiſſen braucht, wie viel Grade a oder b einzeln halten. Eul. Introd. in An. inf. L. I. §. 142.

II. In meiner geometriſchen Abhandlungen II. Samml. (1791) 20. Abh. gebe ich Nachrichten von Bemühungen die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe zu berechnen, und denen welche ſolche Arbeiten unternommen haben als Ludolph von Cöln, Lagny. . .

III. In der fünften Ausg. meiner Anfgr. d. Ar. u. Geom. (1792) in der Anm. am Ende des 43 Satzes finden ſich aus Hr. v. Zach Nachrichten noch mehr Zifern für den Umkreis, bis mit auf die Ordnung — 136. Auch iſt da erinnert, daß unter den vorhin gelieferten lagnyſchen Zifern die Abtheilung 513272 heiſſen muß 513282. Die 7 iſt nur ein Schreibfehler, kein Rechnungsfehler weil die nach ihr folgenden Zifern richtig ſind.

IV. Im III. B. der Scriptores logarithmici, ſammlet Maſeres (234; XVIII) Berechnungen mehrer Mathematiker. Vega Theſaurus (233; VIII.) im I. B. 308; giebt den Umkreis auf 140 Decimalſtellen, und deſſelben Logarithmen, briggiſchen und natürlichen, jeden auf 23 Decimalſtellen. Auch ſo den Umkreis in den logarithmiſchtrigonometriſchen Tafeln 1797.

V. Eine Reihe für den Umfang des Kreiſes.

Man ſetze $\frac{1}{5}$ ſey die Tangente eines Bogens $= \alpha$ (Er iſt etwas über 11° 18′).

Des doppelten Bogens Tangente iſt $= \dfrac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}}$

$= \frac{5}{12}$; des doppelten hievon oder des vierfachen (1) Tangen-

Tangente $= \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{5 \cdot 24}{144 - 25} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}$.

Dieſer vierfache Bogen iſt alſo ein wenig gröſſer als 45°.

Man ſetze ihn $= 4 . \alpha$; ſo iſt tang $(4\alpha - 45^\circ)$
$= \frac{\text{tang } 4\alpha - 1}{\text{tang } 4\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{119}}{2 + \frac{1}{119}} = \frac{1}{238 + 1} = \frac{1}{239} =$ tang β.

So iſt $4\alpha - 45^\circ =$ Bog tang $\frac{1}{239} = \beta$; $4 . \alpha -$ Bog tang $\frac{1}{239} = 45^\circ$.

Wenn man alſo den Unterſchied dieſer beyden Bogen berechnet, hat man 45° und das viermahl genommen, den Halbkreis für Halbmeſſer = 1 oder den ganzen für Durchmeſſer = 1.

Nun iſt (299) Bog tang $t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$
$- \frac{t^7}{7} \ldots$

Alſo

$$4\alpha = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \ldots \right.$$

Folglich

$$4 \cdot 4 \cdot \alpha = \frac{16}{5} - \frac{16}{3 \cdot 5^3} + \frac{16}{5 \cdot 5^5} \ldots$$

$$- 4 \cdot \text{Bog tang } \frac{1}{239} = - \frac{4}{239} + \frac{4}{3 \cdot 239^3} - \frac{4}{5 \cdot 239^5} \ldots$$

Das iſt: der halbe Umfang $= \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \cdot$
$\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{16}{4^5} - \frac{4}{239^5} \right) \ldots$

Die Reihe auf dieſe Art finden lehrt Petrus Ferronius, de calculo integralium exercitatio mathematica

tiça Flor. 1792. notae in Antelogium p. XXVIII. aus Phil. Tranſ, P. II. Vol. 66. für 1776. Sie gehört Machin.

In Sherwins Tables fünfte Ausgabe 1771; III. Seite ſteht eine Machin zugeſchriebne Reihe aus Jones Synopſis palmarior. math. Das ſoll dieſe ſeyn, ſie iſt aber ſehr falſch angegeben.

VI. Klügel, arithmetiſche Zuſammenſetzungen des Kreiſes aus deſſelben Elementen, Hindenburg Archiv der Mathematik V. Heft 60 S. Derſelbe, Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges des Kreiſes. Archiv VII. Heft, 308. S.

309. Wenn der Halbmeſſer = 1; ſo iſt die Zahl P der halbe Umkreis und giebt alſo, mit 180 dividirt

1 Gr. = 0,01745 3292519943295769236904

Dieſes mit 60 dividirt giebt

1 Min. = 0,000290 888208 665721 596153

Dieſes mit 60 dividirt giebt

1 Sec. = 0, 000004 848136811

1 Tert = 0, 000 000 080 802 2801

Auch iſt der Quotient, der herauskömmt, wenn man den Halbmeſſer mit dem Bogen von einer Minute dividirt

3437, 746 . . .

310. Aufg. Für einen Bogen, der kleiner als der Halbmeſſer iſt, den Sinus zu finden.

Aufl. Dieſes geſchieht aus 309; vermittelſt der Reihe 286.

Ex. Man ſucht den Sinus von 44 Gr. 37 M. ſo iſt aus 309; a = 0,77870773459813671 2904 alſo in 286

B = 0. 078699543785532300962
D = 344501313664126 85
F = 1599424168698
H = 17952201
K = 71

— 0. 07873395516340834617

A = 0.77870773459813671 2904
C 238611403875956 9243
E = 290139836962012
G = 6217102574
I = 40022

+ 0. 781094138782950386756
— 0. 07873395516340834617

0.70236014326660955 2139 = Sin 44°. 37′

Berechnung der trigonometriſchen Linien.

311. Anm. Wiewohl dieſe Berechnung eigentlich nicht hieher gehört, ſo wird es doch nicht undienlich ſeyn hier Anleitung dazu zu geben, und dadurch wenigſtens die Möglichkeit zu zeigen, wie ſich die Foderung Trig. 2. S. als eine Aufgabe auflöſen läſſt. Wie man eine Menge Sinuſſe und folglich Coſinuſſe, Tangenten u. ſ. w. Trig. 4. Erkl. 5. Z. aus den Bogen unmittelbar finden kann, erhellt aus 310. Den Bogen

aber, deſſen Länge dem Halbmeſſer gleich iſt, findet man ſo: Er ſey n Grade, ſo iſt u. 0,01745329. . $= 1$ (309) alſo $n = \frac{1}{00174\ldots}$ welches 57 Gr. giebt. Der Reſt von dieſer Diviſion mit 60 multiplicirt, und durch den Diviſor dividirt, giebt Minuten u. ſ. w. Man findet dieſen Bogen = 57 Gr. 17 M. 44 Sec. 48 Tert. 22 Quart. 29 Quint. 21 Sext. Eul. introd. in analyſ. inf. L. I. §. 530. Sein Sinus iſt aus 282. 0,841470984 0514. Für gröſſere Bogen findet man die Sinus und Coſinus aus dieſen Linien für die kleinern, durch die Addition der Winkel Trig. 19. S. und derſelben Multiplication (Alg. 175.) Man muß aber bemerken, daß bey ſolchen Arbeiten bie letzten Zifern der Sinuſſe, die man ſo vermittelſt anderer findet, nicht ſoweit richtig ſind als die letzten Zifern dererjenigen, vermittelſt derer man ſie findet, (Ar. III. 13.) und daher muß man die Sinus, vermittelſt derer man viel andere finden will, auf vielmehr Decimalſtellen ſuchen, als man ſie für ſich brauchte. Aber die Vielecke (Alg. 162.) geben auch viel Sinus unmittelbar, deren man ſich nachgehends bedienen kann andere zu finden. Folgendes iſt hiebey auch brauchbar.

312. Aus Trig. 19. S. iſt $\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha . \cos\delta + \sin\delta . \cos\alpha$. Nun ſuche man aus dem bekannten Sinus und Coſinus eines Bogens, den Sinus eines Bogens der jenen um etwas übertrifft das noch nicht völlig eine Minute beträgt. Alſo ſind Sinus und Coſinus von α gegeben; auch der Bogen δ iſt gegeben; Nun iſt wegen der Vorausſetzung, $\delta < 0,0003$ (309) alſo $\delta^3 < 27^{-12}$. Dieſer Würfel des Bogens, giebt alſo erſt Zifern in der eilften Decimalſtelle. Er kömmt aber in dem zweyten Gliede der Reihe für den Sinus (286) und im dritten der Reihe

für

für den Coſinus (297) vor. Verlangt man alſo dieſes kleinen Bogens Sinus und Coſinus nicht ſo weit, ſondern nur etwa wie gewöhnlich bis auf die ſiebente Decimalſtelle, ſo ſetzt man ohne merklichen Fehler, ſtatt des Sinus nur das erſte Glied der Reihe, und ſtatt des Coſinus nur die erſten beyden. Alſo wird

$$\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha . (1 - \tfrac{1}{2}\delta^2) + \delta . \cos\alpha$$

welches dienen könnte, aus den Sinibus die für alle ganze Minuten in den Tafeln befindlich ſind die Sinus für Bogen zu finden, die zwiſchen Mengen ganzer Minuten fallen.

Z. E. für den Bogen $30^\circ\, 0'\, 30''$ wäre $\alpha = 30^\circ$ und $\delta = 30'' = 0{,}00014504\ldots$

313. Es iſt alſo $\sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha = \delta . (\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\delta . \sin\alpha)$. Hier iſt des zweyten Factors letztes Glied in Vergleichung mit dem erſten klein, wofern nicht $\cos\alpha$ ſehr klein in Vergleichung mit $\sin\alpha$ iſt, das iſt wofern nicht α einem rechten Winkel ſehr nahe iſt. Wenn alſo α einem rechten Winkel nicht ſehr nahe iſt, kann man ohne groſſen Irrthum den Unterſchied der Sinuſſe $= \delta \cos\alpha$ ſetzen: Und folglich unter eben den Umſtänden, $\sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha = \varepsilon . \cos\alpha$. Folglich iſt alsdenn

$$\sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha : \sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha = \varepsilon : \delta$$

Dieſe Proportion nimmt man insgemein ſowohl für die Sinus als für ihre Logarithmen an (Trig. 12 S.) die Secunden eines geſuchten

Winkels zu finden. Im gegenwärtigen liegt der Grund aus welchem man beurtheilen kann wie weit ſolches verſtattet iſt. Daß es bey Winkeln die dem rechten ſehr nahe kommen immer unrichtiger wird, beruhet darauf, weil bey ſolchen Winkeln die Sinus ſehr langſam wachſen, Gegentheils bey kleinen Winkeln, wachſen ſie beynahe in der Verhältniß der Winkel, wie ſelbſt aus dem erhellt daß für einen kleinen δ, beynahe $\sin\delta = \delta$ iſt.

314. Aufg. Alle Sinus und Coſinus, die zu kleinern Bogen als 45 Gr. gehören, zu finden.

Aufl. Ein Bogen, der kleiner als 45 Gr. iſt, läſſt ſich durch $\frac{m}{n} \cdot 45$ Gr. ausdrucken, daß $\frac{m}{n}$ ein eigentlicher Bruch iſt. Wenn nun für den Halbmeſſer $= 1$; die Länge des Bogens von 90 Gr. $= \frac{1}{2}P$ iſt, (309) ſo kann man in 285; 296; $a = . \frac{1}{2}P$ ſetzen. Dieſes giebt in 285 den Sinus $= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}P + \frac{m^3}{n^3} \cdot (\frac{1}{2}P)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{m^5}{n^5} \cdot (\frac{1}{2}P)^5 \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \ldots$ und in 296 den Coſinus

$$1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot (\frac{1}{2}P)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot 1\,(\frac{1}{2}P)^4 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \ldots$$

In beyden Reihen kann $\frac{m}{n}$ bis an $\frac{1}{2}$ wachſen, und

und alſo ſind die Potenzen davon lauter eigentliche Brüche, die für höhere Grade immer abnehmen. Was aber den Factoren jedes Gliedes betrifft, der in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ſo verhält es ſich damit folgendergeſtalt: Es iſt
$\frac{1}{2}P = 1,5707963267948966 19 \ldots$
alſo $< 1,6$; alſo $(\frac{1}{2}P)^2 < 2,56$ und $(\frac{1}{2}P)^3 < 4,096$ Folglich iſt in der Reihe für den Sinus, $(\frac{1}{2}P)^3 . \frac{1}{6}$ kleiner als 1. Man nenne in jedem Gliede, das nicht das erſte iſt, den Factor, darein die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wie $(\frac{1}{2}P)^3 . \frac{1}{6}$ im zweyten iſt, $= Q$; und den ähnlichen Factor im nächſten Gliede wie $(\frac{1}{2}P)^5 . \frac{1}{24}$ iſt, $= R$; ſo iſt allemahl R ein Product aus Q in $(\frac{1}{2}P)^2$ durch ein Product aus zwo Zahlen dividirt, davon die kleinſte im dritten Gliede 4; im vierten 6; im fünften 8 u. ſ. w. iſt, (285) alſo iſt der Quotient, den $(\frac{1}{2}P)^2$ mit dieſer beyden Zahlen Producte dividirt, giebt allemahl ein eigentlicher Bruch, und allemahl in jedem folgenden Gliede kleiner als in dem vorhergehenden, folglich iſt das Product aus Q in dieſen Quotienten allemahl kleiner als Q: oder R kleiner als Q. Nun iſt für das zweyte Glied, Q ein eigentlicher Bruch, folglich R im dritten Gliede ein kleinerer eigentlicher Bruch. Bedeutet alſo nun Q den Factor, der im dritten Gliede in die Potenz von

von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ſo iſt ſolcher ein eigentlicher Bruch, und R iſt nun der Factor, der im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt iſt, und ein kleinerer eigentlicher Bruch als Q. So erhellt, daß die Zahlen, die in jedem Gliede in die Potenzen von $\frac{m}{n}$ multiplicirt werden, lauter abnehmende eigentliche Brüche ſind, und die Reihe für den Sinus ſich nähern würde, wenn auch $\frac{m}{n} = 1$ wäre, noch vielmehr, da es kleiner als $\frac{1}{2}$ iſt.

Für den Coſinus; iſt $\frac{1}{2}$ P gröſſer als $\frac{3}{2}$ aber kleiner als 1, 6 und noch vielmehr kleiner als 2; folglich $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{2}$ gröſſer als 1. aber $(\frac{1}{2}P)^4$ viel kleiner als 1.6 und folglich mit $\frac{1}{4.3.2.}$ multiplicirt gewiß kleiner als 1. Was alſo in der Reihe für den Coſinus drittem Gliede, in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, iſt ein eigentlicher Bruch. Dieſes wird nun durch den eigentlichen Bruch $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{6.5}$ multiplicirt, um das herauszubringen, was im vierten Gliede in die Potenz von

von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, und folglich iſt dieſes, das im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ein eigentlicher Bruch, und giebt mit $(\frac{1}{2} P)^2 . \frac{1}{8.7}$ multiplicirt wieder einen eigentlichen Bruch für das, was im fünften Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird. Und ſo wird aus jedem Factor, der in einem Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wenn man ihn durch $(\frac{1}{2} P)^2 . \frac{1}{90.9}$ u. ſ. w. multiplicirt, der Factor der im folgenden Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird; iſt alſo der vorhergehende ein eigentlicher Bruch, ſo iſt der folgende auch einer. Daher wiederum die Reihe für den Coſinus ſich nähern würde, wenn auch $1 = \frac{m}{n}$ wäre.

So erhellt alſo, daß man hier den Sinus und Coſinus durch zwo Reihen, die ſich nähern ausdruckt. Und dieſes giebt alle Sinus und Coſinus bis auf 90 Gr.

315. Man findet alſo auch alle Tangenten und Secanten u. ſ. w.

316. Anm. Die Kürze, in die ich mich einſchränken muß, verſtattet mir nur die Möglichkeit dieſer Rechnung zu weiſen. Man findet die dazu nöthigen Zahlen und Vortheile, bey ihr beym Euler Intr. in Anal. inf. L. I. §. 134; 135; 136; 137; Wie die Logarithmen zu dieſen Zahlen gefunden werden, will ich weiter unten erklären.

Von den Ausſchnitten der Hyperbel.

317. Aufg. **Wenn in der Hyperbel (233; 14 F.) nach dem Scheitel C und einem willkührlichen Puncte M; aus dem Mittelpuncte gerade Linien AC; AM; gezogen werden, des Ausſchnittes CAM Element zu finden.**

Aufl. Ein anderer Ausſchnitt ſey CAm und beyder Unterſchied MAm; MR aber ein Bogen mit dem Halbmeſſer AM der den Winkel MAm miſſt, alſo Rm = Am = AM. Wenn nun m unendlich nahe an M rückt, ſo nähert ſich Mm unendlich einer geraden Linie (68) und MR einem Perpendikel auf Am (96) und der Ausſchnitte Unterſchied MAm einem geradelinichten Dreyecke, deſſen Innhalt $\frac{MR.Am}{2}$ wäre, und weil ſich Am unendlich dem Werthe AM nähert, ſo iſt dieſer Innhalt $\frac{MR.AM}{2}$. Dieß alſo iſt die Gränze, der

ſich

ſich der Ausſchnitte Unterſchied unendlich nähert, oder des Ausſchnittes CAM Differential.

II. Der Winkel CAM heiſſe φ. Weil CAM $+$ MAP $= 45$; ſo iſt dMAP $= - d\varphi$. Aber MR $=$ AM. $\partial\varphi$ (Geom. 44 S. 11 Z.) und daher $\frac{MR.AM}{2}$ als des Ausſchnittes Differential, $= \frac{AM^2.\, d\varphi}{2}$.

III. Nun heiſſe AP $= \omega$., ſo iſt tang MAP $= \frac{PM}{\omega}$, Sec MAP $= \frac{AM}{\omega}$; alſo aus (299) des Winkels MAP Differential, oder $- d\varphi = \left(d\frac{PM}{\omega}\right) : \left(\frac{AM}{\omega}\right)^2$ aber aus (233; I) iſt PM: $\omega = a^2 : 8.\, \omega^2$, davon das Differential $= - \frac{a^2.d\omega}{4.\omega^3}$ alſo $- d\varphi = \frac{- a^2.\, d\omega}{4.\omega.\, AM^2}$ und des Ausſchnitts Differential $= + \frac{a^2.\, d\omega}{8.\, \omega}$

IIII. Eben das Differential aber hat auch die Fläche GCMP (233. I) oder es iſt der Ausſchnitt MAm $=$ MPmp. Und wenn alſo $\frac{a^2}{8}$. log. ω ſo genommen wird, daß es für $\omega =$ AG

$= 1$

$= 1$ verſchwindet, ſo ſind der Ausſchnitt CAM, und die Fläche CGPM zugleich $= 0$ und alſo allemahl gleich. Zu dieſer Abſicht muß man das logarithmiſche Integral ſo ausdrucken $\frac{a^2}{8} \cdot \log. \frac{2\omega\sqrt{2}}{a}$ (233 VI.)

318. Aufg. Eben den Ausſchnitt durch die Abſciſſe auf die Axe aus dem Mittelpuncte auszudrucken.

Aufl. Wenn man ſich von M auf die verlängerte AC als der Hyperbel Axe ein Perpendikel vorſtellt, ſo iſt dieſes die Ordinate der Hyperbel, und zwiſchen ihm und dem Mittelpuncte iſt auf der Axe die erwähnte Abſciſſe enthalten.

Dieſe Abſciſſe und Ordinate ſind das u und y Alg. 418. Sie ſollen hier x und z, heiſſen, ſo iſt $z = \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)}$; $\text{tang}\, \varphi = \frac{z}{x}$; $\sec \varphi = \frac{AM}{x}$ alſo der Winkel MAm oder $d\varphi = x^2 . d(z:x)$ dividirt durch AM^2. Der Dividend iſt $= x . dz - z dx$ alſo $d\varphi = \frac{x . dz - z . dx}{AM^2}$.

Der Bogen $MR = AM . d\varphi$ und des Ausſchnittes Element $= \frac{1}{2} . AM^2 . d\varphi = \frac{1}{2}(x . dz$

— z.

$- z . dx)$ Aber $dz = \frac{x . dx}{z}$ alſo des Ausſchnit-tes Element $= \frac{1}{2} . \frac{(x^2 - z^2) . dx}{z} = \frac{\frac{1}{4} . a^2 . dx}{2 . \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)}}$

II. Nun hatte man den Ausſchnitt durch log nat ω gegeben (317; IV) kann man alſo AP, die Abſciſſe auf der Aſymptote, durch x die Abſciſſe auf der Axe aus dem Mittelpuncte ausdrucken, oder umgekehrt, ſo bekömmt man neue logarithmiſche Formeln.

319. I. Dieſer Uebergang geſchieht folgendergeſtalt.

$$z^2 + x^2 = AM^2 = PM^2 + AP^2$$

Man drucke jede Ordinate durch ihre Abſciſſe aus, ſo iſt $2 . x^2 - \frac{1}{4} a^2 = \frac{a^4}{64 . \omega^2} + \omega^2$

oder

$$2 . x^2 = \frac{a^4}{64 . \omega^2} + \frac{1}{4} . a^2 + \omega^2$$

Was rechter Hand ſteht iſt das Quadrat von

$$\frac{a^2}{8 . \omega} + \omega$$

Alſo $x = \pm \left(\frac{a^2 + 8 . \omega^2}{8 . \omega . \sqrt{2}} \right)$

II. Wenn man AP nimmt wie es die Figur darſtellt ſo gehört zu demſelben eine bejahte Abſciſſe auf der verlängerten AC.

Innerhalb des Scheitelwinkels vom rechten Winkel FAE, fällt der Hyperbel andre Hälfte, ihre Aſymptoten ſind EA, FA, verlängert, ihre Axe liegt auf CA verlängert.

Nimmt man auf der Aſymptote welche die Verlängerung von EA iſt, ein Stück = AP ſo gehört dieſem auf der Verlängerung von CA eine Abſciſſe zu ſo groß als x nur entgegengeſetzt.

Bleibt man innerhalb des rechten Winkels FAB, ſo braucht man nur den bejahten Werth von x.

III. Aus (I) hat man auch

$$2.\ x^2.\ \omega^2 = \frac{a^4}{64} + \tfrac{1}{4} a^2.\ \omega^2 + \omega^4$$

daraus $\omega^2 = x^2 - \frac{1}{8} a^2 \pm \surd (x^4 - \frac{1}{4}. a^2. x^2)$

IV. Zum bejahten x gehören zweene Puncte in der Hyperbel BCD; von jedem ein Perpendikel auf AE, ſchneidet ein ω ab. In der Figur iſt AP das gröſſte unter beyden.

Zum verneinten x, gehören entgegengeſetzte ſonſt gleiche ω (II)

V. Verſteht man alſo das AP der Figur wie in (II) ſo wird in (III) vor der Quadratwurzel, + gebraucht, und die Wurzel aus dem ganzen Quadrate bejaht genommen.

VI. Von $x + \surd (x^2 - \frac{1}{4} a^2)$ iſt das Quadrat $= 2. (x^2 - \frac{1}{8}. a^2 + x. \surd (x^2 - \frac{1}{4} a^2))$

Alſo

Alſo (III; V.)

$$\omega = \frac{x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{\sqrt{2}}$$

VII. Daraus $d\omega = \frac{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)} + x}{\sqrt{(2.(x^2 - \frac{1}{4}a^2))}}.dx$

und $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}$

Folglich, aus 317; IV; und 318 I. der Ausſchnitt durch Abſciſſe aus dem Mittelpuncte ausgedruckt, oder

$$\frac{1}{8}.a^2.\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}} =$$

$$\frac{1}{8}.a^2.\log nat \left(\frac{2.x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} \right)$$

verſchwindet wie gehörig für $x = \frac{1}{2}a$.

Fläche der Hyperbel zwiſchen Abſciſſe aus dem Mittelpuncte auf der Axe, zugehöriger Ordinate und Bogen.

320. I. Sie iſt $\int z.dx$, das Integral ſo genommen daß es für $z = 0$ verſchwindet.

II. Die gerade Linie CM iſt Hypotenuſe eines Dreyecks, deſſen beyde Seiten um den rechten Winkel Abſciſſe und Ordinate ſind, der Innhalt $= \frac{1}{2}.x.z$. Von dieſem Dreyecke den Ausſchnitt (319; VII) giebt $\int z.dx$;

III) Alſo, die Ordinate durch Abſciſſe ausgedruckt iſt

$$\int dx. \sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4} a^2)} = \tfrac{1}{2}. x. \sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4} a^2)}$$

$$- \tfrac{1}{8}. a^2. \log nat \left(\frac{2. x + 2. \sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4} a^2)}}{a}\right)$$

IV. Man kann auch logarithmiſche Integrale finden wo nur Ordinate und ihre Differentiale vorkommen: Nähmlich aus $x^2 = z^2 + \tfrac{1}{4} a^2$

folgt $dx = \frac{z. dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$; $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4} a^2)}}$

$= \frac{dx}{z} = \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$ alſo $\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$

$$= \log nat \left(\frac{2. \sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} + 2. z}{a}\right)$$

V. $dx. \sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4} a^2)} = z. dx$

$= \frac{z^2. dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$ alſo $\int \frac{z^2. dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}} = \tfrac{1}{2}.$

$\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}. z$

$$- \tfrac{1}{8}. a^2. \log \left(\frac{2 \sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} + 2. z}{a}\right)$$

VI) $dz. \sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} = \frac{z^2. dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$

$+ \frac{\tfrac{1}{4} a^2. dz}{\sqrt{(z^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}}$

Von dieſen beyden Differentialen hat man des erſten Integral in (VI) des zweyten aus (IV)

VII)

VII) Alle verſchwinden für $z = 0$

Quadratur der ungleichſeitigen Hyperbel.

VIII) Der ungleichſeitigen Hyperbel Glei-chung (Alg. 402) iſt $y^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot (u^2 - \frac{1}{4} a^2)$ Eine gleichſeitige die mit ihr einerley Mittelpunct und einerley groſſe Axe hat, alſo auch einerley Scheitel, hat zur Gleichung $z^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$ wo z und y, gleichen Abſciſſen gehören. Alſo $y:z = c:a$, und das Element der Fläche der un-gleichſeitigen Hyperbel $y.\, du = \frac{a}{c} \cdot z.\, du$. So wird die ungleichſeitige Hyperbel vermittelſt der gleichſeitigen quadrirt, wie die Ellipſe vermittelſt des Kreiſes (unten 343.)

321. I. Des Ausſchnittes Differential druckt man folgendergeſtalt durch den Winkel CAM aus: Weil $AM = x.\, \sec \varphi$ (317; II) ſo iſt das Dif-ferential $= \frac{1}{2} x^2.\, \sec \varphi^2.\, d\varphi = \frac{1}{2} x^2.\, d \tang \varphi$.

Nun iſt $z = x.\, \tang \varphi$, alſo (318) $x^2.\, \tang \varphi^2 = x^2 - \frac{1}{4} a^2$; dieſes giebt $\frac{1}{2} x^2 = \frac{aa}{8.\,(1 - \tang \varphi^2)}$ folglich des Ausſchnitts Dif-ferential $= \frac{a^2.\, d \tang \varphi}{8.\,(1 - \tang \varphi^2)}$

 II.

II. Man ziehe an der Hyperbel Scheitel C, eine Linie die ſie berührt. Das Stück dieſer Linie das zwiſchen AC und AM fällt, heiſſe p; ſo iſt $p = \frac{1}{2}a.\ \text{tang}\ \varphi$ oder $\frac{2p}{a} = \text{tang}\ \varphi$.

Dieſes giebt des Ausſchnitts Differential
$\frac{\frac{1}{16}a^3 dp}{\frac{1}{4}a^2 - p^2}$

III. Aus I iſt $x = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{(1 - \text{tang}\ \varphi^2)}}$, und $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{\frac{1}{2}a.\ \text{tang}\ \varphi}{\sqrt{(1 - \text{tang}\ \varphi^2)}}$; dieſes giebt $\frac{2(x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)})}{a} = \frac{1 + \text{tang}\ \varphi}{\sqrt{(1 - \text{tang}\ \varphi^2)}} = \frac{\sqrt{(1 + \text{tang}\ \varphi)}}{\sqrt{(1 - \text{tang}\ \varphi)}}$; alſo $\log \frac{2.(x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)})}{a} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \text{tang}\ \varphi}{1 - \text{tang}\ \varphi}$

Folglich den Ausſchnitt (319) nun durch φ ausgedruckt, oder (I) $\frac{a^2}{8} \cdot \int \frac{d\ \text{tang}\ \varphi}{1 - \text{tang}\ \varphi^2} = \frac{a^2}{16} \cdot \log \frac{1 + \text{tang}\ \varphi}{1 - \text{tang}\ \varphi}$

IIII. Und folglich aus (II)

$$\frac{1}{16}a^3 . \int \frac{dp}{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{a^2}{16} \cdot \log \frac{\frac{1}{2}a + p}{\frac{1}{2}a - p}$$

V.

V. Nennt man $\frac{1}{2}$ a = r; ſo iſt der nun gefundene hyperboliſche Ausſchnitt den ich H nennen will

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{r^3\, dp}{r^2 - p^2} = \frac{1}{4} r^2 . \log \frac{r + p}{r - p}.$$

Vergleichung der Ausſchnitte des Kreiſes und der Hyperbel.

322. Aufg. Von einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer = e hat ein Bogen = v die Tangente = q; man ſucht den zugehörigen Ausſchnitt = C.

Aufl. Wenn t (299) zum ähnlichen Bogen gehört, ſo ſind (Trig. 1 S.) t; und a in 299; = $\frac{q}{e}$ und $\frac{v}{e}$ alſo $dv = \frac{ee\,dq}{ee + qq}$ und $\frac{1}{2} e\, dv = dC$ $\frac{\frac{1}{2} e^3\, dq}{ee + qq}$

323. I. Man nehme e = r, (322; VI) ſtelle ſich alſo einen Kreis um C vor deſſen Halbmeſſer die halbe Axe iſt. Ein Bogen dieſes Kreiſes = r. φ miſſt den Winkel CAM; des Kreiſes Ausſchnitt iſt = $\frac{1}{2}$. r^2. φ = C ſo wie der Hyperbel ihrer = $\frac{1}{2}$ AM^2. φ = H; alſo C : H = $r^2 : AM^2$. Der Quotient $\frac{H}{C}$ iſt allemahl gröſſer

als 1 und wächſt ins Unendliche wenn M ſich der Aſymptote unendlich nähert.

Der Winkel CAM kann bis 45 Gr. wachſen; da wächſt der Kreisausſchnitt zum Quadranten, der hyperboliſche ins Unendliche.

II. Man ſetze $q = p . \sqrt{-1}$; $dq = dp . \sqrt{-1}$, alſo $p = \frac{q}{\sqrt{-1}} = -q\sqrt{-1}$. Folglich

$$C - \tfrac{1}{2} r^3 . \int \frac{dq}{r^2 + q^2} = \tfrac{1}{2} r^3 . \int \frac{dp . \sqrt{-1}}{r^2 - p^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} . r^3 . \sqrt{-1} . \int \frac{dp}{r^2 - p^2} = H . \sqrt{-1}$$ (321; V) $$= \tfrac{1}{4} r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r+p}{r-p} = \tfrac{1}{4} r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$$

III) Weil jede Quadratwurzel bejaht oder verneint iſt, ſo war die Vorausſetzung im Anfange (II) eigentlich:
$q = \pm p . \sqrt{-1}$ daraus $dq = dp . \pm \sqrt{-1}$ und $p = \frac{q}{\pm\sqrt{-1}} = q . \mp \sqrt{-1}$. Hätte man alſo $q = - p \sqrt{-1}$ geſetzt ſo wäre das ſoviel als $p = + q . \sqrt{-1}$ geſetzt, da käme $dq = - dp . \sqrt{-1}$ und $C = \tfrac{1}{2} . r^3 . \int \frac{dq}{r^2 + q^2} =$

$\tfrac{1}{2} r^3 .$

$$\tfrac{1}{2} r^3 . \int \frac{-dp . \sqrt{-1}}{r^2 - p^2} = -\tfrac{1}{2} . r^3 . \sqrt{-1} . \int \frac{dp}{r^2 - p^2}$$

$$= -\tfrac{1}{4} . r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r + q\sqrt{-1}}{r - q\sqrt{-1}}$$

$$= + \tfrac{1}{4} . r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$$

wie vorhin. Beyde Vorausſetzungen geben alſo einerley.

324. Der Ausſchnitt des Kreiſes kann als ein unmöglicher Ausſchnitt der Hyperbel angeſehen, und durch Logarithmen unmöglicher Gröſſen integrirt werden.

325. Anm. Dieſes hat Joh. Bernoulli zuerſt gelehret. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. p. 399. Mir iſt nicht bekannt, daß er oder jemand anders die eigentliche Urſache, warum mögliche Ausſchnitte der Hyperbel, unmögliche des Kreiſes, und umgekehrt ſind, deutlich angezeigt hätte. Vielleicht iſt ſie zu offenbahr, als daß ſie dieſe Bemühung bey Schriftſtellern, die nur erhabene Erfindungen vortragen, verdiente, ſie wird alſo doch in dieſen Anfangsgründen ſtatt finden. Wenn r zugleich der Halbmeſſer eines Kreiſes, und die halbe Axe einer Hyperbel iſt, die beyde einen Mittelpunct, und die gemeinſchaftliche Abſciſſe x haben, ſo ſey die Ordinate des Kreiſes $= y$; der Hyperbel $= z$; die Gleichungen ſind $yy = rr - xx$ und $zz = xx - rr$ (Alg. 418.). Jene Ordinate iſt nur möglich, wenn $x < r$ und dieſe nur, wenn $x > r$. Für dieſe Abſciſſen alſo, für welche es mögliche Ordinaten und Ausſchnitte bey dem Kreiſe giebt, giebt es nichts dergleichen bey der Hyperbel; und umgekehrt, wenn der Hyperbel Ausſchnitte möglich werden,

den, ſind des Kreiſes ſeine unmöglich. Daher kann für $r = e$ (323) der Ausſchnitt des Kreiſes nichts anders als ein unmöglicher Ausſchnitt der Hyperbel ſeyn.

326. Wenn man ſich aber der logarithmiſchen Reihen bedienet, ſo wird C durch lauter mögliche Gröſſen gegeben, dieſes erhellt ſo: vorläufig iſt in 223; für $a = 1$ (225) $l\,\frac{1-u}{1+u} = -2u.(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 \ldots) = -2u.T$ wo die Reihe T lauter gerade Potenzen von u enthält.

Nun iſt $\frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right) : \left(1 + \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right)$ wo man $\frac{q\sqrt{-1}}{r} = u$ (223) ſetzen kann. Da enthält alſo T lauter mögliche Glieder (Alg. 230.) und es iſt

$$C = \frac{rr.\sqrt{-1}}{4}. - \frac{2q\sqrt{-1}}{r}.T = \frac{+qr}{2}.T$$

Weil die Potenzen gerader Exponenten von $\sqrt{-1}$ abwechſelnd verneint oder bejaht ſind, nachdem der Exponent ein Product aus einer geraden Zahl in eine ungerade, oder in eine gerade iſt, ſo ſind der Reihe T Glieder abwechſelnd verneint und bejaht.

Für $q = r$ wird $u = \sqrt{-1}$ und

$C = \frac{rr}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots)$ welches mit (300) übereinſtimmt.

327. $v = \frac{2C}{r} = \frac{r\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$

oder für $r = 1$; und $q = u\sqrt{-1}$; $\frac{\text{B tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$

$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$ und aus (299)

$\frac{\text{Bog tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \Big(1 + \frac{1}{3} u^2$

$+ \frac{1}{5} u^4 \ldots \Big)$

Woraus die Reihe für $\log \frac{1+u}{1-u}$ wie in 223 folgt.

328. Zuſ. Für den Halbmeſſer $= 1$ iſt in 299, aus (322) $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}}$ (I)

oder auch $= \frac{-1}{2\sqrt{--1}} \cdot l \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{--1}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l \frac{1 + q\sqrt{-1}}{1 - q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot$

$l \frac{\sqrt{-1} - q}{\sqrt{-1} + q}$ (II).

329.

329. Wenn ſin a = c; coſ a = γ; alſo $q = \frac{c}{\gamma}$; ſo iſt $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$

330. Wenn le = 1 geſetzt wird (232) alſo $ale = a = le^a$; und $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-}$; ſo kömmt $e^{-2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$

$= \frac{(\gamma - c\sqrt{-1})}{1}$ oder $e^{-a\sqrt{-1}}$

$= \gamma - c\sqrt{-1}$; Gegentheils $e^{2a\sqrt{-1}} =$
$\frac{\gamma + c\sqrt{-1}}{\gamma - c\sqrt{-1}} = \frac{(\gamma + c\sqrt{-1})^2}{1}$ und
$e^{a\sqrt{-1}} = \gamma + c\sqrt{-1}$ folglich
$\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \gamma =$ coſ a und
$\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = c =$ ſin a; welches nach (239) die Reihe (285) gäbe.

Vervielfältigung der Winkel vermittelſt der Tangenten.

331. Aufg. Aus der Tangente x des einfachen Bogens E, die Tangente y des n fachen F zu finden. Der Halbmeſſer iſt = 1. Dieſes gehört zu Alg. 175.

Weil

Weil $F = n.\ E$ ſo iſt $dF = n\,dE$ alſo (299) $\frac{n\,dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$. Dieſe beyden Integrale zu finden, bediene man ſich in 328; des II. Ausdrucks. Man ſetze einmahl

$a = E$; $q = x$; ſo iſt $E = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\,\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}$

zweytens

$a = F$; $q = y$; ſo iſt $F = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\,\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$

Weil nun $F = n.\ E$; ſo iſt auch

$n.\ l\,\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = l\,\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ und

$\left(\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}\right)^n = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ (⊙)

Der Kürze wegen will ich ε ſtatt $\sqrt{-1}$ ſchreiben. So iſt $\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n = \frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y}$

II. Wenn n ungerade iſt, ſo kann man aus ⊙ folgende Gleichung machen: $\left(\frac{x-\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)^n = \frac{y-\varepsilon}{y+\varepsilon}$ daß beyde Zähler den vorigen in ⊙ entgegengeſetzt werden. Aber für ein gerades n würde

$(x-\varepsilon)$

$(x-\varepsilon)^n$ dem $(\varepsilon-x)^n$ nicht entgegengeſetzt, wie doch $y-\varepsilon$ dem $\varepsilon-y$, daß alſo dieſe Verwandelung für das gerade n nicht angeht. Für das ungerade n aber kömmt vermöge dieſer Verwandelung

$$(x-\varepsilon)^n\,(y+\varepsilon)=(y-\varepsilon).\,(x+\varepsilon)^n \quad (♂)$$

III. Man ſetze $-\cot F=z$; alſo $y=-\frac{1}{z}$; daraus wird in (I); $\frac{\varepsilon-y}{\varepsilon+y}=\frac{z\varepsilon+1}{z\varepsilon-1}$; Man multiplicire hier Zähler und Nenner mit ε, weil nun $\varepsilon^2=-1$ ſo verwandelt ſich der Bruch in $\frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon}$ welches alſo $=\left(\frac{\varepsilon-x}{\varepsilon+x}\right)^n$ iſt (I).

Wenn nun n gerade iſt, ſo iſt $(\varepsilon-x)^n=(x-\varepsilon)^n$, und die nur jetzt gefundene Gleichung giebt $(x-\varepsilon)^n.\,(z+\varepsilon)=(z-\varepsilon).\,(x+\varepsilon)^n$ (☿) Welche der ♂ in II völlig ähnlich iſt, nur daß ſie z ſtatt y hat.

IIII. Wenn man alſo in beyden Gleichungen ♂ und ☿; den Buchſtaben y allein gebrauchen will, oder ♂ ſtatt beyder Gleichungen gebraucht, ſo bedeutet dieſes y für ein ungerades n; $\tang F=\tang nE$, für ein gerades n aber, $-\cot F$.

V. Aus ♂ findet man

$$y=\frac{(x-\varepsilon)^n+(x+\varepsilon)^n}{(x+\varepsilon)^n-(x-\varepsilon)^n}\,\varepsilon$$

Wenn

Wenn der Potenz n Binomialcoefficienten A; B; C; D.... heiſſen, ſo iſt

$$(x+\varepsilon)^n = x^n + A\varepsilon x^{n-1} + B\varepsilon\varepsilon x^{n-2} + C\varepsilon^3 x^{n-3} + D\varepsilon^4 x^{n-4} \ldots\ldots$$

$$(x-\varepsilon)^n = x^n - A\varepsilon x^{n-1} + B\varepsilon^2 x^{n-2} - C\varepsilon^3 x^{n-3} + D\varepsilon^4 x^{n-4} \ldots$$

alſo die Summe $2.(x^n + B\varepsilon^2 x^{n-2} + D\varepsilon^4 x^{n-4}.)$ Der Unterſchied $= 2.(A\varepsilon x^{n-1} + C\varepsilon^3 x^{n-3}..)$ Die Summe nähmlich iſt das doppelte des erſten, dritten, u. ſ. f. oder der ungeraden, und der Unterſchied das doppelte des zweyten, vierten, u. ſ. f. oder der geraden Glieder der Reihe $(x+\varepsilon)^n$. Der letztere enthält alſo lauter ungerade Potenzen von ε und daher kann man ihn ſo ausdrucken: $2\varepsilon.(Ax^{n-1} + C\varepsilon\varepsilon.x^{n-3}..)$ da 2ε in eine Reihe multiplicirt wird, die lauter gerade Potenzen von ε enthält. Nun ſind die geraden Potenzen von ε abwechſelnd verneinte oder bejahte Einheiten (326) alſo

$$y = \frac{x^n - Bx^{n-2} + Dx^{n-4}\ldots\ldots}{Ax^{n-1} - Cx^{n-3} + Ex^{n-5}\ldots}$$

Die Glieder des Zählers und des Nenners machen nähmlich, wenn man auf ihre Zeichen nicht acht giebt, zuſammen $(x+1)^n$ aus; und es giebt ſich alſo folgende Regel: Man erhebe $x+1$ auf die Potenz n; und ſchreibe die geraden Glieder in den Nenner die ungeraden in den Zähler eines Bruches, doch ſo, daß im Nenner ſowohl als im Zähler die Zeichen der Theile abwechſeln, und + den

den Anfang macht. Dieſer Bruch iſt die Tangente des n fachen Bogens, wenn n ungerade iſt, (II) und die verneinte Cotangente, wenn n gerade iſt. (III) Im letzten Falle alſo bekömmt man die verneinte Tangente des n fachen Bogens, wenn man ihn umkehrt.

VI. Aus ⊙ wird $y = \frac{(\varepsilon + x)^n - (\varepsilon - x)^n}{(\varepsilon - x)^n + (\varepsilon + x)^n} \varepsilon$;

(4) Wenn hier n ungerade iſt, ſo iſt auch

$y = \frac{(x + \varepsilon)^n + (x - \varepsilon)^n}{(x + \varepsilon)^n - (x - \varepsilon)^n} \cdot \varepsilon$ welchen Ausdruck

man in V fand, wo er die Tangente für das ungerade n bedeutet. Iſt aber n gerade, ſo läſſt

ſich 4 in $\frac{(x + \varepsilon)^n - (x - \varepsilon)^n}{(x + \varepsilon)^n + (x - \varepsilon)^n} \cdot \varepsilon$ verwandeln.

Man heiſſe q, was hier in ε multiplicirt wird; ſo iſt für ein gerades n; aus IIII. $- \cot F =$

$\frac{\varepsilon}{q}$ alſo der Werth von y den hier 4 giebt =

$\frac{\varepsilon}{- \cot F} \cdot \varepsilon = \frac{+1}{\cot F} \cdot = + \tang F$. Dieſe Gleichung 4 giebt alſo in beyden Fällen tang F.

$(\varepsilon + x)^n = \varepsilon^n + A \varepsilon^{n-1} . x + B \varepsilon^{n-2} . x^2 \ldots$

$(\varepsilon - x)^n = \varepsilon^n - A \varepsilon^{n-1} . x + B \varepsilon^{n-2} . x^2 \ldots$

alſo $y = \frac{A \varepsilon^{n-1} x + C \varepsilon^{n-3} x^3}{\varepsilon^n + B \varepsilon^{n-2} x^2 \ldots} \cdot \varepsilon$ wo der Zähler

ler aus den geraden der Nenner aus den ungeraden Gliedern von $(x + \varepsilon)^n$ beſteht.

VII. Es ſey n ungerade, ſo dividire man den Nenner durch ε; und man bekömmt;

$$y = \frac{\pm Ax \mp Cx^3 \ldots}{\pm 1 \mp Bxx \ldots}$$ die obern oder die untern

Zeichen, nachdem $n - 1$ ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl iſt. (326)

Aber $$\frac{-Ax + Cx^3 \ldots}{-1 + Bxx \ldots} = \frac{+Ax - Cx^3 \ldots}{+1 - Bxx \ldots}$$

alſo gilt allemahl folgende Regel: Man mache einen Bruch, deſſen Zähler aus den geraden, der Nenner aber aus den ungeraden Gliedern von $(1 + x)^n$ beſteht, die Zeichen der Theile im Zähler und Nenner aber abwechſeln, daß das erſte $+$ iſt. Dieſer Bruch iſt tang F.

VIII. Es ſey n gerade, ſo multiplicire man in VI den Zähler mit ε; Dieſes giebt

$$y = \frac{\pm Ax \mp Cx^3}{\pm 1 \mp Bxx}$$; die obern oder untern Zeichen, nachdem n ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl iſt. Es iſt aber

wiederum $$\frac{-Ax + Cx^3 \ldots}{-1 + Bxx \ldots} = \frac{+Ax - Cx^3 \ldots}{+1 - Bxx \ldots}$$

wo alſo eben die vorige Regel (VII) gilt, weil y eben das bedeutet (VI)

Exempel.

VIIII. Für n = 5; wird (V) $\frac{x^5 - 10x^3 + 5x}{5x^4 - 10xx + 1}$ = der Tangente des fünffachen Bogens.

Wenn E = 30 Gr. ſo x = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Bruch

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\frac{1}{9} - \frac{10}{3} + 5)}{\frac{5}{9} - \frac{10}{3} + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tang } 150°$$

X. Für n = 4 iſt (V) $y = \frac{x^4 - 6xx + 1}{4x^3 - 4x}$

$= -\cot 4E$ alſo $\frac{4x.(xx-1)}{x^4 - 6x^2 + 1} = -\text{tang } 4E$

Wenn E = 30 Gr; iſt, giebt dieſes $\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{9} - 2 + 1}\right) = +\sqrt{3} = \text{tang } 60$ Gr. = − tang 120 Gr.

XI. Für n = 5 kömmt aus (VIII) $\frac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$ wie VIIII nur rückwärts geleſen, und eben ſo für n = 4 wie X nur dem Werthe in X entgegengeſetzt.

XII. Für n = 6 iſt der umgekehrte Bruch

$$\frac{6x^5 - 20x^3 + 6x}{x^6 - 15x^4 + 15xx - 1} = -\text{tang } 6E$$

Iſt E $= 45^{\circ}$ ſo wird der Nenner $= 0$ und der Zähler $= - 8$ alſo der Bruch ein verneintes Unendliches. Aber tang $6. \frac{1}{2}R =$ tang 270 Gr. iſt ein bejahtes Unendliches: (Trig. 4 Erkl. 2 Zuſ.)

XIII. Anm. Joh. Bernoulli, der dieſe Methode Act. Erud. Lipſ. Iun. 1712. (Op. T. I. n. 89.) bekannt gemacht hat, redet, als wenn 331 V. für ein gerades n die Cotangente ſelbſt gäbe. Hieſſe dieſe Cotangente $= q = \frac{1}{y}$ ſo wäre $\frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y} = \frac{\varepsilon q - 1}{\varepsilon q + 1} = \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n$ wo man keine Gleichung zwiſchen x und q bekäme, die der ♂ zwiſchen x und y ähnlich wäre wie in III. Eben ſo wenig würde man dergleichen erhalten, wenn man die Gleichung $\frac{dy}{1 + yy} = dF = - \frac{dq}{1 + qq}$ $= \frac{n dx}{1 + xx}$ integrirte; da $\int - \frac{dq}{1 + qq}$ ſo müſſte genommen werden, daß $x = 0$ für $q = \infty$ wäre, dieſes gäbe $\frac{n\varepsilon}{2} \, l \, \frac{1 - x\varepsilon}{1 + x\varepsilon} = - \frac{\varepsilon}{2} \, l \, \frac{1 - q\varepsilon}{1 + q\varepsilon} +$ Conſt und für $q = \infty$; $\frac{n\varepsilon}{2} \, l \, 1$ oder $0 = - \frac{\varepsilon}{2} \, l - 1 +$ Conſt (9) alſo Conſt $= \frac{\varepsilon}{2} \, l - 1$, und $n \, l \, \frac{1 - \varepsilon x}{1 + \varepsilon x}$ $= l - 1 + l \, \frac{1 + q\varepsilon}{1 - q\varepsilon} = l \, \frac{1 + q\varepsilon}{q\varepsilon - 1}$ woraus eben das folgt, was man bekömmt, wenn man $\frac{1}{q}$ ſtatt y in ⊙ ſetzt. Alſo muß man nicht eine Gleichung zwiſchen x und $q = +$ cot F; ſondern zwiſchen x und $z = -$ cot F ſuchen. (331. IIII.) wie auch die Exempel (331. X; XII) die Bernoulli ebenfalls gebraucht hat, zeigen.

Ad Fratrem, Chriſtian. Gotthold Eſchenbach, Ph. et Med. D. Ordinariam Chemiae Profeſſionem adeuntem, epiſtola Hieronymi Chriſtophori Vilelmi Eſchenbach Art. Magiſtri. Ineſt in locum Kaeſtnerianum de multipli angulorum tangentibus commentatio. Lipſ. 1788. Die bisherigen Sätze werden entwickelt wobey beſonders die Bezeichnungen aus Hr. Pr. Hindenburgs combinatoriſcher Analytik dienlich ſind.

Beweis daß jeder Zahl unzählich viele Logarithmen zugehören.

332. I. Jede mögliche bejahte Zahl b, kann als b. 1 betrachtet werden. Sie hat gewiß einen möglichen Logarithmen; derſelbe heiſſe L; Aus der Lehre der Logarithmen iſt $\log b = L + \log 1$; kann alſo log 1 noch mehr Werthe haben als 0; ſo giebt jeder zu L einen andern für log b; und log b hat alſo ſoviel Werthe als log 1 haben kann. Folglich darf man nur die Werthe von log 1 ſuchen.

II. Aus 328; iſt $2a\sqrt{-1} = l\,\dfrac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$

Es braucht keinen Beweis daß $\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$; bedeutet alſo a den Bogen deſſen Tangente $= 0$; ſo iſt $2a\sqrt{-1} = l\,1$; und $l\,1$ hat ſoviel Werthe als dieſer Bogen haben kann.

III.

III. Nun iſt zwar ein Bogen deſſen Tangente $= 0$ iſt, ſelbſt $= 0$; alſo $2 \cdot 0 \cdot \sqrt{-1} = l\,1$ oder $l\,1 = 0$; aber es gehört auch, für den Halbmeſſer $= 1$; die Tangente 0; zu dem Bogen π; 2π; 3π; ... $n\pi$, wo n jede ganze bejahte Zahl bedeuten kann. (Alg. 614) Folglich iſt für

$a = 0$	π	2π	$\ldots n\pi$
$l\,1 = 0$	$2\pi\sqrt{-1}$	$4\pi\sqrt{-1}$	$2n\pi\sqrt{-1}$

IIII. Eben ſo iſt in II; $-2a\sqrt{-1} = l\,\frac{\sqrt{-1}+q}{\sqrt{-1}-q}$ für $q = 0$ wird dieſes $-2a\sqrt{-1} = l\,1$; und alſo iſt auch $l\,1 = -2n\pi\sqrt{-1}$

V. Alſo iſt in (I) $\log b = L \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, welches ſoviel Werthe hat als n haben kann, das iſt unzählich viel; alle unmöglich auſer für $n = 0$.

VI. In (328 I) ſetze man $q = \infty$ wenn nun a den Bogen bedeutet deſſen Tangente unendlich iſt, ſo iſt $\frac{2a}{\sqrt{-1}} = l - 1$; und wenn man die in (IIII) angezeigte Veränderung macht, auch $\frac{-2a}{\sqrt{-1}} = l - 1$; Es iſt aber $a = \frac{1}{2}\pi$; oder $\frac{3}{2}\pi$, oder $\frac{5}{2}\pi$ ... oder $\frac{2m+1}{2}\pi$; alſo $l -$

 1 =

$1 = \frac{\pm(2m+1)\pi}{\sqrt{-1}}$ welche unzählichen Werthe alle unmöglich ſind.

Wenn m, n, jedes = o werden kann, ſo kann l 1 = o werden (III) aber nicht l − 1;

Vom Co. Giordano Riccati findet ſich eine Abhandlung in Memorie della Società Italiana T. IV. p. 116. (Verona 1788). Il nullo imaginario non puo confonderſi col reale. Wo auch dieſe Anwendung auf den Logarithmen der bejahten und der verneinten Einheit vorkömmt. Imgleichen auf die Conchoide (An. endl. Gr. 489) Schwierigkeiten, wenigſtens Paradoxen, entſtehn, wenn man ſich die Bedeutung der Zeichen nicht gehörig entwickelt, aus künſtlichen, weitläuftigen Rechnungen lernen will, was man zu Anfange der Rechnungen wiſſen konnte, wie: ob l 1 = o und l − 1 unmöglich iſt, (213; XX) um Grundlehren die Zeichen befragt, anſtatt den Grundlehren gemäß die Zeichen zu brauchen.

VII. Eine verneinte mögliche Zahl, − b; kann angeſehn werden als ein Product aus einer bejahten + b in − 1; Ihr Logarithme iſt alſo l b + l − 1 oder aus (V)

$= L \pm 2n\pi\sqrt{-1} \mp (2m+1)\pi\sqrt{-1}$

$= L \pm (2n - 2m - 1)\pi\sqrt{-1}$; da kann der unmögliche Factor nie verſchwinden, weil eine ungerade und eine gerade Zahl einander nie aufheben

ben können. Alſo hat eine verneinte Zahl nur unmögliche Logarithmen.

VIII. Wenn ein Logarithme $f + g \sqrt{-1}$ gegeben iſt, die Zahl x die ihm zugehört zu finden.

Weil $f + g \sqrt{-1} = lx$ ſo iſt $e^{f + g \sqrt{-1}} = x$ dieſes mit 330 verglichen giebt g = dem dortigen a; und $x = e^f . (\cos g + \sqrt{-1} . \sin g)$

VIIII. Soll der gegebene Logarithme möglich ſeyn, ſo ſetzt man $g = 0$.

X. Wenn $e^f = x$, ſo darf man für x nicht die verneinten oder unmöglichen Werthe nehmen die e^f etwa haben könnte, z. E. wenn $f = \frac{1}{2}$ ſetzt man nicht $x = -\sqrt{e}$ weil von $\sqrt{e}$ der Logarithme nicht die mögliche Gröſſe $\frac{1}{2}$ ſeyn kann (VII) Eben ſo, wenn $f = \frac{1}{3}$ nimmt man für x keinen der beyden unmöglichen Werthe von $\sqrt[3]{e}$; die $\frac{\sqrt[3]{e} . (-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$ ſind (Alg. 242) weil dieſer unmöglichen Gröſſen Logarithme nicht möglich ſeyn könnte. Man verſteht nehmlich unter x nur den bejahten Werth den e^f hat, nicht jeden andern.

XI. Es iſt klar daß hier 42 F. zu einer Ordinate QD; nicht mehr als eine Abſciſſe QA zu finden iſt, und eine Linie in der Weite DQ mit der Aſymptote parallel, die logarithmiſche Linie nur in einem Puncte ſchneidet, und daß überhaupt

 keine

keine gerade Linie kann gezogen werden welche die logarithmiſche in unzählich viel Puncten ſchnitte. Das Merkmahl tranſcendentiſcher Linien Anal. endl. Gr. 577. läſſt ſich alſo hier nicht anbringen, und doch iſt die logarithmiſche Linie eine tranſcendentiſche; denn lieſſe ſich bey ihr zwiſchen x und y eine algebraiſche Gleichung finden davon die $y\,dx = a\,dy$ (216) die Differentialgleichung wäre, ſo wäre x eine algebraiſche Function von y; das iſt, jede Zahl y hätte nur eine gewiſſe Menge Logarithmen, nicht unzählich viel; wieder (II).

XII. Dieſes zu erklären ſetze man in der 42 Fig. würden Abſciſſen ſenkrecht, Ordinaten der Aſymptote parallel gezogen, daß alſo dem Puncte D; auf AB eine Abſciſſe $= QD = y$; und eine durch D mit AQ parallel gezogene Ordinate $= QA = x$ zugehörte. Auf dieſe Art gehört zu jeder Abſciſſe $= y$; eine mögliche Ordinate $= x$; aber unzählich viel unmögliche; und weil dieſe unmöglichen keine Schenkel der krummen Linie geben, ſo giebt es auch nur einen möglichen Durchſchnitt dieſer Ordinate mit der krummen Linie, die übrigen ſind als unmöglich anzuſehn. Die logarithmiſche Linie hat alſo, ſo zu reden, einen möglichen Schenkel und unzählich unmögliche. So hat die neiliſche Parabel (268) für jedes x nur ein mögliches y, oder nur einen möglichen Schenkel und zweene unmögliche. (An. endl. Gr. 240) So läſſt ſich dieſe Beſchaffenheit der logarithmiſchen Linie mit An. endl. Gr. 576 vergleichen.

Allge-

Allgemeiner Ausdruck der Seiten, ordentlicher Vielecke.

333. Aufg. Den Umfang des Kreiſes durch Logarithmen auszudrucken.

Aufl. I. Wenn man in (328); $q = 1$ ſetzet, ſo iſt der Bogen von 45 Graden $= \frac{\varepsilon}{2} \, l \, \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$; Es iſt aber $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon).\,(1 - \varepsilon)} = - \varepsilon$; alſo dieſer Bogen $= \frac{\sqrt{-1}}{2} . \, l - \sqrt{-1}$. Dieſer Ausdruck aber iſt weiter zu nichts zu brauchen. Der halbe Umkreis iſt viermahl ſo groß; alſo $\sqrt{-1}.2.\, l\,(-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.\, l - 1$; wie in 332; VI; für $m = 0$

II. Man ſetze $q = \frac{1}{\sqrt{3}} =$ tang 30 Gr; ſo iſt dieſer Bogen nach dem zweyten Ausdrucke 328; $= \frac{1}{2\varepsilon} . \, l \, \frac{\varepsilon - - 1 : \sqrt{3}}{\varepsilon + 1 : \sqrt{3}}$ der Bruch unter dem logarithmiſchen Zeichen wird $= \frac{\varepsilon \sqrt{3} - 1}{\varepsilon \sqrt{3} + 1}$ $= \frac{-\sqrt{3} - \varepsilon}{-\sqrt{3} + \varepsilon}$ alſo der Bogen von 30 Gr. $=$

 $\frac{1}{2\varepsilon}$.

$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$ und der halbe Umfang $= \frac{3}{\varepsilon}$ $l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$.

III. Folglich der ganze $= \frac{3}{\varepsilon} \cdot l \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^2$ $= \frac{3}{\varepsilon} \cdot l \frac{1 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 - \varepsilon\sqrt{3}}$

334. Aufg. Die Tangente x von $\frac{1}{n}$ des halben Umfangs zu finden.

I. Aufl. Bog tang $x = \frac{3}{n\varepsilon} l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$ (333; II) $= \frac{1}{2\varepsilon} \cdot l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$ folglich $\frac{6}{n} l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$ $= l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$ daraus findet ſich, die Zeichen der Logarithmen weggelaſſen, nach gehöriger Rechnung

$$x = \varepsilon . \left(\frac{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n}}{(\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}\right)$$

II. Weil die Seiten eines Vielecks, das um den Kreis beſchrieben iſt, mit ihren mittlern Puncten den Kreis berühren; ſo iſt 2x die Seite eines Vielecks, das um den Kreis beſchrieben iſt,

iſt, und deſſen Winkel am Mittelpuncte $\frac{2}{n}$ des halben oder $\frac{1}{n}$ des ganzen Umkreiſes iſt, oder das n Seiten hat.

So iſt für $n = 6$ die Seite des um den Kreis beſchriebenen Sechsecks $= \frac{+2}{\sqrt{3}}$ als die doppelte Tangente von 30 Gr.

III. Weil $(\sqrt{3} - \varepsilon).(\sqrt{3} + \varepsilon) = 4$; ſo iſt $1 + xx = 4.4^{6:n}: ((\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n})^2$ und die Seite des ähnlichen Vielecks, das in dem Kreis beſchrieben iſt, oder $\frac{2x}{\sqrt{(1+xx)}}$ iſt $= \left((\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n} - (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n}\right)\sqrt{-1}$. Dieſe Formel giebt Cramer in den Anmerk. zu Jac. Bernoullis Werken 74. Num. 765 Seite ohne Beweis.

Für $n = 6$ wird ſie $= +1$.

335. Aufg. Eine Gleichung zwiſchen des Winkels φ Sinus b; Coſinus β; und des Winkels $n.\varphi$ Sinus p; Coſinus π zu finden.

Aufl. In ⊙ 331 ſetze man $x = \frac{b}{\beta}$; $y = \frac{p}{\pi}$ ſo kömmt $\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$. Aber

$\varepsilon\beta$

$$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{-\beta - b\varepsilon}{-\beta + b\varepsilon} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta + b\varepsilon)^2}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)} = (\beta + b\varepsilon)^2.$$ Alſo

$(\beta + be)^{2n} = (\pi + p\varepsilon)^2$ oder $\left(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1}\right)^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$; die Zweydeutigkeit der Zeichen folgt aus (Alg. 32) So iſt, für $n = 2$; $(\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1})^2 = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 \pm 2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{-1} = \cos 2\varphi \pm \sin 2\varphi\sqrt{-1}$ (Trig. 19 S. 5 Z.

336. Aufg. Die unendliche Reihe, welche den Sinus durch den Bogen giebt (285) in Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Der Sinus ſoll y heiſſen. Er iſt aber $= a.\left(1 - \frac{1}{1.2.3}a^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}a^4 .. \frac{\pm a^{2n}}{1.2.3...2n.(2n+1)} ....\right)$ wo ich für die Reihe S ſchreiben, alſo $y = a. S$ ſetzen will. Das obere Zeichen gilt im letzten Gliede, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade iſt. Weil die Reihe unendlich iſt, ſo kann n ſo groß als man will, oder unendlich angenommen werden.

II. Weil $\frac{y}{a} = S$ und $S = 1$ für $a = 0$ ſo folgt, daß der verſchwindende Bogen ſeinem Si-

nus

nus gleich iſt. Eben das folgt aus 281 wenn man aus der dortigen Reihe den Quotienten ſucht, den der Bogen, mit dem Sinus dividirt, giebt, und den Sinus alsdenn $= 0$ ſetzt.

III. Auſer dieſem Falle giebt es aber noch unzählich viele, da nicht der Bogen, aber der Sinus $= 0$ würde, wenn nähmlich der Bogen dem einfachen, doppelten, dreyfachen u. ſ. f. halben Umkreiſe gleich wird. Der halbe Umkreis heiſſe c; ſo wird $\frac{y}{a}$ oder $S = 0$ ſo oft als $x = c$ oder $2c$ oder $3c \ldots$ oder nc wo n unendlich iſt (I). Man kann alſo $S = 0$ als eine Gleichung betrachten, die unzählich viel Wurzeln, und darunter die genannten hätte.

IIII. Um aber hier nach dem, was wegen der Gleichungen iſt gelehret worden, zu verfahren, ſo muß das höchſte Glied der Gleichung $S = 0$ nur 1 zum Coefficienten haben. Man muß alſo alle Glieder mit $1.2.3\ldots(2n+1)$ multipliciren; dieſes giebt $1.2.3\ldots(2n+1) - 4.5\ldots(2n+1)a^2 + 6.7\ldots(2n+1)a^4 \ldots + a^{2n}$ welches ich T nennen will $= S.1.2.3\ldots(2n+1)$

V. **Erſter Fall.** Wenn man n als gerade anſieht; da das obere Zeichen gilt (I) und $T = 0$ alſo völlig die Beſchaffenheit einer Gleichung von 2n Graden hat, da nur das höchſte Glied zuletzt ſteht. Weil a in dieſer Gleichung lauter gerade

Expo-

Exponenten hat, ſo giebt es für jede bejahte Wurzel dieſer Gleichung auch eine verneinte, die nur der bejahten entgegengeſetzt, ſonſt mit ihr von einerley Gröſſe iſt. Alſo hat die Gleichung nebſt den nur genannten Wurzeln $+ c; + 2c..$ $+ nc$ auch die $- c; - 2c; \ldots - nc$; und da die Zahl dieſer Wurzeln zuſammen $2n$ iſt, ſo ſind das ihre Wurzeln alle. Sie entſpringt alſo aus den $2n$ Wurzelgleichungen $(a - c). (a + c). (a -- 2c). (a + 2c) \ldots (a - nc). (a + nc)$ (Alg. 221) oder T iſt ein Product aus den n Factoren $(aa - cc). (aa - 4cc) (aa - 9cc) \ldots (aa - nnc)$

VI. Die letzten Theile dieſer n Factoren mit einander multiplicirt geben, $+ c^{2n}. 1. 4. 9 \ldots nn$, bejaht, weil ihre Zahl gerade iſt. Dieſes Product iſt ſo groß als das Glied der Gleichung, das die unbekannte Gröſſe nicht enthält, (Alg. 219) alſo $= 1. 2. 3 \ldots (2n + 1)$. (IIII).

VII. Weil n gerade iſt, ſo kann man ſtatt jedes Factors (V) auch den entgegengeſetzten nehmen; und bekömmt $T = (cc - aa). (4cc - aa). (9cc - aa).. (nncc - aa)$ alſo auch $T = cc.$

$$\left(1 - \frac{aa}{cc}\right). 4cc. \left(1 - \frac{aa}{4cc}\right). 9cc.$$

$$\left(1 - \frac{aa}{9cc}\right) \ldots nncc. \left(1 - \frac{aa}{nncc}\right)$$ oder

T =

$$T = c^{2n}.\ 1.\ 4.\ 9.\ \ldots nn.\left(1 - \frac{aa}{cc}\right).$$
$$\left(1 - \frac{aa}{4cc}\right).\left(1 - \frac{aa}{9cc}\right)\ldots\left(1 - \frac{aa}{nncc}\right).$$

Setzt man in dieſem Werthe von T; $1.\ 2.\ 3\ldots (2n+1)$ ſtatt $c^{2n}.\ 1.\ 4.\ 9.\ \ldots nn$ (VI) ſo erhält man aus (IIII)

$$S = \left(1 - \frac{aa}{cc}\right).\left(1 - \frac{aa}{4cc}\right).\left(1 - \frac{aa}{9cc}\right)$$
$$\ldots\left(1 - \frac{aa}{nncc}\right)$$

VIII. Zweyter Fall. Wenn n ungerade, alſo das untere Zeichen gilt. Da iſt aus (IIII) $- S.\ 1.\ 2.\ 3.\ldots (2n+1) = 1.\ 2.\ldots (2n+1) + 4.\ 5.\ldots (2n+1)\ a^2 \ldots + a^{2n}$ wo ich das, was zur rechten Seite des Gleichheitszeichens ſteht, zuſammen V nennen will. Nun entſteht V wie vorhin T; aus einer ungeraden Zahl von n Factoren $(aa - cc).\ (aa - 4cc) \ldots (a^2 - nnc^2)$ deren letzte Theile als eine ungerade Menge verneinter Factoren, das Product $-c^{2n}.\ 1.\ 4.\ldots nn$ geben, welches wie das ähnliche Product bey T vorhin, hier $= - 1.\ 2.\ldots 2n+1$ ſeyn muß. Weil ferner die Menge der Factoren aus denen V entſteht, ungerade iſt, ſo iſt, wenn man jedes entgegengeſetzten nimmt, ihr Product $(cc - aa).\ (4cc - aa)\ldots (nncc - aa)$

$aa) = -V$ oder $cc.\left(1-\frac{aa}{cc}\right).4.cc.$
$\left(1-\frac{aa}{4cc}\right)\ldots nncc.\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder
$+c^{2n}.1.4.9\ldots nn.\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots$
$\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder $+1.2.\ldots(2n+1).$
$\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{nnc^2}\right) = -V =$
$+S.1.2.\ldots(2n+1)$; alſo wieder $S =$
$\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$

X. Es iſt alſo überhaupt des Bogens a Sinus $= a.\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{a^2}{4c^2}\right).$
$\left(1-\frac{a^2}{9c^2}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2c^2}\right)$

337. Anm. I. Ich habe hier eine Erfindung Joh. Bernoullis Op. T. IIII. n. 152. vorgetragen, obwohl mit einigen Aenderungen; beſonders wird, was ich (338; V.) von der Zahl der Wurzeln geſagt habe, eine Schwürigkeit heben, die ſich der Erfinder a. a. O. Schol. 2. ohne Noth macht, ob nähmlich die Gleichungen, wie bey mir $T = 0$; $V = 0$; ſind, auch noch andere Wurzeln als die angegebenen haben könnten. Anwendungen findet man a. a. O. und beym Euler;

ler; de Summis ſerier. reciprocarum Comm. Acad. Petrop. T. VII. p. 124. Euler hat dieſen Ausdruck des Sinus aus andern Gründen hergeleitet Introd. in Anal. inf. L. I. §. 158.

II. Daß $y = 0$ wird, wenn der Bogen $\pm c$; $\pm 2c$; u. ſ. w. iſt, hängt mit den Begriffen der Trigonometrie ſo zuſammen. Wenn in der Trigonometrie 1 Fig. DE des Bogens AD Sinus iſt, ſo iſt FE = − DE der Sinus des Bogens AF welcher dem AD entgegengeſetzt, alſo = − AD iſt. Der Bogen, der vom Anfange von welchem die Bogen gerechnet werden, nicht nach der Seite nach der man die Bogen ordentlich nimmt, ſondern nach der entgegengeſetzten genommen wird, iſt verneint. Dergleichen wäre in der Ekliptik ein Bogen von 0 ♈ unmittelbar durch das Zeichen ♓ durch; dieſer Bogen wäre nicht + 30 Gr. ſondern − 30 Gr. Ein ſolcher verneinter Bogen hat vermöge des Erwieſenen auch einen verneinten Sinus, der auſer dieſer Entgegenſetzung dem Sinus des bejahten gleich iſt. Folglich haben auch die Bogen $+c$; $-c$; oder Trig. 1 Fig. ADHB; AFhb; und eben ſo $+2c$; $-2c$; u. ſ. w. entgegengeſetzte, ſonſt gleiche Sinus. Weil aber die Sinus der bejahten von dieſen Bogen $+0$ ſind, und bejahte und verneinte 0 einerley ſind, ſo ſind dieſer Bogen Sinus alle $= 0$, und alſo wird $y = 0$ auch wenn man die verneinten Vielfache des halben Umfanges ſtatt des Bogens ſetzt.

338. Aufg. **Die Reihe für den Coſinus (296) in Factoren zu zerfällen. Ich will dieſe Reihe S heiſſen; daß alſo a. a. O. $x = S$ iſt.**

Aufl. I. Es iſt $x = 0$; für $a = \frac{1}{2}c$; $\frac{3}{2}c$; $\frac{5}{2}c \ldots \frac{2n-1}{2}c$ wo n unendlich iſt; und eben

ſo für eben dieſelben verneinten Werthe; weil die Reihe lauter Potenzen gerader Exponenten des Bogens enthält. Eben das erhellt auch aus einer Betrachtung wie in 340. daß alſo die Gleichung $S = 0$; $2n$ Wurzeln, oder n Paare entgegengeſetzter ſonſt gleicher Wurzeln hat. Alles dieſes folgt aus Schlüſſen wie 338; III; V;

II. Aus der Urſache (338; IIII.), mache man $1.2.3\ldots 2n.\ S = +\ 1.2.3\ldots 2n - 3.4\ldots 2n.\ a^2 \ldots\ldots \pm a^{2n} = T$ wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem n gerade oder ungerade iſt.

III. Es ſey n gerade; ſo iſt (wie in 338; V) $T = (a^2 - \frac{1}{4}c^2).\ (a^2 - \frac{9}{4}c^2) \ldots\ldots \left(a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2\right)$. Das Product aus den letzten Theilen aller dieſer Factoren, iſt $= \left(\frac{c}{2}\right)^{2.n} \cdot 1.9.25\ldots(2n-1)^2 = 1.2.3\ldots\ldots 2n$ (wie in 338; VI) Es iſt aber auch (wie in 338; VII.) $T = (1.\frac{1}{4}c^2 - a^2).\ (9.\frac{1}{4}c^2 - a^2)\ldots\ldots((2n-1)^2.\frac{1}{4}c^2 - a^2) = \frac{1}{4}c^2\ 1.\left(1 - \frac{4a^2}{cc}\right).\ \frac{1}{4}c^2.\ 9.\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right)\ldots\ldots$ $\frac{1}{4}c^2.\ (2n-1)^2.\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right) =$

$\left(\frac{c}{4}\right)$

$$\left(\frac{c}{4}\right)^{2n} \cdot 1.\,9 \ldots (2n-1)^2 . \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 . c^2}\right)$$

Setzt man hier $1.\,2.\,3 \ldots 2n$ ſtatt des Factors $(\frac{1}{4}cc)^{2n} . 1.\,9 \ldots (2n-1)^2$ ſo erhält man S oder $x = \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right) . \left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right) .$

$$\left(1 - \frac{4a^2}{25c^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right).$$

IIII. Für ein ungerades n; iſt

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4.\,3.\,2}a^4 \ldots\ldots - \frac{1}{2n.\,(2n-1) \ldots 1} a^{2n}$$

(296) alſo $-\,1.\,2.\,3 \ldots 2n . S = -\,1.\,2.\,3 \ldots 2n + 3 \ldots 2n\,a^2 - 5 \ldots 2n\,a^4 \ldots + a^{2n} = V$

Hier iſt $V = (a^2 - \frac{1}{4}c^2) . (a^2 - \frac{9}{4}c^2) \ldots (a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2)$ in ungerader Zahl Alſo

$$-V = (\tfrac{1}{4}c^2 - a^2) . (\tfrac{9}{4}c^2 - a^2) \ldots \left(\frac{(2n-1)^2}{4} c^2 - a^2\right) = \tfrac{1}{4}c^2 . \left(1 - \frac{4a^2}{c^2}\right) . \tfrac{9}{4}c^2 . \left(1 - \right.$$

 4a²)

$$\frac{4a^2}{9c^2}\Big) \dots \frac{(2n-1)^2}{4}c^2.\Big(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\Big)$$

$$= 1.2.\dots.(2n-1)^2.\left(\frac{c^2}{4}\right)^n.\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right)\dots\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right)$$

Nun iſt $1.2.(2n-1)^2.\left(\frac{c^2}{4}\right)^n$ = dem Gegentheile, (weil n ungerade iſt) von $-\frac{1}{4}c^2. -\frac{9}{4}c^2 \dots - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2$ oder dem Gegentheile des letzten Gliedes der Gleichung $V = 0$; (Nr. 219) alſo $= + 1.2.3.\dots.2n$ Folglich $-$

$$V = + 1.2.3.\dots 2n\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right)\dots\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right)$$

Aber $-V = + 1.2.3\dots 2n.S.$ alſo $+$

$$S = +\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right)\left(\frac{1-4a^2}{9c^2}\right)\dots\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right)$$

Wie für das gerade n.

$$V.\ \frac{x}{\frac{1-2a}{c}} = \left(1+\frac{2a}{c}\right).\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right).\left(1-\right.$$

$\frac{4a^2}{9c^2}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\Big)$

Aber $\frac{x}{1 - \frac{2a}{c}} = \frac{\frac{1}{2}cx}{\frac{1}{2}c - a} = \frac{\frac{1}{2}c.\,\mathrm{coſ}\,a}{\frac{1}{2}c - a} =$

$= \frac{\frac{1}{2}c.\,\sin(\frac{1}{2}c - a)}{\frac{1}{2}c - a} = \frac{\frac{1}{2}c.\,\sin b}{b}$; Wenn $\frac{1}{2}c$ $- a = b$. Nun iſt $\frac{\sin b}{b} = 1$ für $b = 0$ oder $c = 2a$; (283) da denn $\frac{4a^2}{(2n-1)^2.c^2} = \frac{1}{(2n-1)^2}$ und $\frac{1}{2}c.\,\frac{\sin b}{b}$ oder $\frac{1}{2}c = (1+1).$ $(1 - \frac{1}{9}).(1 - \frac{1}{25}) \ldots \Big(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\Big)$ alſo $\frac{1}{4}c = (1 - \frac{1}{9}).(1 - \frac{1}{25}) \ldots$

339. Aus dieſen Zerfällungen folgt

I Aus der 336 Weil $\sin a = a.\,S$, ſo iſt (330) $\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = a\sqrt{-1}.S$; Es ſey $a\sqrt{-1} = x$ alſo $a^2 = -x^2$ ſo iſt $\frac{e^x - e^x}{2}$ $= x.\Big(1 + \frac{x^2}{c^2}\Big).\Big(1 + \frac{x^2}{4c^2}\Big).\Big(1 + \frac{x^2}{9c^2}\Big).$ $\Big(1 + \frac{x^2}{n^2c^2}\Big)$ oder auch, wenn der erſte Aus-

druck für S, im Anfange von 336 gebraucht wird:

$$e^x - e^{-x} = x. \left(1 + \frac{1}{1.2.3} x^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} x^4 \ldots\ldots\right)$$ beydes wie beym Euler Introd. L. I. §. 156.

II Aus der 338. Weil nun coſ a = S; ſo iſt (330) $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = S$; alſo wenn $x = a\sqrt{-1}$ und $x^2 = -a^2$ und $a = -x\sqrt{-1}$; $a^2 = -x^2$

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{4x^2}{c^2}\right).\left(1 + \frac{4x^2}{9c^2}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2 c^2}\right)$$ oder (296) $= 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4.3.2} + \frac{x^6}{6.5.4.3.2} + \frac{x^8}{8.7.6.5.4.3.2} \ldots\ldots\right)$ wo alle Glieder der Reihe 296 das Zeichen + bekommen.

Wie die Logarithmen der trigonometriſchen Linien gefunden werden.

340. Aufg. Den hyperboliſchen Logarithmen des halben Umfangs zu finden.

Aufl.

Aufl. Aus (341) iſt er: $l\,4 + l\left(1 - \frac{1}{9}\right) + l\left(1 - \frac{1}{25}\right)\ldots$ Jeden dieſer Logarithmen findet man, wenn man in $l\,(1 - u)$ (223); nach und nach $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{49}$; ... ſtatt u ſetzt. Und weil die folgenden dieſer Brüche z. E. $\frac{1}{81}$ ... immer kleiner und kleiner werden, ſo nähert ſich die Reihe für $l\,(1 - u)$ bey jedem folgenden Bruche, ſchneller als bey dem nächſtvorhergehenden; und jede folgende Zahl wie $1 - \frac{1}{81}$ kömmt der Einheit näher als die nächſtvorhergehende, alſo ihr Logarithme dem 0; daher die folgenden Logarithmen immer kleiner als die vorhergehenden werden und die Reihe ſich nähert.

341. Aufg. Den Logarithmen eines Sinus und Coſinus zu finden.

Aufl I. Wenn man $a = \frac{mc}{2n}$ ſetzt, ſo iſt

II. Aus 338. X. $\sin \frac{mc}{2n} = \frac{mc}{2n}$.

$\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \ldots$ alſo l

$\sin \frac{m.c}{4.n} = lc + l\frac{m}{2n} + l\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right)$

$+ l\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \ldots$

$$\text{III. } 341.\ \cos\frac{mc}{2n} = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right).\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right).\left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right)\ldots\ldots$$ alſo

$$l\cos\frac{mc}{2n} = l\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right)\ldots$$

Weil nun $\frac{m}{2n}$ allemahl ein eigentlicher Bruch iſt, den man auch kleiner als $\frac{1}{2}$ annehmen kann, daß $\frac{m}{n} < 1$ wird, ſo findet man die Logarithmen des Sinus und des Coſinus wie in 343 und die Reihe der Logarithmen aus der jeder ſolcher Logarithme beſteht, nähert ſich wie dorten.

II. Aus dieſen Logarithmen hat man blos durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Tangenten und Secanten (Trig. 4. Erkl. 3. und 5. Zuſ. 5. Erkl. 1. Zuſ.) Und aus den hyperboliſchen finden ſich die briggiſchen nach (231).

III. Man kann die natürlichen Logarithmen auch durch ähnliche Zerfällungen der Reihen für die Tangenten und Secanten wie 338; 341; unmittelbar finden. Jmgleichen giebt es Vortheile, die Logarithmen der Sinuſſe noch kürzer als durch die unmittelbare Anwendung der Reihe für $l(1-x)$ zu finden.

Die-

Dieſes, welches mir die Weitläuftigkeit hier beyzubringen nicht verſtattet. findet man, nebſt wirklichen Berechnungen beym Euler Introd. L. I. Cap. XI. Zum Unglücke für diejenigen, welche die trigonometriſchen Tafeln berechnet haben, ſind alle dieſe Kunſtgriffe ohngefähr hundert Jahr darnach erfunden worden, als ſie mit ihrer Arbeit fertig waren.

Quadratur der Ellipſe. Von Rectification der Ellipſe und der Hyperbel. Rectification der Parabel.

342. Lehnſatz. Potenzen eines Coſinus, deren Exponent eine ganze bejahte Zahl iſt, durch Coſinus des vielfachen Bogens auszudrucken.

I) In An. endl. Gr. 175, ſey $b = \cos v$; $a = \sin v$; ſo iſt

II) $\cos 2.v = 2.b^2 - 1$ alſo $b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\cos 2.v$

III) $b^3 = 3.a^2.b + \cos 3.v$
$= 3.b - 3.b^3 + \cos 3.v$
alſo $b^3 = \frac{3}{4} b + \frac{1}{4}.\cos 3.v$

IV) $b^4 = 6.b^2 - 6.b^4 - (1 - b^2)^2 + \cos 4.v$
$8.b^4 = 8.b^2 - 1 + \cos 4.v$
$= 4 + 4.\cos 2.v - 1 + \cos 4.v$ (II)
alſo $b^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}.\cos 2.v + \frac{1}{8}.\cos 4.v$

V) $b^5 = 10.a^2.b^3 - 5.a^4.b + \cos 5.v$
$= \left.\begin{matrix}10\\+10\end{matrix}\right\}.b^3 - \left.\begin{matrix}10\\-5\end{matrix}\right\}.b^5 - 5.b + \cos 5.v$

$$16.\ b^5 = 20.\ b^3 - 5.\ b + \mathrm{coſ}\ 5.\ v$$
$$= \left.\begin{matrix} 15 \\ -\ 5 \end{matrix}\right\}\ b + 5.\ \mathrm{coſ}\ 3.\ v + \mathrm{coſ}\ 5.\ v$$
(aus III)

alſo $b^5 = \frac{5}{8}.\ b + \frac{5}{16}.\ \mathrm{coſ}\ 3.\ v + \frac{1}{16}.\ \mathrm{coſ}\ 5.\ v$

VI. Weiter fortzugehn darf man nur die Coſinus der vielfachen Bogen fortgeſetzt haben.

VII. Aus (An. endl. 177) hat man folgendes: In dem Ausdrucke von coſ n. v kann man den Sinus wegſchaffen, weil von ſelbigem lauter Potenzen von geraden Exponenten vorhanden ſind. ſo hat man coſ n. v durch lauter Potenzen von coſ v. Da kann man, wie vorhin gewieſen iſt, die höchſte Potenz allemahl durch Coſinus vielfacher von v ausdrucken.

343. Fläche der Ellipſe für Abſciſſe aus dem Mittelpuncte.

I. AMDK 38 Fig. iſt eine halbe Ellipſe, deren Mittelpunct C, halbe groſſe Axe = CA = CK = $\frac{1}{2}$ a halbe kleine CD = $\frac{1}{2}$ c; Abſciſſe aus dem Mittelpuncte CP = u; Ordinate PM = y $= \frac{c}{a}.\ \surd(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$ der Fläche CDMP Differential iſt = y. du.

Ueber dem Durchmeſſer AK ſey ein Halbkreis ANEK beſchrieben, deſſen Ordinate PN $= \frac{a}{c}.\ y$,

der

der Fläche CENP Differential $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}\,du$.

So verhalten ſich die Differentiale der Kreisfläche und der elliptiſchen $= a:c$, dieſe Verhältniß bleibt für jedes Paar zuſammengehörige Differentiale ungeändert, alſo iſt $a:c = CENP : CDMP$, oder die elliptiſche Fläche $= \frac{c}{a} \cdot CENP$.

Man ziehe CN, und nenne den Winkel ECN $= \delta$.

So iſt $\frac{2.u}{a} = \sin\delta$; $\frac{2.\,du}{a} = d\sin\delta$; $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)} = \frac{1}{2}a.\sqrt{\left(1 - \frac{4u^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{2}a.\cos\delta$

Alſo der Kreisfläche Differential $= \frac{1}{4}a^2.\cos\delta.\,d\sin\delta$ davon nach (274) das Integral die Kreisfläche CENP $= \frac{1}{16}a^2.(2.\delta + \sin 2\delta)$. Folglich die elliptiſche CDMP $= \frac{a.c}{16}.(2.\delta + \sin 2.\delta)$

Für jedes u leicht zu berechnen.

Für $u = \frac{1}{2}a$ iſt $\delta = 90°$ und der elliptiſche Quadrant CDMA $= \frac{a.c.\pi}{16}$

Alſo die Fläche der ganzen Ellipſe $= \frac{a.c.\pi}{4}$

So groß als die Fläche eines Kreiſes deſſen Durchmeſſer

meſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen beyden Axen wäre.

Wenn man vom Quadranten die Fläche CDMP abzieht, ſo bleibt die Fläche AMP.

344. Ausſchnitt aus dem Brennpuncte.

Man nehme in der groſſen Axe einen Punct S; und ziehe SM; SN, ſo iſt

$$\text{Fläche } KDMP = \frac{c}{a} \cdot \text{Fläche } KENP$$

$$\Delta\, PMS = \frac{c}{a} \cdot \Delta\, PNS$$

Alſo auf jeder Seite die beyden Gröſſen die unter einander ſtehen addirt:

Der elliptiſche Ausſchnitt zwiſchen KS, SM, und dem Bogen KM $= \frac{c}{a}$ des Kreisausſchnittes zwiſchen KS, SN und dem Bogen KN

Der Kreisausſchnitt KSN, von der Fläche des Halbkreiſes abgezogen läſſt den Kreisausſchnitt ASN

Der elliptiſche Ausſchnitt KSM von der Fläche der halben Ellipſe abgezogen läſſt den elliptiſchen Ausſchnitt ASM.

Die Fläche der halben Ellipſe iſt $\frac{c}{a}$. Der Fläche des Halbkreiſes.

Alſo auch der elliptiſche Ausſchnitt ASM = $\frac{c}{a}$ des Kreisausſchnitts ASN.

Es

Es ſey CS = e, ſo iſt die Kreisfläche zwiſchen dem Bogen KN, und den geraden Linien KS, SN, = Ausſchnitt KCN + △ CNS = $\frac{1}{8}. a^2. (\frac{1}{2}\pi + \delta) + \frac{1}{4}. a. e. \cos \delta$

Alſo die elliptiſche Fläche zwiſchen dem Bogen KM und den geraden Linien KS, SM, = $\frac{1}{8}. a. c. (\frac{1}{2}\pi + \delta) + \frac{1}{4}. e. c. \cos \delta$ Sie mag = Z heiſſen.

Man nenne den Winkel KSM = ζ; ſo iſt

$$\tang \zeta = \frac{PM}{PS} = \frac{\frac{1}{2}. c. \cos \delta}{e - \frac{1}{2} a. \sin \delta}$$

Für jedes u; iſt der Winkel δ gegeben, durch ihn die elliptiſche Fläche KSM, und auch der Winkel KSM.

Wenn S der Brennpunct der Ellipſe iſt, und ein Planet in dieſer Ellipſe um die Sonne S geht, ſo heiſſt die Fläche ASM, mittlere Anomalie, und der Winkel ASM wahre Anomalie. (Aſtron. 245)

Für jede angenommene Abſciſſe aus dem Mittelpuncte, finden ſich alſo die beyden zuſammengehörigen Gröſſen.

Nach Keplers Entdeckung, verhält ſich die Fläche der ganzen Ellipſe, zur Fläche KSM, wie die ganze Umlaufszeit des Planeten, zu der welche er braucht von K bis M zu kommen. Die Bewegungen eines Planeten zu berechnen, nimmt man die Zeiten als gegeben an, und ſucht daraus

den

den Winkel KSM, welcher des Planeten helio- centriſchen Ort giebt (Aſtr. 259)

Lieſſe ſich alſo δ aus der Gleichung zwiſchen Z und δ finden, ſo gäbe ſich ζ durch δ.

Aber das erſte läſſt ſich nicht bewerkſtelligen, weil in genannter Gleichung, Winkel und Coſi- nus vorhanden ſind, und eines durch das andere ſich nicht algebraiſch ausdrucken läſſt.

Aus tang ζ lieſſe ſich ſin δ finden, alſo könnte man den Winkel KSM annehmen, und daraus die Fläche berechnen. Das wäre die Frage um- gekehrt.

Wäre auch KDM ein Halbkreis, deſſen Mit- telpunct C; ein Punct auſer ihm S, ſo bliebe in den Gleichungen für Z und tang ζ, noch c, nur wäre c = a; Alſo lieſſe ſich auch der Winkel KSM nicht wohl aus der Fläche finden, wenn man gleich annähme der Planet ginge in einem eccentriſchen Kreiſe, und beſchriebe in gleichen Zei- ten gleiche Räume um den Punct S.

Das hieſſe: Im Kreiſe einen Raum KSM abzuſchneiden, der ſich wie die Zeit verhält, oder: Den Kreis aus S in gegebner Verhältniß theilen.

Zu Auflöſung dieſer Aufgabe ermuntert Kep- ler die Geometern, am Ende des IV. Theils ſei- nes Buchs, de motibus ſtellae Martis; p. 300. Mihi ſufficit credere ſolui a priori non poſſe propter arcus et ſinus ἑτερογενειαν ſagt er;

Daher

Daher heiſſt man die Aufgabe: Im Kreiſe, oder in der Ellipſe, aus mittlerer Anomalie die wahre zu finden, die kepleriſche.

Den erſten beyden Ausgaben gegenwärtigen Buchs fügte ich eine Auflöſung derſelben bey, nach Eulers Theoria motuum planetarum, et cometarum Berol. 1744; Man hat auch: Leonh. Eulers Theorie der Planeten und Cometen, von Joh. Freyh. v. Paccaſſi überſetzt, und mit einem Anhange und Tafeln vermehrt. Wien 1781.

Gewöhnlich rechnet man die Anomalien von der Sonnenferne K. Euler wollte ſeine Vorſchriften ſo einrichten daß ſie ſogleich auch für Kometen dienten, und rechnete von der Sonnennähe A; braucht alſo ASM ſtatt KSM; Es iſt leicht einzuſehn wie eins aus dem andern hergeleitet wird.

Auch braucht er nicht der Ellipſe kleine Axe, ſondern groſſe, und Parameter. Die groſſe unendlich geſetzt giebt dann die Parabel.

Wer ſich mit Aſtronomie beſchäfftiget muß doch mehr Methoden als Eulers ſeine kennen lernen, ich habe daher jetzo weggelaſſen, was blos als Uebung der Rechnung des Unendlichen, auſer der Wiſſenſchaft wo es eigentlich gebraucht wird, zu viel Raum einnahm. Man ſ. la Lande Aſtronomie L. VI. 1237... der II. Ausg.

345. **Ausdruck der Fläche ASM = Z durch den Winkel ASM, der nun v heiſſen mag.**

I. Die Eccentricität $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ wird klein genommen, daß höhere Potenzen von ihr

immer

immer weniger betragen. Die gerade Linie SM radius vector (Aſtr. 240) heiſſe $z = \frac{1}{2}. a - \frac{2. e. u}{a}$ (An. endl. 378) aber $e - u = z. \cos v$,

daraus $z = \frac{a^2 - 4. e^2}{2. a - 4. e. \cos v}$

II. Wenn der Winkel um $MSm = dv$ wächſt, ſo wächſt die Fläche um MSm. MR, ein Bogen mit z beſchrieben, alſo $= z. dv$ kann als ein Perpendikel auf Sm angeſehen werden; die Dreyecke mRM, SRM verhalten ſich $= mR : RS$ das erſte verſchwindet alſo gegen das letzte, ſo iſt das Dreyeck $SRM = \frac{1}{2}. z^2. dv$ die Aenderung der Fläche, folglich $dZ =$

$$\left(\frac{a^2 - 4. e^2}{2. a - 4. e. \cos v}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}. dv$$

III. Man ſetze die halbe groſſe Axe $= \frac{1}{2} a = 1$, ſo iſt e ein kleiner Bruch dieſer Einheit;

$z = \frac{1 - e^2}{1 - e. \cos v}$; $dZ = \frac{1}{2}. (1 - e^2)^2.$

$\frac{1}{(1 - e. \cos v)^2} \cdot dv$ Man darf da nur den zweyten veränderlichen Factor integriren, und das Integral mit $\frac{1}{2}. (1 - e^2)^2$ multipliciren.

Man macht $(1 - e. \cos v)^{2n}$. Bey den Potenzen von e. cos v deren . .

Expo-

Exponenten	1	2	3	4	5 . . . . .
Binomialcoefficienten	A	B	C	D	E . . . . .

So iſt $A = -2$; $B = \frac{-2. -3}{1. 2} = +3$

$C = +3. \frac{-4}{3} = -4$; $D = -4. \frac{-5}{4} = +5$

So ſind die Coefficienten, die nach einander folgenden ganzen Zahlen, abwechſelnd verneint und bejaht; jeder verneinte gehört zu einer Potenz von (— e. coſ v) deren Exponent ungerad iſt, jeder bejahte zu einer deren Exponent gerad iſt, das Product aus dem Coefficienten in die Potenz iſt alſo allemahl bejaht, und ſo kömmt

$(1 - e. \cos v)^{-2} =$

$1 + 2. e. \cos v + 3. e^2. (\cos v)^2 + 4. e^3. (\cos v)^3$
$. . . + 2. n. e^{2. n-1}. (\cos v)^{2. n-1}. . . .$

Wäre $e = \frac{1}{2}$, ſo wären in die Potenzen des Coſinus nach der Ordnung multiplicirt: 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{16}$; u. ſ. w. Brüche die abnehmen.

Nun iſt in der Anwendung auf die Planeten, e viel kleiner als $\frac{1}{2}$; folglich nehmen die Brüche welche in die Potenzen des Coſinus multiplicirt ſind, viel ſchneller ab, und die Reihe nähert ſich, auch wenn coſ v = 1 wäre, noch viel ſchneller wenn der Coſinus ein Bruch iſt, obgleich die Binomialcoefficienten wachſen.

V. In dieſer Reihe ſchaffe man die Potenzen des Coſinus, vermöge des Lehnſatzes (342)

durch die Coſinus der vielfachen Bogen weg, und ſchreibe in eine Columne, was entweder in 1 oder in den Coſinus von einerley vielfachen multiplicirt iſt ſo kömmt

$$\begin{array}{l} 1 \\ + \frac{3}{2} e^2 \\ + \frac{15}{8} . e^4 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} + 2. e. \\ + 3. e^3 \end{array}\right\} . \cos v \quad \left.\begin{array}{l} + \frac{3}{2}. e^2 \\ + \frac{5}{2}. e^4 \end{array}\right\} . \cos 2.v$$

$$+ e^3 . \cos 3. v + \frac{5}{8}. e^4 . \cos 4. v$$

VI. Eigentlich ſind in dieſen Columnen die unveränderlichen Gröſſen nicht vollſtändig vorhanden, denn der Coſinus eines Vielfachen durch eine gröſſere Zahl, giebt ſolche Gröſſen in die vorhergehenden Columnen. Aber was fehlt enthält die fünfte Potenz der Eccentricität oder noch höhere, und la Lande erinnert, dieſes ſey ſelbſt beym Merkur unbeträchtlich.

VII. $(\cos m. v). dv = \frac{1}{m} \cdot (\cos m. v). m. dv$

Davon iſt das Integral $= \frac{1}{m} \cdot \sin m. v.$

VIII. Wenn man alſo jedes Glied der Reihe (V) nach (VII) behandelt, ſo kömmt das Integral

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ + \frac{3}{2} e^2 \\ + \frac{15}{8}. e^4 \end{array}\right\} . v \quad \left.\begin{array}{l} + 2. e \\ + 3. e^3 \end{array}\right\} . \sin v$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{3}{4}. e^2 \\ + \frac{5}{4} e^4 \end{array}\right\} . \sin 2. v + \frac{1}{3}. e^3 . \sin 3. v$$

$$+ \frac{5}{32}. e^4 . \sin 4. v$$

IX.

IX. Dieſe Reihe heiſſe $= \mathfrak{R}$ mit $\frac{1}{2}. (1 - e^2)^2$ multiplicirt (III) giebt ſie Z.

La Lande Aſtronomie Liv. XXI; 3334 u. f. §. der II. Ausg. lehrt die Berechnung der Reihe (VIII).

X. Der Ellipſe kleine Axe iſt $= 2. \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - e^2)}$ alſo der Ellipſe ganze Fläche $=$

$\frac{a. \sqrt{(\frac{1}{4}. a^2 - e^2)}. \pi}{2}$ Die ganze Fläche des Kreiſes der a zum Durchmeſſer hat $= \frac{a^2. \pi}{4}$ ſo verhalten ſich die ganzen Flächen Ellipſe : Kreis $= 2. \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - e^2)} : a = \sqrt{(1 - \frac{4. e^2}{a^2})} : 1$ Setzt man $a = 2$ ſo iſt dieſe Verhältniß $= \sqrt{(1 - e^2)} : 1$

XI. Man ſtelle ſich vor, um C drehe ſich ein Halbmeſſer des Kreiſes KEA gleichförmig und mache ſo mit CK einen Winkel $= \omega$, der ſich in gleicher Zeit gleichviel ändert. Den Winkel miſſt ein Bogen $= \frac{1}{2}. a. \omega$ und ihm gehört ein Ausſchnitt des Kreiſes $= \frac{1}{8}. a^2. \omega = \frac{1}{2} \omega$ wenn $a = 2$.

XII. Man ſetze die ganzen Flächen der Ellipſe und des Kreiſes, ſollen ſich verhalten wie Z und der Ausſchnitt (XI) ſo kömmt $\sqrt{(1 - e^2)} : 1 = \frac{1}{2}. (1 - e^2)^2. \mathfrak{R} : \frac{1}{2} \omega$ alſo $\omega = (1 - e^2)^{3:2}. \mathfrak{R}$.

La Lande §. 3334; nennt z was ich ω heiſſe. Es iſt bey ihm: mittlere Anomalie.

XIII. $(1 - e^2)^{3:2} = 1 - \frac{3}{2}. e^2 + \frac{3}{8} e^4)$ höhere Potenzen werden weggelaſſen (VI)

XIV. Wenn man mit dieſem Factor multiplicirt, verändert ſich in der Reihe R folgendes.

Ihr erſtes Glied wird = 1 nähmlich davon bis auf die vierte Potenz der Eccentricität nicht unterſchieden.

Die Coefficienten werden

bey	ſin v	ſin 2. v
Coeff.	2. e	$\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4$

Beym Sinus des dreyfachen und vierfachen Bogens bleiben die Coefficienten ungeändert.

XV. Producte aus Differential eines Bogens in Potenzen des Sinus oder Coſinus, deren Exponenten ganze bejahte Zahlen ſind zu integriren lehret Euler Inſtit. Calc. Integral. C. V. §. 242, auch mehr zuſammengeſetzte Formeln zu integriren. Die Integrale werden durch Producte aus Potenzen von Sinuſſen und Coſinuſſen ausgedruckt. Euler erinnert §. 248 es ſey bequemer ſolche Producte in Sinus und Coſinus der vielfachen Bogen zu verwandeln, und giebt die dazu nöthige Anleitung im VI. Cap. dieſes Buchs 270 u. f. §.

Dieſe weitläuftigen Rechnungen fanden in meinem Buche nicht Platz, doch einigermaaſſen zu zeigen wie die Anomalien durch Sinus vielfacher Winkel ausgedruckt werden folgte ich la Lande, und brachte die Sache auf den Lehnſatz.

346.

346. Ueber die Rectification der Ellipſe.

I) Für die Ellipſe (An. endl. 368) iſt dy $= \frac{-c. u. du}{a. \surd (\frac{1}{4} a^2 - u^2)}$ Daher ein Product aus der groſſen Axe in das Differential der Länge a. ds $= du. \surd \left(\frac{\frac{1}{4} a^4 - (a^2 - e^2). u^2}{\frac{1}{4} a^2 - u^2} \right)$

II) Man kann die Quadratwurzel rechter Hand in eine Reihe verwandeln und ſo die Länge durch eine Reihe ausdrucken die nach Potenzen von u fortgeht.

Was hinter dem Wurzelzeichen ſteht iſt =

$$\frac{a^2 - \left(\frac{4. e}{a}\right)^2 . u^2}{1 - \frac{4. u^2}{a^2}}$$

(An. endl. 376) $= a^2 - \left(\frac{4. e}{a}\right)^2 . u^2 .$ $\left(1 + \frac{4. u^2}{a^2} \ldots . \right) = a^2 + \left(4 - \left(\frac{4. e}{a}\right)^2\right) . u^2 . \ldots$

Daraus die Wurzel

$$a + \left(4 - \left(\frac{4. e}{a}\right)^2\right) . \frac{u^2}{2. a} \ldots .$$

Folglich a. s =

$$a. u + \left(4 - \left(\frac{4. e}{a}\right)^2\right) \cdot \frac{u^3}{6. a} \ldots.$$

Die Berechnung dieſer Reihe wird mühſam ſeyn, für groſſe Bogen da u nahe an $\frac{1}{2}$ a kömmt, wird ſie ſich langſam nähern.

III) Coniectura Phyſica circa propagationem ſoni ac luminis, vna cum aliis diſſertationibus analyticis: de numeris amicabilibus, de natura aequationum ac de rectificatione ellipſis Auct. Leonh. Eulero Berol. 1750.

Im Anfange der letzten Abhandlung erinnert Euler, es ſey ſchon ſo mannichfaltig vergebens verſucht worden, daß man nicht erwarten dürfe elliptiſche Bogen mit geraden Linien, nicht einmahl mit Bogen vom Kreiſe oder der Parabel zu vergleichen. Das Differential des elliptiſchen Bogens, laſſe ſich nicht rational machen, das zeige an, die Rectification laſſe ſich nicht auf Kreis oder Hyperbel bringen. Indeſſen gebe es krumme Linien die keine unbeſtimmte Rectification zulaſſen aber beſtimmte Theile haben wo Rectification ſtatt findet. Euler wollte alſo dergleichen auch bey der Ellipſe ſuchen, ob ſich etwa ihr ganzer Umfang durch endliche Ausdrücke, allenfalls durch Kreisbogen oder Logarithmen angeben lieſſe. Er iſt hierinn nicht glücklich geweſen, dabey aber auf ſonderbare Phänomenen wie er es nennt gekommen,

men, wodurch die Theorie der krummen Linien beträchtlichen Zuwachs zu erhalten ſcheint. Der letzte 61. §. lehrt den Umfang einer Ellipſe der Wahrheit nah berechnen.

IV) De calculo integralium exercitatio mathematica, Petri Ferronii.... in Piſano Lyceo Mathem. Prof.... 1792. Enthält auſer dem was zum eigentlichen Gegenſtande gehört, eine Menge lehrreicher literariſcher und ſonſt unterhaltender Bemerkungen. Die Abhandlung betrifft Urſprung der Differentiale welche auf Rectification elliptiſcher oder hyperboliſcher Bogen ankommen. Er betrachtet die Fläche eines ſenkrechten ſchief geſchnittenen Cylinders, ſie befindet ſich zwiſchen der noch vorhandenen Grundfläche, dem Kreiſe, und dem ſchiefen Schnitte, der Ellipſe. Uebrigens lehrt er von der Rectification der Ellipſe ſo wenig befriedigendes als Andre.

V) Seitdem man die Erde für ein elliptiſches Sphäroid annimmt, ſind bey ihr die Gröſſen von Aequator und Meridian unterſchieden; jener bleibt ein Kreis, dieſer iſt eine Ellipſe. Nun kann man doch wohl nach des Meridians Umfange fragen; Und das ſetzte Rectification der Ellipſe zum Voraus, die noch nicht vollendet iſt.

Man hat ſich dabey folgendergeſtalt verhalten: Bekanntlich beſtimmt man die Verhältniß der Axen der Ellipſe aus zween gemeſſenen Graden, oder aus mehren Meſſungen durch Verglei-

chung hergeleitet. (Geogr. 18) Gemeſſene Grade geben alsdann die Gröſſe der Axen; und man berechnet nun aus den gemeſſenen Graden, wie groß Grade in den geographiſchen Breiten ſeyn müſſen wo man nicht gemeſſen hat. Iſt ſolchergeſtalt eine Tafel für jeden Grad in jeder geographiſchen Breite berechnet, ſo addirt man dieſe 90 Grade, und nimmt ihre Summe für den Quadranten des Meridians. Selbſt, weil aneinander gränzende Grade nur wenig unterſchieden ſind, berechnet man wohl nur die Grade für Aenderungen der Breiten von fünf zu fünf Graden, und findet daraus den Quadranten oder den ganzen Umfang der Erde. So verhält ſich Lulof's, Kenntniß der Erdkugel; 36. §. 55. S. Er braucht Maupertuis Meſſung.

Ich brauche nicht umſtändlich anzuzeigen, wie tief dieſes Verfahren unter Rectification der Ellipſe iſt.

VI) Für die Hyperbel iſt (An. endl. 402)

$$dy = \frac{+ c.u.du}{a.\sqrt{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)}}$$

$$a.ds = \sqrt{\left(\frac{(a^2 + c^2).u^2 - \frac{1}{4}a^4}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)}.du$$

Man ſieht hie eben die Schwierigkeit zu integriren wie bey der Ellipſe, nicht einmahl iſt die Reihe hie brauchbar.

Recti-

Rectification der Parabel.

347. Die apolloniſche Parabel, deren Parameter = a iſt, zu rectiſiciren.

I) Weil für ſie $dx = \frac{2.y}{a}. dy$ (84) ſo iſt

$$ds = dy. \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)}.$$

Man ſetze den Parameter = 1, alſo $ds = dy. \sqrt{(1 + 4.y^2)}$

In 320. VI. ſetze man

dorten	z^2	$\frac{1}{4} a^2$
hie	$4.y^2$	1

ſo integrirt man gegenwärtiges Differential aus dem dortigen.

Ich will aber die Integration ohne Beziehung auf die Sätze von der Hyperbel lehren. Ich brauche dabey Zerlegung eines Bruchs die erſt weiter unten im Zuſammenhange gelehrt wird, aber auch hie kann dargethan werden.

II) Man ſetze tang $\varphi = 2.y$ alſo $dy = \frac{1}{2}.$ d tang φ; ſo iſt
$2.ds = d$ tang φ. ſec φ (Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.)

III) Nun tang φ = ſin φ. ſec φ; alſo
d tang φ = ſec φ. d ſin φ + ſin φ. d ſec φ

und

$2.ds$ = ſec φ^2. d ſin φ + ſin φ. ſec φ. d ſec φ

 IV)

IV) Der letzte Theil rechter Hand, iſt ein Product aus dem Sinus in das halbe Differential des Quadrats der Secante. Man zerlege alſo den erſten Theil in zwey Producte, jedes aus dem halben Quadrate der Secante in den Sinus, ſo hat man

$$2.\,ds = \tfrac{1}{2}.\,\sec\varphi^2.\,d\sin\varphi + \sin\varphi.\,\sec\varphi.\,d\sec\varphi + \tfrac{1}{2}.\,\sec\varphi^2.\,d\sin\varphi$$

V) Wenn man auf beyden Seiten mit 2 multiplicirt, und integrirt, kömmt

$$4.\,s = \sec\varphi^2.\,\sin\varphi + \int(\sec\varphi^2.\,d\sin\varphi)$$

Wo noch das Integral des letzten Theils rechter Hand zu finden iſt.

VI) Man nenne $\sin\varphi = \omega$; ſo iſt das Differential welches integrirt werden ſoll $= \dfrac{d\omega}{1-\omega^2}$ (Trig. a. a. O.)

Der Bruch $\dfrac{1}{1-\omega^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\omega} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\omega}$ wie die Rechnung beweiſt. Das Verfahren ſolche Zerlegungen von Brüchen zu finden wird An. Un. 358; allgemein gelehrt, und gegenwärtiges iſt ein beſondrer Fall des Exempels daſ. 359.

VII) Alſo iſt das Differential

$$= \frac{\frac{1}{2}.\,d\omega}{1+\omega} + \frac{\frac{1}{2}.\,d\omega}{1-\omega};$$

VIII) Jeder dieſer beyden Theile iſt die Hälfte des Differentials eines natürlichen Logarithmen (An.

(An. Un. 225; der erſte Theil deſſen von $1 + \omega$, der zweyte Theil, das entgegengeſetzte deſſen von $1 - \omega$

IX) Alſo ſind der beyden Theile Integrale zuſammen $\frac{1}{2}. \log (1 + \omega) - \frac{1}{2} \log (1 - \omega)$

$$= \frac{1}{2}. \log \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{1}{2}. \log \frac{(1+\omega)^2}{1-\omega^2}$$

$$= \log \frac{1+\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$$

X) Nun iſt (VI) $\omega = \frac{2. y}{\sqrt{(1 + 4y^2)}}$

$1 + \omega = 2. y + \sqrt{(1 + 4 y^2)}$; folglich das Integral in (IX) oder das Integral des letzten Theils rechter Hand in (V) $= \log (2. y + \sqrt{(1 + 4 y^2)})$

XI) Der erſte Theil rechter Hand in (V) iſt

$$= (1 + 4 y^2). \frac{2. y}{\sqrt{(1 + 4 y^2)}}$$

$$= 2. y. \sqrt{(1 + 4 y^2)}$$

XII) Alſo die beyden Gröſſen (XI; X;) gebraucht und in (V) auf beyden Seiten mit 4 dividirt, kömmt die Länge des paraboliſchen Bogens, ſo genommen daß ſie im Scheitel anfängt, folglich für $y = 0$ verſchwindet.

$$s = \frac{1}{2}. y. \sqrt{(1 + 4 y^2)} + \frac{1}{4}. \log (2. y + \sqrt{(1 + 4. y^2)})$$

XIII.

XIII. Oder, wenn man den Parameter wiederum herſtellt (I)

$$s = \tfrac{1}{2}.\ y.\ \sqrt{\left(1 + \frac{4.\ y^2}{a^2}\right)} + \tfrac{1}{4}.\ a.\ \log \left(\frac{2.\ y}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{4 y^2}{a^2}\right)}\right)$$

Die Wiederherſtellung beruht darauf: Die Länge des Bogens ſoll einer geraden Linie gleich ſeyn. Nun hatte man den Parameter = 1 geſetzt zum Maaſſe der Linien angenommen, und ſo war y eine Zahl. Bedeutet y wiederum eine Linie, ſo iſt der erſte Theil rechter Hand, wie er da ausgedruckt iſt, eine Linie.

Logarithme gehört einer Zahl zu, alſo muß man hinter dem Zeichen des Logarithmen, ſtatt y welches nur eine Zahl bedeutet wenn a = 1; jetzo $\frac{y}{a}$ ſchreiben. Ferner, da der Logarithme ſelbſt eine Zahl iſt, muß man mit ihm die Linie multipliciren, die vorhin = 1 geſetzt war. So wird hie die Gleichheit der Abmeſſungen erhalten (Geom. 66. Satz)

XIV) In (XIII) iſt der erſte Theil des Integrals, eine algebraiſche Function von y; (An. endl. Gr. 571) der zweyte, tranſcendentiſch, wenn zwiſchen einer Gröſſe die durch y algebraiſch gegeben iſt, und ihrem Logarithmen keine algebraiſche Gleichung ſtatt findet (332; XII)

XV)

XV) Zu Abkürzung der Rechnung, dient in (XII) den Winkel (II) wiederum einzuführen bequemen Gebrauch davon giebt folgendes:

XVI) Lehnſatz. Summe der Tangente und Secante eines Winkels iſt = der Tangente von 45° + der Hälfte des Winkels

Analyſis: $\text{ſec}\, k + \text{tang}\, k = \frac{1 + \text{ſin}\, k}{\text{coſ}\, k}$.
Man ſetze $k = 90° - \zeta$ ſo iſt dieſe Summe = $\frac{1 + \text{coſ}\, \zeta}{\text{ſin}\, \zeta}$ das iſt (Trig. 19 S. 9. Zuſ.) =
$\frac{2.(\text{coſ}\, \frac{1}{2}\zeta)^2}{\text{ſin}\, \zeta} = \cot \frac{1}{2}\zeta = \cot(45° - \frac{1}{2}k) =$
$\text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}k)$

Exempel $k = 30°$; $45° + \frac{1}{2}k = 60°$
ſec 30° = 1,1547005
tang 30° = 0,5773503
tang 60° = 1,7320508

So giebt Kepler de motib. ſtellae Martis p. 211. ſec 89 Gr. + tang 89 Gr. = cot 30 M. Man ſehe hievon meiner geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 30. Abh. 64. wo Gebrauch dieſes Satzes gezeigt wird.

Warum aus ihm nicht folgt ſec 90° + tang 90° = tang 90°, weiſe ich im Archiv der reinen und angewandten Mathematik VI. Heft (J. 1797) 4. Art.

XVII)

XVII) So kömmt in (XII)

$s = \frac{1}{4}. (\text{tang}\ \varphi.\ \text{ſec}\ \varphi + \log\ \text{nat}\ \text{tang}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$

XVIII) Exempel. Man verlange die Länge des Bogens, bis über das Ende der Abſciſſe, die hundertmahl ſo lang iſt als der Parameter. Alſo

$x = 100;\ y = 10,\ \text{tang}\ \varphi = 20$

$10 + \log\ \text{brigg}\ 20 = 11,3010300$ giebt

φ =	87 Gr	8 M	13 S
Die Ergänzung =	2	31	45
Die Hälfte =	43	34	7,5
$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$ =	88	34	7,5

$\log\ \text{brigg tang}\ \varphi = 11,3010300$

$-\log\ \text{brigg coſ}\ \varphi = -\ 8,6984422$

$2,6025978$

gehört zu 400,495

XIX) Nun muß man den natürlichen Logarithmen von tang (88° 34′ 7,″5) ſuchen. Ich brauche die Logarithmen in Schulzens Tafeln (234; XVII)

XX) Hie nun verlangt man log nat tang (88 Gr 34 M 7,5 S), das heiſſt alſo in den Tafeln log hyp tang 1 Gr 25 M 52,5 S.

Die Bogen gehn in den Tafeln da, von 10 zu 10 Secunden. Man kann alſo bequem Proportionaltheile nehmen. Es iſt da

log hyp tang (1 Gr 25 M 50 S) = 3,68995632

Proportionaltheil abzuziehn = 46016

log hyp tang (1° 25′ 52″ 5) = 3,68949616

XXI)

XXI) Alſo

(XVIII) $\text{tang}\,\varphi.\ \text{ſec}\,\varphi = 400{,}495$

(XX) $\log\text{nat}\ \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) = 3{,}68949616$

Summe $= 404{,}184$

mit 4 dividirt giebt s $= 101{,}046$

XXII) Ich wollte hie den Gebrauch der trigonometriſchen Formel (XVII) zeigen. Ich füge noch bey, wie ich das Exempel ſchlechtweg nach (XII) berechnet habe.

XXIII) Es iſt alſo die geſuchte Länge $= 5.\sqrt{401} + \tfrac{1}{4}.\log(20 + \sqrt{401})$

Aus Röhls Tafeln im zweyten Bande von Schulzens Tafeln, iſt $\sqrt{401} = 20{,}0249844$; dazu ſoll 20 addirt werden, und der Summe natürlicher Logarithme genommen.

Ich ſuche mich Wolframs Tafeln zu bedienen, die im erſten Bande von Schulzens Tafeln ſtehn, (233; XI) und weil in denſelben ſo ſehr groſſe Zahlen nicht vorkommen, ſo brauche ich als die Summe, 40,03 welches etwas zu groß iſt. So iſt

$\log\text{nat}\ 4003 = 8{,}294799358992$

$\log 100 = 4{,}605170185988$

$\log 40{,}03 = 3{,}689629173004$

$\tfrac{1}{4}$ deſſelben $= 0{,}922407293$

dazu $5.\sqrt{401} = 100{,}1249220$

$s = 101{,}04739292\ldots$

Iſt

Iſt ein wenig zu groß, weil ich 40,03 gebraucht habe; Stimmt alſo genau genug mit (XXII) überein.

XXIV) Begreiflich kann man nach beyden Formeln das Geſuchte genauer finden, wenn man mehr Mühe im Rechnen anwenden will.

XXV) Die Sehne des paraboliſchen Bogens iſt allgemein =

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = y.\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)}$$

XXVI) Alſo im Exempel = 10. $\sqrt{101}$ = 100,498756

XXVII) Der Schenkel der Parabel nähert ſich immer mehr einem Gange mit der Axe parallel je weiter er ſich hinauszieht. Daraus erhellt daß er ſich ſo immer weniger und weniger krümmt, und ſeine Sehne immer weniger und weniger übertrifft.

XXVIII) Wenn y ſehr groß wird ſo iſt (XII) des Bogens Länge beynah = $y^2 + \frac{1}{4}.\log 4.y$ = $x + \frac{1}{4}\log \text{nat } 4.y$ Da wird auch der logarithmiſche Theil gegen den erſten unbeträchtlich.

XXIX) Exempel y = 10000, da x = 100 Millionen.

log nat 40 = 3,688879
log nat 1000 = 6,907755

10,596634

$\frac{1}{4}$ deſſen = 2,649158

welches gegen x ſehr unbeträchtlich iſt.

Aus

Aus XXVII. erhellt warum dieſer Bogen ſeine Abſciſſe ſo wenig übertrifft.

XXX) Der Sehne Winkel mit der Axe hat allemahl $\frac{1}{y}$ zur Tangente.

XXXI) Alſo in (XXIX) 0,0001. Dieſer Tangente briggiſcher Logarithme = 6; zeigt daß der Winkel zwiſchen 20 und 21 Secunden fällt.

Den Ausdruck des Differentials (I) rational zu machen.

XXXII) Was das heiſſt, erklärt (259), und ein Exempel davon giebt (257). Hie verfahre ich ſo:

XXXIII) Ich ſetze $\sqrt{(1 + 4.y^2)} = 1 + 2.u.y$, folglich $y^2 = u.y + u^2.y^2$ Daher $y = \frac{u}{1 - u^2}$, und die Quadratwurzel = $\frac{1 + u^2}{1 - u^2}$ Ferner $dy = \frac{(1 + u^2).du}{(1 - u^2)^2}$

Alſo $ds = \frac{(1 + u^2)^2\, du}{(1 - u^2)^3}$

XXXIV) Dieſes zu integriren gehören Kunſtgriffe die unten 357; 366; 387; 389... gelehrt werden. Wem ſie auch bekannt ſind, der wird

wird wohl nicht durch eine weitläuftige und műhſame Rechnung, erſt eine Gleichung zwiſchen s und u, und daraus eine zwiſchen s und y ſuchen, wenn er das Verfahren I – XII. brauchen kann.

348. I. In den vorigen Ausgaben hatte ich die Rectification der Parabel durch unendliche Reihen gewieſen. Ich will das weſentliche hie noch beyfügen.

II. Man verwandelt $\sqrt{(1+4y^2)}$ nach An. endl. Gr. in eine Reihe. Das dortige x iſt hie $= 4.y^2$. Die Reihe wird =

$$1 + 2.y^2 - 2.y^4 + 4.y^6 - 10.y^8 \ldots$$

Jedes Glied mit dy multiplicirt und dann integrirt, giebt die Länge des Bogens

$$= y + \tfrac{2}{3}.y^3 - \tfrac{2}{5}.y^5 + \tfrac{4}{7}.y^7 - \tfrac{10}{9}.y^9 \ldots$$

Soll die Reihe ſich nähern ſo műſſen Ordinate und Abſciſſe, jede kleiner ſeyn als der Parameter. Und wenn ſie dem Parameter nahe kommen, nähert ſich die Reihe langſam.

III. Für ein groſſes y, druckt man vorläufig die Quadratwurzel ſo aus:

$$2y.\sqrt{\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)} = 2.y.\left(1+\frac{1}{8y^2}\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{8}.\frac{1}{16.y^4} + \tfrac{1}{16}.\frac{1}{64.y^6} \ldots\right)$$

IV. Wenn man der Reihe jedes Glied, mit 2. y. dy multiplicirt, und dann integrirt, kömmt die Länge des Bogens =

y² +

$$y^2 + \frac{1}{4} . \log y + \frac{1}{128 . y^2} - \frac{1}{4 . 8 . 64 . y^4} \ldots$$

V. Man kann fragen warum ſich bey dieſer Integration ein Logarithme zeigt, da bey der (II) keiner ſichtbar iſt? Das beantwortet ſich ſo.

Wenn y klein iſt ſo läſſt ſich die Gröſſe deren Logarithme da ſoll genommen werden, durch Näherung ſo ausdrucken

$1 + 2 . y + 2 . y^2 \ldots\ldots$

Man nenne u; alles was nach 1 folgt, ſo hat man log (1 + u) durch eine Reihe die nach u fortgeht (220) und ſo, wenn man u wiederum wegſchafft durch eine Reihe die nach y ſteigt.

Dieſe Reihe ſteckt alſo mit in der Reihe welche hie in (II) des Bogens Länge giebt.

Soll man den Logarithmen ſicher durch eine ſolche Reihe ausdrucken, ſo muß u kleiner als 1 ſeyn. Folglich y nicht ſo nahe an 1 daß u ſo groß oder gröſſer als 1 werden könnte.

Das ſtimmt mit der (II) gegebenen Erinnerung überein.

Iſt y groß, ſo läſſt ſich die Gröſſe deren Logarithme in 271; XII ſoll genommen werden nicht durch eine Reihe die nach y ſteigt ausdrucken.

Und ſo läſſt ſich eine nach y ſteigende Reihe in welcher der Logarithme ſteckt, für ein kleines y angeben. Ein groſſes, erfodert eine Reihe die

 nach

nach y fällt, und in der kann der Logarithme nicht verborgen ſtecken, ſondern es zeigt ſich ein Logarithme ſichtbar.

VI. Alſo, des Bogens Länge, blos durch Reihen zu finden, iſt unbequem und unſicher. Ich behalf mich in den erſten Ausgaben meines Buches damit, weil ich Anfängern nur einen Begriff von der Möglichkeit dieſer Rectification geben wollte.

VII. In 271; I iſt $ds = 2. \frac{dy}{a}. \surd(\frac{1}{4} a^2 + y^2)$

Man ſetze $\surd(\frac{1}{4} a^2 + y^2) = z$, ſo iſt $\frac{1}{2} ds = \frac{z. dy}{a}$

Alſo, wenn für eine krumme Linie, der Abſciſſe y, die Ordinate z zugehört, ſo giebt die Fläche dieſer krummen Linie, mit a dividirt die Hälfte des paraboliſchen Bogens.

In An. endl. Gr. 417; und 2. Taf. 15 Fig. iſt der gleichſeitigen Hyperbel halbe Axe = CA = $\frac{1}{2}$ a; die Abſciſſen CP aus dem Mittelpuncte genommen, die Ordinaten MP auf ſie ſenkrecht.

Man ſtelle ſich durch den Mittelpunct die zweyte Axe vor, wie Dd daſ. II. Taf. 14 Fig. Hie würde ſie unrichtig die kleine heiſſen, weil beyde gleich ſind.

Sie iſt auf die erſte Axe ſenkrecht, alſo ihr MP parallel. Ein Perpendikel auf ſie von M, iſt

iſt $= CP$, und ſchneidet auf ihr von C aus ein Stück $= MP$ ab.

Nennt man dieſes abgeſchnittene Stück $= MP = y$; und das Perpendikel $= CP = z$, ſo hat man $MP^2 + \frac{1}{4} a^2 = CP^2$ Das iſt $y^2 + \frac{1}{4} a^2 = z^2$.

Die Hyperbel kehrt ihre erhabne Seite gegen die zweyte Axe; und $z. dy$ iſt das Differential der Fläche welche zwiſchen dem convexen Bogen der Hyperbel und der Abſciſſe auf der zweyten Axe enthalten iſt.

Kann man dieſe Fläche finden, ſo giebt ſie mit $\frac{1}{2}a$ dividirt die Länge des paraboliſchen Bogens.

So wird die Rectification der apolloniſchen Parabel, auf die Quadratur der gleichſeitigen Hyperbel gebracht, wie die Rectification der neiliſchen Parabel auf Quadratur der apolloniſchen. Jene iſt alſo tranſcendentiſch, dieſe algebraiſch

Lehnſätze; von der Zerlegung gebrochner Functionen in einfache.

349. Wenn z, eine veränderliche Gröſſe bedeutet, m, n, ganze bejahte Zahlen ſind, die übrigen Buchſtaben die zunächſt vorkommen, unveränderliche Gröſſen anzeigen, ſo ſey

$$M = a + bz + cz^2 \ldots + kz^m;$$
$$N = \alpha + \beta z + \gamma z^2 \ldots + \varkappa z^n;$$

alſo ſind M; N; ganze rationale Functionen; (260) aber $\frac{M}{N}$ iſt eine gebrochne.

350. Erkl. Wenn die veränderliche Gröſſe, auf lauter Potenzen gerader Exponenten erhoben iſt, ſo heiſſt die Function gerade aber ungerade wenn ſich in ihr lauter Potenzen ungerader Exponenten befinden. Dieſes gilt die Function mag rational oder irrational ſeyn (259).

So wären $\sqrt{(ff + z^2)}$ eine gerade, $\sqrt[3]{(z + z^3)}$ eine ungerade irrationale Function.

Eine gerade Function behält einerley Werth der Gröſſe und dem Zeichen nach, wenn man in ihr ſtatt eines angenommenen Werthes von z, den entgegengeſetzten ſonſt gleichen ſetzte bey einer ungeraden aber kömmt in dieſem Falle zwar eben der Werth, aber mit entgegengeſetzten Zeichen.

351. Lehrſ. Jede rationale ganze Function hat ſo viel einfache Factoren, ſoviel die veränderliche Gröſſe in ihr Abmeſſungen hat.

I. Bew. Man ſetze M = o oder z^m .... $+ \frac{c}{k} zz + \frac{b}{k} z + \frac{a}{k} = 0$ ſo entſtehet dieſe Gleichung aus m Wurzelgleichungen, (Alg. 221.) und alſo das Product M aus m Factoren. Ein Exempel, wo dieſe Schlüſſe ſchon ſind gebraucht worden, giebt 338; V.

II.

II. Unter denſelben können gleiche, und unmögliche ſeyn.

352. I. Wenn m gerade iſt, ſo giebt es keinen, oder 2; oder 4; oder 6, u. ſ. w. mögliche Factoren, und 1 oder 3, oder 5, u. ſ. w. wenn m ungerade iſt. Denn aus (174) kann $M = 0$ nicht anders als eine gerade Zahl unmöglicher Wurzeln haben; Sie ſey $= 2r$; ſo iſt die Zahl der möglichen Wurzeln, und Wurzelgleichungen, und Factoren; $m - 2r$; gerade oder ungerade, nachdem es m iſt, oder 0 wenn $2r = m$.

II. Das 0 muß als eine gerade Zahl angeſehen werden, weil $0 + 1$ oder $0 + 3$ u. ſ. w. ungerade, aber $0 + 2$ u. ſ. w. gerade ſind.

353. Wenn m gerade und $\frac{a}{k}$ verneint iſt, ſo hat M wenigſtens zweene mögliche Factoren, weil ſich die krumme Linie, der die Gleichung $M = y$ zugehört (163) bey $z = 0$ unter der Axe befindet, und doch über die Axe auf beyden Seiten des Anfangs der Abſciſſen herauskömmt, folglich $M = 0$ gewiß zwo mögliche einander entgegengeſetzte, aber nicht eben nothwendig gleiche Wurzeln hat.

354. Lehrſatz. T und P ſind ganze Zahlen, aus der gemeinen Arithmetik, oder ganze Functionen (347) die keinen gemeinſchaftlichen Factor haben; V und Q ebenfalls ein paar ſolche Gröſſen; und P und Q haben auch keinen gemeinſchaftlichen Factor; T und

 V im=

V imgleichen T und Q mögen einen gemeinſchaftlichen Factor haben oder nicht; So ſind $\frac{T}{P}$; $\frac{V}{Q}$; Brüche, die ſich nicht aufheben laſſen. (Ar. I. 70.) Ich behaupte, dieſer Brüche, wie ſie da ausgedruckt ſind ihre Summe oder ihr Unterſchied, ſey auch, jedes ein Bruch, der ſich nicht aufheben läſſt.

Bew. Dieſe Summe oder dieſer Unterſchied iſt $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q}$; Man ſetze ihn $= \frac{M}{N}$ daß M; N; ganze Zahlen oder Functionen bedeuten, alſo N. T. Q $\pm$ N. V. P $=$ M. P. Q und $\frac{N.Q\ T}{P} \pm$ N. V $=$ M. Q. Weil nun das übrige alles Ganze ſind, ſo muß $\frac{N.Q.T}{P}$ auch ein Ganzes ſeyn. Nun läſſt ſich, weil P mit T und mit Q keinen gemeinſchaftlichen Factor hat, weder T noch Q mit P dividiren, auch das Product T. Q nicht, ſonſt müſſte P ein Product ſeyn, deſſen einer Factor in Q der andere in T enthalten wäre. Eben ſo kann P kein Product ſeyn, deſſen einer Factor in N, der andere in Q. T enthalten wäre. (Dieſe Schlüſſe ſind einerley mit denen Ar. IIII; 24). Soll alſo $\frac{N.Q.T}{P}$ ein Ganzes ſeyn, ſo muß N

für

für ſich, ſich mit P dividiren laſſen. Eben ſo folgt aus $N.T \pm \frac{N.P.V}{Q} = M.P$ daß es ſich mit Q dividiren läſſt. Man ſetze es alſo $= H.P.Q$; ſo iſt $T.Q \pm P.V = \frac{M}{H}$ oder $M = H.(T.Q \pm V.P)$. In jedem Ausdrucke $\frac{M}{N}$ alſo, der $= \frac{T.Q. \pm P.V}{P.Q}$ iſt, iſt der Zähler ein Vielfaches des Zählers, und der Nenner ein Vielfaches des Nenners von dieſem Bruche, oder, jeder andere Ausdruck der $= \frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ läſſt ſich aufheben; folglich iſt $\frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ der Ausdruck für $\frac{T}{P} \pm \frac{V}{Q}$ der ſich nicht aufheben läſſt.

355. Geſetzt aber P und Q haben einen gemeinſchaftlichen Factor, ſo daß $P = H.R$; $Q = H.S$; ſo iſt $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q.} = \frac{H.S.T \pm H.R.V}{H.H.R.S} = \frac{S.T. \pm R.V}{H.R.S}$ und läſſt ſich alſo allemahl aufheben.

356. Zuſ. Wenn $N = H.R.H.S$; (355) ſo iſt $\frac{M}{H} = S.T \pm R.V$. Soll ſich alſo hier der Bruch $\frac{M}{N}$ in $\frac{T}{P}$ und $\frac{V}{Q}$ zerfällen laſſen, ſo muß M ſich durch H dividiren, und alſo $\frac{M}{N}$ aufheben laſſen. Es ſey $M = H.K$ ſo wird $\frac{M}{N}$ auf $\frac{K}{H.R.S}$ gebracht. Ordentlicher Weiſe aber nimmt man in der gemeinen Arithmetik und auch in folgenden Rechnungen an, daß der Bruch, den man zerfällen will, ſchon in den kleinſten Zahlen ausgedruckt ſey, und ſich nicht aufheben laſſe. In dieſem Falle alſo geht die Zerfällung nicht an, wofern P; Q; einen gemeinſchaftlichen Factor haben; weil alsdenn das ganze $S.T \pm R.V$ nicht dem Bruche $\frac{M}{H}$ gleich ſeyn kann.

357. Aufg. Eine gebrochne rationale Function, wo die veränderliche Gröſſe im Zähler auf höhere Grade ſteigt als im Nenner, in zweene Theile zu zergliedern, deren einer eine ganze Function, der andere eine gebrochne iſt, da die veränderliche Gröſſe im Zähler nicht ſo hoch ſteigt als im Nenner.

Aufl.

Aufl. Man ordne beyde nach z ſo daß die höchſten Potenzen den Anfang machen, und dividire den Zähler durch den Nenner ſo lange, bis man in dem Quotienten auf einen unveränderlichen Theil kömmt. Dieſer Quotient, den unveränderlichen Theil mit dazu gerechnet, iſt die ganze Function. Der Reſt von der Diviſion giebt den Zähler, und der vorige Nenner, den Nenner der neuen gebrochnen, oder des eigentlichen Bruchs, der mit der ganzen, den erſten uneigentlichen Bruch ausmacht.

Ex. $\frac{z^4 + 1}{zz + 1} = zz - 1 + \frac{2}{zz + 1}$

358. Aufg. Eine gebrochne Function, deren Nenner zweene Factoren hat, die keinen gemeinſchaftlichen Factor haben (356); in zwo zu zergliedern, deren jede einen dieſer Factoren zum Nenner hat.

Aufl. Sie ſey

$$\frac{a + bz \ldots + kz^m}{(\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n).\ (\lambda + \mu z \ldots \pi z^r)}$$

Man ſetze, ſie gleiche den beyden Brüchen zuſammen

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z \ldots + \mathfrak{k}z^{n-1}}{\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n} + \frac{\mathfrak{l} + \mathfrak{m}z \ldots + \mathfrak{p}z^{r-1}}{\lambda + \mu z \ldots + \pi z^r}$$

wo jeder Zähler einen Grad niedriger iſt als ſein Nenner, die deutſchen Buchſtaben ſind angenommene Coefficienten, die man beſtimmen ſoll. Der

erſte

erſte Bruch hat deren n; der zweyte r, zuſammen $n + r$. Wenn man nun dieſe beyden Brüche auf einerley Benennung bringt, ſo hat das Product aus des erſten Zähler in des zweyten Nenner, $n - 1 + r$ und das Product aus des zweyten Zähler in des erſten Nenner, $r - 1 + n$ eben ſoviel Abmeſſungen. Die Summe dieſer Producte ſoll dem Zähler der gegebenen Function gleich ſeyn. Man ſetze alſo jeden Coefficienten dieſer Summe dem Coefficienten gleich, der in der Function Zähler zu eben der Potenz von z gehört; wo ſich in der Summe eine Potenz von z findet, die nicht in dem Zähler der Function anzutreffen iſt, da iſt der Coefficient dieſer Potenz in der Summe $= 0$. Weil nun die Summe $n + r$ Glieder hat, ſo giebt es ſo viel Gleichungen als Coefficienten $a; b; \ldots$ angenommen worden ſind. In keiner dieſer Gleichungen iſt einer dieſer Coefficienten mit einem andern ſeines Gleichen, oder mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſondern jeder von den $a; b; \ldots m$; wird nur mit $\lambda; \mu; \pi$; und jeder von den $l; m; \ldots p$; nur mit $\alpha; \beta; \ldots \varkappa$; multiplicirt, alſo geben ſich alle dieſe Coefficienten nur durch einfache Gleichungen, und jeder bekömmt nur einen und zwar möglichen Werth.

359. Ex. $\frac{a + bz}{\alpha\alpha - \varkappa\varkappa zz} = \frac{a}{\alpha + \varkappa z} + \frac{1}{\alpha - \varkappa z}$ Der Zähler der Summe dieſer Brüche,

wenn

wenn man ſie auf eine Benennung gebracht hat, heiſſt: $(a+l)\alpha+(l-a)\varkappa.z.$ alſo iſt $a+l=\frac{a}{\alpha}$; $l-a=\frac{b}{\varkappa}$ dieſe beyden Gleichungen geben addirt: $2l=\frac{b}{\varkappa}+\frac{a}{\alpha}$ und abgezogen $2a=\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\varkappa}$ alſo ſind die beyden Brüche

$$\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha+\varkappa z}+$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha-\varkappa z}$$

360. Eine gebrochne Function läſſt ſich in ſo viel Brüche von der Form $\frac{A}{p-qz}$ zerlegen, ſoviel einfache ungleiche Factoren ihr Nenner hat. Jeder einfache Factor des Nenners, wie $p-qz$ einer iſt, giebt nähmlich einen einfachen Bruch wie $\frac{A}{p-qz}$.

361. Aufg. Aus dem gegebenen einfachen Factor $p-qz$; des Nenners N; einer gebrochenen Function $\frac{M}{N}$; den Zähler A, des einfa-

einfachen Bruches $\frac{A}{p-qz}$ zu finden, den dieſer Factor giebt.

Aufl. Es ſey $N = (p-qz).S$; wo S eine ganze Function iſt. Der Factor S gebe bey der Zerlegung einen Bruch, deſſen Zähler die ganze Function P iſt; oder es ſey $\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qz).S}$ ſo wird $\frac{P}{S} = \frac{M - A.S}{(p-qz).S}$ folglich $P = \frac{M - A.S}{p-qz}$ alſo muß ſich $M - A.S$ mit $p - qz$ dividiren laſſen; folglich $= 0$ werden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird, weil alsdenn ein Factor von $M - A.S$ nähmlich $p - qz = 0$ wird; (nach eben der Art zu ſchlieſſen, wie Alg. 214. gebraucht worden.) Man ſetze alſo in M und in S überall $\frac{p}{q}$ ſtatt z, damit $M - A.S = 0$ wird; ſo kömmt daraus $A = \frac{M}{S}$; und dieſes iſt alſo der geſuchte Zähler. Der Quotient nähmlich, der aus M mit S dividirt herauskömmt, wenn man in jeder dieſer Function $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt hat.

362. Zuſ.

362. Zuſ. Sucht man für jeden Factor wie $p - qz$ (360) den zugehörigen Zähler, ſo erhält man alle die Brüche, deren Summe $\frac{M}{N}$ iſt

363. Ex. Es ſey $\frac{M}{N} = \frac{1 + zz}{z - z^3}$; wo $M = 1 + zz$; $N = z.(1 + z).(1 - z)$. Man nehme z ſtatt des Factors $p - qz$; ſo iſt $S = 1 - zz$; und $p = 0$; $q = - 1$; $\frac{p}{q} = 0$ alſo $A = \frac{1}{1} = 1$; zweytens nehme man $1 - z$ ſtatt des Factors $p - qz$; daß $p = 1$; $q = + 1$; $S = z + zz$; $\frac{p}{q} = 1$; alſo $A = \frac{2}{2} = 1$; drittens ſey $1 + z$ ſtatt des Factors $p - qz$ und $p = 1$; $S = z - zz$; $\frac{p}{q} = - 1$; alſo $A = \frac{2}{-2} = - 1$; alſo $\frac{1 + zz}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$

364. Zweytes Ex. $\frac{M}{N} = \frac{1 - 8z + 7zz}{1 - 3z - 4zz + 12z^3}$. Hier iſt der Nenner $= (1 - 3z).(1 - 2z).(1 + 2z)$; Es ſey alſo

M =

$$M = 1 - 8.z + 7.zz$$

$p - qz = 1 - 3z;$	$1 - z2;$	$1 + 2z;$
$S = 1 - 4zz;$	$1 - z - 6z^2;$	$1 - 5z + 6z^2$
$\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$;	$+ \frac{1}{2};$	$- \frac{1}{2};$
$A = \frac{1 - \frac{8}{3} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4}{9}};$	$\frac{1 - \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{6}{4}};$	$\frac{1 + \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{5}{2} + \frac{6}{4}};$

alſo $\frac{M}{N} = \frac{-\frac{8}{5}}{1 - 3z}; + \frac{\frac{5}{4}}{1 - 2z}; + \frac{\frac{27}{20}}{1 + 2z};$

365.

365. Lehrſ. Ein Bruch $\frac{P}{(p-qz)^n}$, deſſen Zähler P eine ganze Function und niedriger als vom Grade n iſt; läſſt ſich in folgende einfache Brüche zerlegen: $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{K}{p-qz}$, deren Zahl n iſt, und die Zähler alle unveränderliche Gröſſen ſind.

Bew. Weil P höchſtens bis auf den Grad n ſteigen kann, ſo läſſt ſich annehmen
$P = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots + \varkappa z^{n-1}$;
wo die Zahl der gegebenen griechiſchen Buchſtaben n iſt; es können auch welche darunter $= 0$ ſeyn. Wenn man aber die einfachen Brüche alle auf einerley Benennung $(p-qz)^n$ gebracht hat, ſo wird der Zähler ihrer Summe $= A + B(p-qz) + C.(p-qz)^2 \ldots K.(p-qz)^{n-1}$; dieſer Zähler, nach den Abmeſſungen von z geordnet, enthält n Glieder, und giebt alſo mit P verglichen n Gleichungen, davon die erſte $\alpha = A + Bp + Cp^2 \ldots Kp^{n-1}$ iſt. In keiner dieſer n Gleichungen, befindet ſich eine höhere Potenz eines der Buchſtaben A; B .... K oder ein Product aus einem von ihnen in dem andern. Alſo beſtimmen dieſe Gleichungen für jeden dieſer Buchſtaben, einen einzigen und möglichen Werth.

366. Aufg. Wenn $N = (p - qz)^2 . S$; die Zähler der Brüche (365) zu finden.

Aufl. Weil $\frac{M}{(p-qz)^2 . S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$ wo P den ganzen Zähler des Bruchs bedeutet, der aus des Nenners Factor S wird, ſo iſt $P = \frac{M - A.S - B.(p-qz)}{(p-qz)^2}$

Damit alſo dieſes eine ganze Function wird, ſo muß ſich $M - A.S - B.(p-qz)S$ durch das Quadrat von $p - qz$ und folglich durch $p - qz$ ſelbſt, dividiren laſſen. Es muß alſo zum erſten $= 0$ werden, wenn man $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt.

Da wird alſo $M - A.S = 0$ oder $A = \frac{M}{S}$ wenn man in M und S, $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt. Ferner muß ſich $M - A.S - B.(p-qz).S$, wo z in M und S ſtehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ ſtatt ſeiner geſetzt wird; noch durch $(p-qz)^2$ dividiren laſſen; oder $\frac{M - A.S}{p-qz} - B.S$ muß ſich

durch

durch p — qz dividiren laſſen; Es ſey $\frac{M - A.S}{p - qz} = T$; ſo muß ſich T — B. S durch p — qz dividiren laſſen; oder verſchwinden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Alſo iſt in dieſem Falle $B = \frac{T}{S}$ wenn in T und S; $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Endlich iſt $P = \frac{T - B.S}{p - - qz}$ wo z in T und S ſtehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ ſtatt ſeiner geſetzt wird.

367. Erſtes Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{1 + 3z - zz;}{(1+z)^2.(3-z)}$
Hier iſt $M = 1 + 3z - zz$; $p = 1$; $q = -1$; $S = 3 - z$; alſo $\frac{p}{q} = -1$, $A = \frac{1 - 3 - 1}{3 + 1} = -\frac{3}{4}$; $M - A.S = \frac{13}{4} + \frac{9}{4}z - zz$;

$T = \frac{13}{4} - z$; $B = \frac{\frac{13}{4} + 1}{3 + 1} = \frac{17}{16}$

$P = \frac{\frac{13}{4} - z - \frac{17}{16}.(3 - z)}{1 + z} = \frac{1}{16}$; alſo

$$\frac{M}{N} = \frac{-\frac{3}{4}}{(1 + z)^2} + \frac{\frac{17}{16}}{1 + z} + \frac{\frac{1}{16}}{3 - z}$$

 Zwey-

Zweytes Exempel $\frac{1+t^2}{(f-gt)^2.(f+gt)^2}$

1. Weil $f-gt=g.\left(\frac{f}{g}-t\right)$; $f+gt=g.\left(\frac{f}{g}+t\right)$ ſo läſſt ſich der Nenner folgendergeſtalt ausdrucken $g^4\left(\left(\frac{f}{g}-t\right)^2.\left(\frac{f}{g}+t\right)^2\right)$

2. Man ſetze $\frac{f}{g}=\lambda$ und reducire

$\frac{1+t^2}{(\lambda-t)^2.(\lambda+t)^2}$ wo $M=1+t^2$

3. Hier ſey erſtlich $p=\lambda$; $q=1$; $z=t$; $S=(\lambda+t)^2$ alſo muß man λ ſtatt t ſetzen.

4. Dieſes giebt $A=\frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}$

5. So wird $T=\frac{1+t^2-\frac{(1+\lambda^2).}{4\lambda^2}(\lambda+t)^2}{\lambda-t}$

Wenn man den Zähler nach λ ordnet, ſo wird er ſelbſt ein Bruch, deſſen Nenner $4\lambda^2$; Sein Zähler aber läſſt ſich mit $\lambda-t$ dividiren; und ſo erhält man $T=\frac{-\lambda^3-3t\lambda^2+3\lambda+t}{4\lambda^2}$

6. Macht

6. Macht man nun $\frac{T}{S}$; und ſetzt darinnen λ ſtatt t; ſo kömmt $B = \frac{1-\lambda^2}{4\lambda^3}$

7. Ferner findet man $\frac{T - B.S}{p - qz}$ oder

$$P = \frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$$

8. Nun iſt alſo noch zweytens übrig folgenden Bruch zu zerlegen

$$\frac{\frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}}{(\lambda + t)^2}$$

9. Da iſt nun $M = \frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$; $p = \lambda$; $q = -1$; $S = 1$

10. Hier muß man alſo $-\lambda$ ſtatt t ſetzen.

11. Da wird $A = \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}$

12. $M - A.S = \frac{\lambda - \lambda^3 + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$

Dieſes mit $\lambda + t$ dividirt giebt

$- \frac{\lambda^2 + 1}{4\lambda^3} = B$ weil $S = 1$

13. Hier alſo iſt $P = 0$;

 14. Wenn

14. Wenn man daher 4; 6; 11; 12; 13; zuſammen nimmt ſo iſt der Bruch in (2)

$$= \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{(\lambda-t)^2} + \frac{1}{(\lambda+t^2)}\right)$$

$$+ \frac{1-\lambda^2}{4\lambda^3} \cdot \left(\frac{1}{\lambda-t} + \frac{1}{\lambda+t}\right)$$

Woraus ſich leicht λ wegſchaffen läſſt.

368. Aufg. Wenn $N = (p-qz)^n . Z$; den Bruch $\frac{M}{N}$ nach 365 zu zerlegen.

Aufl. Es ſey $\frac{M}{(p-qz)^n . Z} = \frac{A}{(p-qz)^n}$

$$+ \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}}$$

$$+ \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} \ldots + \frac{F}{(p-qz)^{n-f}}$$

$$\ldots + \frac{K}{(q-qz)} + \frac{L}{Z};$$ Alſo

$(M - A. Z - B. Z). (p - qz) - C. Z. (p - qz)^2 - D. Z. (p - qz)^3 \ldots - F. Z. (p - qz)^f \ldots - K. Z. (p - qz)^{n-1}) : (p - qz)^n = L$; Folglich läſſt ſich die Gröſſe $M \ldots - K. Z. (p - qz)^{n-1}$ durch $(p - qz)^n$ dividiren, weil L eine ganze Function iſt. Dieſe Gröſſe, die ich der Kürze wegen y nennen will, wird

wird alſo $= 0$; wenn man $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt. Dieſes giebt $M - A.Z = 0$; oder es iſt $A = \frac{M}{Z}$, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Nun ſey überhaupt, ohne $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen; $\frac{M - A.Z}{p - qz} = P$, (wo P eine ganze Function iſt, weil ſich $y - (M - A.Z)$ ſo wohl als y und folglich auch $M - A.Z$, durch $p - qz$ dividiren läſſt), ſo läſſt ſich $\frac{y}{p - qz}$ noch einmahl durch $p - qz$ dividiren; oder $P - B.Z - C.Z\ (p - qz) \ldots\ldots - K.Z.(p - qz)^{n-2}$ läſſt ſich noch durch $p - qz$ dividiren, das heiſſt, es verſchwindet für $z = \frac{p}{q}$ welches alſo $B = \frac{P}{Z}$ giebt.

Nun ſey, ohne $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen, überhaupt $\frac{P - B.Z}{p - qz} = Q$; ſo läſſt ſich $\frac{y}{(p - qz)^2} = Q - C.Z - D.Z.(p - qz) \ldots\ldots K.Z.(p - qz)^{n-3}$ wieder durch $p - qz$ dividiren, alſo iſt für $z = \frac{p}{q}$; $C = \frac{Q}{Z}$

 Wenn

Wenn nun $\frac{Q - C.Z}{p - qz} = R$ ſo läſſt ſich

$$\frac{y}{(p - qz)^3} = R - D.Z - E.Z.(p - qz)\ldots$$

wieder durch $p - qz$ dividiren, oder für $z = \frac{p}{q}$

iſt $D = \frac{R}{Z}$

Und wenn $R - D.Z = S$; ſo iſt für $z = \frac{p}{q}$; $S - E.Z.\ldots = 0$ oder $E = \frac{S}{Z}$ u. ſ. w.

Die Diviſion der Gröſſe y durch $p - qz$ oder das ihr gleichgültige Verfahren $\frac{p}{q}$ ſtatt z zu ſetzen, läſſt ſich nähmlich n mahl wiederhohlen, und giebt jedesmahl einen von den n Buchſtaben A.... K. Nachdem man dieſe alle gefunden hat, wird auch L aus ſeinem vorhin angegebenen Werthe gefunden.

369. Exempel. $\frac{1 + zz}{z^5.(1 + z^3)}$ giebt

$M = 1 + zz$; $p = 0$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = 0$;
$n = 5$; $Z = 1 + z^3$ $y = 1 + zz - (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4).Z$;

$A = 1$; $P = \frac{1 + zz - 1 - z^3}{z} = z - zz$

B =

$B = 0$; $Q = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$

$C = 1$; $R = \frac{1 - z - 1 - z^3}{z} = - 1 - zz$

$D = - 1$; $S = \frac{1 - zz + 1 + zz^3}{z} = - z + zz$

$E = 0$

Endlich iſt $L = (1 + z^2) - (1 + z^3) - (z^2 + z^5) + (z^3 + z^6) : z^5$ oder $= - 1 + z$ alſo der Bruch =

$$\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$$

$$+ \frac{z - 1}{1 + z^3}$$

370. Zuſ. Jeder eigentliche Bruch $\frac{M}{N}$ läſſt ſich nach 362; 368; in einfache zerlegen; und 362 iſt ſelbſt in 368 enthalten, wenn $n = 1$ geſetzt wird. Man kann aber aus jeder gebrochenen Function den eigentlichen Bruch von dem Ganzen abſondern, das etwa darinnen enthalten iſt (357) und das keine ſolche Zerlegung erfodert. Alſo ſind die hier gegebenen Vorſchriften zulänglich, alle gebrochne Functionen zu zerlegen, und es iſt unnöthig beſonders darzuthun, daß ihre Anwendung bey einem uneigentlichen Bruche vor ſeiner Zergliederung nach (357) doch eben die

einfachen Brüche giebt, die aus dem eigentlichen nach der Zergliederung herauskommen, obgleich bey einer geringen Aufmerkſamkeit in die Augen fällt, daß ſich dieſes ſo verhält, weil es einerley iſt, ob man dieſe Regeln bey einem eigentlichen Bruche $\frac{M}{N}$ oder bey einem uneigentlichen $\frac{M + Q.N}{N}$ wo Q eine ganze Function iſt, anbringt.

371. Ex. I) $\frac{1}{(1+z).(1-z)^2.z^3}$ zu zerlegen; wo $M = 1$; nehme man zuerſt den einzelnen Factor $1 + z$; oder man ſetze $N = (1 + z)$. Z wo $n = 1$; $p = 1$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = -1$ $Z = z^3 - 2z^4 + z^5$ (368; 370). Alſo den Bruch $\frac{A}{1+z}$ zu finden; $A = \frac{1}{-1-2-1} = -\frac{1}{4}$.

II) Nun nehme man den quadratiſchen Factor, oder man ſetze $N = (1-z)^2.(z^3 + z^4)$ wo (368) $n = 2$; $p = 1$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 1$; $Z = z^3 + z^4$; alſo $A = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

P =

$$P = \frac{1 - \frac{1}{2}.z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1 - z} = 1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3;$$

$$B = \frac{1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{7}{4}$$

III) Endlich nehme man wegen des cubiſchen Factors; $N = z^3.(1 - z - zz + z^3)$ alſo

(368) $n = 3$; $p = 0$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 0$; $Z = 1 - z - zz + z^3$; $A = \frac{1}{1} = 1$;

$$P = \frac{1 - 1 + z + zz - z^3}{z} = 1 + z - zz;$$

$B = \frac{1}{1} = 1$; $Q = \frac{1 + z - zz - 1 + z + zz - z^3}{z} = 2 - zz$; $C = \frac{2}{1} = 2$;

IIII) Alſo iſt der Bruch =

$\frac{-\frac{1}{4}}{1 + z}$ wegen (I)

$\frac{+\frac{1}{2}}{(1 - z)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1 - z}$ wegen (II)

$+ \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$ wegen (III)

Daß dieſe einfachen Brüche zuſammen, den vorgegebenen ausmachen, iſt daher gewiß, weil man für jeden der dreyerley Factoren von N die zugehörigen einfachen Brüche gefunden hat.

Von

Von den Werthen ſolcher Functionen, die unter gewiſſen Umſtänden unbeſtimmt ſcheinen.

372. Aufg. P; Q; ſind was man will für Functionen von x; deren jede = o wird, wenn x = a; Man fragt, was für dieſen Werth von x; der Werth von $\frac{P}{Q}$ iſt, weil ſolcher alſo $\frac{o}{o}$ zu ſeyn ſcheinet.

Aufl. Man ſetze a + e ſtatt x; ſo verwandelt ſich P in eine Gröſſe, wo alles, was kein e enthält, ſich zuſammen aufhebt, und nur Theile übrig bleiben, die in e von der erſten, und von höhern Potenzen multiplicirt ſind; wie gleich daraus erhellt, weil man jedes Stück von P es mag rational oder eine Wurzelgröſſe ſeyn, nach dem binomiſchen Lehrſatze (46) in eine Rejhe, die nach e ſteigt, verwandeln kann. Man nehme von dieſen Reihen alle die Glieder zuſammen, die nur in die erſte Potenz von e multiplicirt ſind, und heiſſe ſie zuſammen fe, die übrigen Glieder aber, deren jedes eine höhere Potenz von e enthält, heiſſen zuſammen F. e^2 wo Theile von F noch mit der erſten oder höhern Potenzen von e multiplicirt ſeyn können; alſo wird P = fe + Fee und eben ſo Q = ge + Gee; wo g und G das bedeuten, was f und F bey P. Alſo verwandelt

delt ſich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f + Fe}{g + Ge}$. Nun laſſe man e unendlich abnehmen; ſo verwandelt ſich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f}{g}$. Iſt nun hier nicht zugleich f und g; = 0; ſo wird $\frac{f}{g}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$ ſeyn. Es iſt nähmlich $\frac{f + Fe}{g + Ge}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für jeden andern unbeſtimmten Werth von x; und man läſſt ſich dieſen andern unbeſtimmten Werth von x, deren Werthe a unendlich nähern, man erhält alſo den Werth $\frac{P}{Q}$ für einen Werth von x der ſich dem Werthe a unendlich nähert, d. i. für $x = a$.

373. Ex. Wenn $\frac{-xx + a\sqrt{ax}}{a^3 - a\sqrt{ax}}$ gegeben iſt; ſo wird (50) $P = \begin{array}{l} -aa - 2a \\ +aa + \frac{1}{2}a \end{array}\Big] e \begin{array}{l} -1 \\ -\frac{1}{8} \end{array}\Big] ee$

alſo $f = -\frac{3}{2}a$; $F = -\frac{9}{8} \ldots$;

Eben ſo $Q = a$

$$- a - \frac{1}{2}e + \frac{ee}{4a} \ldots$$

alſo $g = -\frac{1}{2}$; $G = \frac{1}{4a} \ldots$

Folg-

Folglich $\frac{f}{g} = + 3a$ für den Werth von $\frac{P}{Q}$, wenn $x = a$.

374. Wenn man $x + e$ in P ſtatt x ſetzt, und von dieſem zweyten Zuſtande der Function P, den erſten abzieht, ſo bleiben Gröſſen wie φe; Φee übrig, ſo daß in φ; Φ; da x ſteht, wo a in f; F; ſteht. Wenn e verſchwindet, ſo iſt $\varphi = \frac{dP}{dx}$ (20). Folglich iſt f der Werth von $\frac{dP}{dx}$ für $x = a$. Und eben ſo $\frac{dQ}{dx} = g$ für $x = a$. Alſo läſſt ſich die Regel (372) folgendergeſtalt ausdrucken: der Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$; iſt $= \frac{dP}{dQ}$ für $x = a$.

375. Ex. Bey $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a.\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ iſt überhaupt $\frac{dP}{dx} = \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{(2a^3x - x^4)}} - \frac{1}{3}a.\sqrt[3]{\frac{aa}{xx}}$ und überhaupt $\frac{dQ}{dx} = -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$;

Für $x = a$; verwandeln ſich dieſe beyden Gröſſen in $-\frac{4}{3}a$ und $-\frac{3}{4}$; alſo iſt der geſuchte Werth von

von $\frac{P}{Q} = \frac{-\frac{4}{3}a}{-\frac{3}{4}} = +\frac{16}{9}$ a.

376. Wenn bey Anwendung dieſer Regel entweder dP allein oder dQ allein $= 0$ wird, ſo iſt der geſuchte Werth im erſten Falle $= 0$; im zweyten $= \infty$

377. Ex. $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ wird dem Scheine nach $\frac{0}{0}$ für $x = 1$; aber $dP = \frac{dx}{x}$ $dQ = \frac{dx}{2.\sqrt{(1-x)}}$ alſo kömmt nach der Regel (374) $\frac{dP}{dQ}$ oder $\frac{2\sqrt{(1-x)}}{x} = 0$ für $x = 1$. So würde $\frac{\sqrt{(1-x)}}{lx} = \infty$ für $x = 1$ ſeyn.

378. Wenn aber bey Anwendung der Regel ſowohl dP als dQ verſchwinden, und ſolchergeſtalt $\frac{dP}{dQ}$ ebenfalls $\frac{0}{0}$ zu geben ſcheint, ſo darf man nur bedenken, daß eigentlich $\frac{dP}{dx} = \varphi$ mit $\frac{dQ}{dx} = \gamma$ dividirt wird; nach dem man dadurch, daß $x = a$ geſetzt worden, φ und γ in f und g verwandelt hat. Weil alſo nun der Quotient $\frac{\varphi}{\gamma}$

ſich

ſich für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ verwandelt, ſo kann man nach eben der Regel 374 ſeinen Werth für dieſen Fall aus $\frac{d\varphi}{d\gamma}$ d.i. aus $\frac{ddP}{ddQ}$ finden, wenn man darinnen $x = a$ ſetzt. Und ſollte hier wieder $\frac{0}{0}$ herauskommen, ſo folgt nach eben der Art zu ſchlieſſen, daß man $\frac{d^3 P}{d^3 Q}$ brauchen kann. Und ſo kann man ſo weit fortgehen, bis man auf Differentiale von P und Q kömmt, die nicht $\frac{0}{0}$ geben. Man muß aber auf ſolche kommen, weil $\frac{P}{Q}$ doch für $x = a$ einen gewiſſen Werth haben muß.

379. Ex. Bey $\frac{a.\sqrt[3]{4.(a^3+x^3)} - ax - aa}{\sqrt{2.(aa+xx)} - x - a}$ kömmt $\frac{dP}{dQ} = \frac{axx.\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{(a^6+2a^3x^3+x^6)} - a}{x\sqrt{2}:\sqrt{(aa+xx)} - 1}$ welches auch $\frac{0}{0}$ giebt, wenn $x = a$ geſetzt wird. Alſo ſucht man $\frac{ddP}{dx^2} = \frac{2a^4x.\,^3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}}$ und

ddQ

$\frac{ddQ}{dx^2} = \frac{aa\sqrt{2}}{\sqrt{(aa+xx)^3}}$; wo $x = a$ in $\frac{ddP}{ddQ}$ geſetzt, den geſuchten Werth $= 2a$ giebt.

380. Anm. Dieſe Regeln ſind von Joh. Bernoulli erfunden worden. S. Act. Erud. Lipſ. 1704. M. Aug. op. Io. Bern. T. I. n. 71. Wie auch Eul. Inſt. Calc. diff. L. II. c. 15.

381. Ex. Den Werth von $\frac{x^n}{lx}$ für $x = \infty$ zu finden. Hier werden Zähler und Nenner beyde unendlich. Um einen Ausdruck zu bekommen, wo beyde verſchwinden, ſchreibe man $\frac{1 : lx}{1 : x^n}$ ferner $x = \frac{1}{y}$ ſo kömmt $- \frac{-1 : ly}{y^n}$. Endlich ſetze man $y^n = u$ ſo kömmt $\frac{-1 : lu^{\frac{1}{n}}}{u}$; oder $P = \left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$; $Q = u$; alſo $dP = + \frac{du}{nu} \left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^{-2}$; und $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{u\left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^2}$ welches für $u = 0$; unendlich wird. Aber für $u = 0$ wird auch $y = 0$ und x unendlich, alſo wird $\frac{x^n}{lx}$ für

das unendliche x; unendlich. Eul. I. C. D L. II. §. 360. Ex. 6. löſet dieſes Exempel auf eine andere Art auf.

382. Wenn für $x = a$; $P = 0$; $Q = \infty$; ſo findet man den zugehörigen Werth des Products $P.Q$ folgendergeſtalt: Es ſey $Q = \frac{1}{R}$ alſo $P.Q = \frac{P}{R}$ ſo iſt $R = 0$ wenn Q unendlich iſt, und alſo der geſuchte Werth $= \frac{dP}{dR}$ nach 374.

Ex. Wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe iſt, ſo wird in $(1 - x) \tang \frac{\pi x}{2}$; $1 - x = 0$ und $\tang \frac{\pi x}{2}$ unendlich für $x = 1$; Man drucke alſo die Tangente durch die Cotangente aus, ſo kömmt $\frac{1 - x}{\cot \frac{\pi x}{2}}$.

Wenn aber $\cot \frac{\pi dx}{2} = v$; ſo iſt $\frac{\pi dx}{2} = \frac{- dv}{1 + vv}$ alſo $dv = - \frac{1}{2} \pi . (1 + vv)$. dx und $\frac{dP}{dR} = \frac{2}{\pi . (1 + vv)}$ welches den geſuchten Werth $= \frac{2}{\pi}$ giebt.

383.

383. Wenn P und Q beyde für x = a unendlich werden, ſo ſcheint P — Q = 0 zu werden aber es kann jeden endlichen Werth haben, weil zwo unendliche Gröſſen um eine endliche, die in Vergleichung ihrer für nichts gerechnet wird, unterſchieden ſeyn können. (9) Wenn P und Q algebraiſche Functionen ſind, ſo iſt das Mittel hier P — Q für x = a zu finden daß man P—Q für jeden unbeſtimmten Werth von x berechnet und nach dieſem in dem ſolchergeſtalt gefundenen Ausdrucke von P — Q erſtlich x = a ſetzt. Denn algebraiſche Functionen können, wofern x einen endlichen Werth behalten ſoll, nicht anders unendlich werden, als wenn es Brüche ſind, deren Nenner verſchwindet. Bringt man alſo dieſe Brüche in einen zuſammen, deſſen Nenner als ein Product der vorigen, auch verſchwinden wird, ſo verſchwindet entweder der Zähler auch, und da kann man den Werth des Bruchs nach 374 oder auch auf gleichgültige Arten finden, oder der Zähler verſchwindet nicht, und da iſt P-Q unendlich.

Ex. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für $x = 1$ zu finden. Der Ausdruck iſt $= \frac{1+x-2}{1-x^2}$

$$= \frac{-(1-x)}{(1+x).(1-x)} = \frac{-1}{1+x} \text{ wird } = -\tfrac{1}{2}$$

für $x = 1$

Für ein unendliches x können P und Q auch unendlich werden, wenn es ſich in ihren Zählern befindet. Hier muß man wiederum P — Q für jedes x finden, und in dem ſo gefundenen Unterſchiede x unendlich ſetzen; ſo findet man den Unterſchied P — Q für ein unendliches x, und nicht den Unterſchied zwoer unendlichen Gröſſen P und Q; als den man nicht finden kann, wenn er endlich iſt.

Ex. Man ſuche $(x+b)^{1-n} - x^{1-n}$; Man verwandelt die erſte Potenz in ihre Reihe

$$x^{1-n} + (1-n)\,x^{-n}\,b + \frac{(1-n).-n}{1.2}$$

$x^{-n-1}\,bb$ .. ſo hebt ſich das erſte Glied durch den Abzug auf, und man behält für den Werth des Unterſchiedes nur das zweyte Glied $\frac{(1-n)b}{x^n}$ wenn x unendlich wird, weil ſolches ſelbſt zwar unendlich klein iſt, aber doch in Vergleichung ſeiner die übrigen verſchwinden.

Folglich wäre in dieſem Falle

$$x^n.\,((x+b)^{1-n} - x^{1-n}) = (1-n)\,b$$

Ein anderes hieher gehöriges Exempel giebt die Art die Aſymptoten zu finden (113)

384. Bey tranſcendentiſchen Functionen verfährt man nach eben den Grundſätzen. Man ſetzt $a+e$ ſtatt x in P und Q; und ſucht daraus einen

einen allgemeinen Werth von P — Q; der ſich alsdenn in den geſuchten verwandelt, wenn e verſchwindet.

Ex. Man ſucht $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für = 1;

Hier ſetze man $x = 1 + e$; alſo der erſte Theil

$P = \frac{1+e}{e} = \frac{1}{e} + 1$, der andere Q

$$= \frac{1}{l(1+e)} = \frac{1}{e - \frac{1}{2}ee + \frac{1}{3}eee\ldots)}\ (220)$$

$$= \frac{1}{e.(1 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}ee\ldots} = \frac{1}{e}.$$

$(1 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}ee\ldots)^{-1} = \frac{1}{e}.\ (1 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{12}ee.)$

$(56) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e\ldots$ alſo $P - Q =$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}e\ldots$ und für ein verſchwindendes e; $= \frac{1}{2}$

Integrirung der rationalen Differentiale.

385. Aufg. Wenn M; N; rationale ganze Functionen von x ſind und N höher als M, alſo $\frac{M}{N}$ ein eigentlicher Bruch iſt; $\frac{M}{N}dx$ zu integriren.

Aufl. Man zerfälle N in alle einfache Factoren, welches hier als eine Foderung zum voraus geſetzt wird; und mache aus $\frac{M}{N}$ ſo viel einfache Brüche als Factoren herauskommen (361; 368;) jeder Bruch $\frac{A}{p-qx}$ (361) giebt mit dx multiplicirt das logarithmiſche Differential $\frac{A\,dx}{p-qx}$ deſſen Integral $-\frac{A}{q}\cdot l\,(p-qx)$ iſt (218) und jeder Bruch wie $\frac{F}{(p-qx)^{n-f}}$ mit dx multiplicirt, das algebraiſche Differential $\frac{F\,dx}{(p-qx)^{n-f}}$ deſſen Integral $\frac{-F}{q.(f+1-n)}.\,(p-qx)^{f+1-n}$ iſt. (203) Beyderley Integrale zuſammengerechnet geben alſo $\int\frac{M}{N}\,dx$.

Jedes Exempel, das bey 361... 368 u. f. gegeben worden, kann hier gebraucht werden, ſo iſt aus (371) x ſtatt z geſetzt,

$$\int\frac{dx}{x^3-x^4-x^5+x^6}=-\tfrac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x}$$

$$+\tfrac{1}{2}.$$

$+ \frac{1}{2}. \int (1-x)^{-2}\,dx + \frac{7}{4}. \int \frac{dx}{1-x} + \int x^{-3}.$
$dx + \int x^{-2}\,dx + \frac{2\int dx}{x} = -\frac{1}{4}. l(1+x)$
$+ \frac{1}{2}.(1-x)^{-1} - \frac{7}{4}\, l\,(1-x) - \frac{1}{2}.x^{-2} - x^{-1}$
$+ 2lx = l\, \frac{x^2}{\sqrt[4]{(1+x)(1-x)^7)}}$
$+ \frac{1}{2.(1-x)} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \text{Conſt.}$

386. Für jeden einfachen Factor $p - qx$ iſt des zugehörigen Bruches Zähler $= \frac{M}{S}$ ſo daß $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird, (361) alſo das daher entſtehende logarithmiſche Integral $\frac{M}{Sq}. l\, \frac{1}{p-qx}$ Hier läſſt ſich nun S allemahl durch die Diviſion finden, wenn der Factor von N gegeben iſt. Aber dieſe Arbeit würde zuweilen ſehr weitläuftig werden, oder gar S durch eine unbeſtimmte Zahl von Gliedern geben; z. E. wenn $N = 1 - x^n$ welches $1 - x$ zum Factor hat, (Alg. 243.) da S; n Glieder hat, und der Werth von S für $x = \frac{p}{q}$ durch eine weitläuftige Arbeit mühſam gefun-

 den

den würde (*). Kürzer erhält man dieſes ſo: $S = \frac{N}{p - qx}$; und hier wird der Werth von S geſucht, der herauskömmt, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird. In dieſem Falle aber verſchwinden Zähler und Nenner des Bruches, weil N ſich mit $p - qx$ muß dividiren laſſen, damit S ein Ganzes wird. Alſo iſt für S der gegenwärtig geſuchte Werth $= \frac{dN}{-q\,dx}$ (374) ſo daß $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird, und das Integral iſt $+ \frac{M\,dx}{dN}$. $l(p - qx)$ wo in $\frac{M\,dx}{dN}$ überall $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt werden muß.

Im Exempel 385 iſt $dN = (3xx - 4x^3 - 5x^4 + 6x^5).dx$ welches $-4dx$ für $x = -1$ wird. Alſo das Integral $= -\frac{1}{4}\,l(1 + x)$, wie vorhin.

387. Wenn $N = (p - qx)^n.Z$, wo x; iſt was z; in 368; alſo der Factor $(p - qx)^n \frac{M\,dx}{N}$ folgende Integrale giebt:

A ſ

(*) Man könnte auch $\frac{dx}{1 - x^n}$ nicht nach gegenwärtigen integriren, es muß nach (400) geſchehn.

$$A\int\frac{dx}{(p-qx)^n}+B\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-1}}$$
$$+C\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-2}}\ldots+F\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-f}}\ldots$$
$+\frac{K}{p-qx}+\int\frac{L\,dx}{Z}$ ſo läſſt ſich Z nicht durch $p-qx$ dividiren, weil man annimmt, N ſoll keine höhere Potenz von $p-qx$ enthalten als die vom Exponenten n. Nun iſt, hier x ſtatt z in (368) geſetzt, y eine ganze Function die ſich mit $(p-qx)^n$ dividiren läſſt. Weil nun Z keinen Factor wie $p-qx$ enthält, ſo wird in dem Quotienten $\frac{y}{Z}$, der Factor $(p-qx)^n$ um keinen Grad niedriger als in y ſelbſt, folglich läſſt ſich nicht nur y ſondern auch $\frac{y}{Z}$ durch $(p-qx)^n$ dividiren.

Das iſt: der Ausdruck $\frac{M}{Z}-A-B(p-qx)\ldots\ldots-K.(p-qx^{n-1}$ muß n mahl $=0$ werden, wenn man in ihm $\frac{p}{q}$ ſtatt x ſetzt, oder er muß $=0$ geſetzt, eine Gleichung vorſtellen, die n gleiche Wurzeln, jede $=\frac{p}{q}$ hat.

hat. Folglich finden ſich von dieſen gleichen Wurzeln noch n — 1 in der Differentialgleichung $d\frac{M}{Z} + Bqdx \ldots + F.f.(p-qx)^{f-1}qdx \ldots = 0$. (172) Und alſo noch n — 2 in der zweyten Differentialgleichung $dd\frac{M}{Z} - (2C + 6.D.(p-qx) \ldots + f.(f-1)F.(p-qx)^{f-2} \ldots)qqdx^2 = 0$ und noch n — 3 in der dritten, $d^3\frac{M}{Z} + (6D + \ldots + f(f-1)(f-2)F.(p-qx)^{f-3} \ldots)q^3dx^3 = 0$ u. ſ. w. daß alſo nebſt dem erſten Ausdrucke, noch n — 1 nach einander folgende Differentiale deſſelben, verſchwinden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt x geſetzt wird. Es ſey η der Coefficient zunächſt vor F, und φ der nächſtfolgende oder $\frac{y}{Z} = \frac{M}{Z} \ldots - \eta.(p-qx)^{f-1} - F.(p-qx)^f - \varphi.(p-qx)^{f+1} \ldots$ Weil der Exponent von p — qx in jedem Gliede durch jede Differentiation um 1 vermindert wird; ſo wird er durch f — 1 Differentiationen um f — 1 vermindert, und alſo ſey die f — 1te Differentialgleichung;

d^{f-1}

$$d^{f-1}\frac{M}{Z} \pm ((f-1).(f-2)\ldots 1.\eta$$

$$+ f.(f-1)\ldots 2.F.(p-qx) + f.(f-1)\ldots$$

$3.\varphi.(p-qx)^2\ldots\ldots)(q\,dx)^{f-1}$ ſo iſt die f te

$$d^f\frac{M}{Z} \mp (f.(f-1)\ldots 2.1.F + f.(f-1)\ldots$$

$2.\varphi.(p-qx)\ldots).(q\,dx)^f$ daß aber die angenommene Form der f — 1ten wahr iſt, kann man ſich leicht überzeugen, wenn man f — 1 = 1, oder = 2 oder = 3 u. ſ. w. ſetzt: Alſo gilt die Form für die f te überhaupt, weil ſie mit der für die f — 1te einerley iſt, nur daß f ſtatt f — 1 geſetzt worden, und die Zeichen umgekehrt ſind. Es gelten aber die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades f; wie daraus erhellt, weil für f = 2; das Zeichen — iſt, und die Zeichen allemahl abwechſeln. Wenn man alſo nach der Ordnung 1; 2; 3; u. ſ. w. ſtatt f; und $\frac{p}{q}$ ſtatt z ſetzt, ſo geben ſich die Coefficienten auſer dem erſten A den die Hauptgleichung beſtimmt, folgendergeſtalt:

$$A = \frac{M}{Z}$$

$$B = -\frac{1}{q\,dx}.\,d\frac{M}{Z}$$

$$C = +\frac{1}{2qq\,dx^2}.\,dd\frac{M}{Z}$$

D =

$$D = -\frac{1}{6.(q\,dx)^3} \cdot d^3 \frac{M}{Z}$$

$$F = \pm \frac{1}{f.(f-1)\ldots 2.1.(q\,dx)^f.}\, d^f \frac{M}{Z}$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades f. Man ſucht dieſe Coefficienten bis an $f = n - 1$ (368).

Im Exempel 371; iſt $z = x$; $p = 1$; $q = 1$; $n = 2$; $Z = x^4 + x^3$; $\frac{p}{q} = 1$; $\frac{M}{Z} = (x^4 + x^3)^{-1}$; $d\frac{M}{Z} = -(x^4 + x^3)^{-2}.(4x^3 + 3x^2)\,dx$; alſo $A = \frac{1}{2}$; $B = -1. - \frac{1}{4}.7$ Nimmt man in eben dem Exempel $p = 0$; $q = -1$; $n = 3$; $Z = 1 - x - x^2 + x^3$ (wie in 371. III) ſo iſt $\frac{M}{Z} = (1 - x - xx + x^3)^{-1}$; $\frac{p}{q} = 0$; $d\frac{M}{Z} = +(1 - x - xx + x^3)^{-2}.(1 + 2x - 3x^2).dx = tu\,dx$ alſo $dd\frac{M}{Z} = (tdu + udt)\,dx$; wo $du = (2 - 6x)\,dx$; $dt = -2.(1 - x - x^2 + x^3)^{-3} - (1 + 2x - 3x^2).dx$. Für $x = 0$ iſt $t = 1 = u$ und $du = 2dx = dt$; alſo; $A = 1$; $B = +1$; $C = +\frac{1}{2}.(1.2 + 2)$ alles wie vorhin (371. III.)

388. Anm.

388. Anm. Dieſe Art, rationale Functionen durch Logarithmen nach Zerfällung ihres Nenners zu integriren, hat Joh. Bernoulli erfunden, und Act. Er. Lipſ. 1703. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. bekannt gemacht. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. Euler aber hat ihren Gebrauch dadurch ſehr erleichtert, daß er die 361; 386; gewieſenen bequemern Arten die Zähler der einfachen Brüche zu finden gelehret hat. S. ſeine Meth. facilior. integr. form. diff. Comm. Ac. Petrop. T. XIIII. p. 99. Introd. in Anal. inf. L. I. § 41. ſeqqu. woraus ich das bisherige und auch das folgende genommen habe. Euler hat mehreres über dieſen Gegenſtand geſchrieben. Noua methodus fractiones rationales in ſimplices reſoluendi Acta Ac. Petrop. 1750. P. I. p. 32. Wenn die Gleichung $N = 0$ unmögliche Wurzeln enthält; ſo werden Nenner der einfachen Brüche, in welche $\frac{M}{N}$ zerfällt wird, unmöglich, und folglich kommen auch in das Integral unmögliche Logarithmen. Man weiß aber ſchon, daß dieſe ſich auf die Quadratur des Kreiſes bringen laſſen; (324) und da die unmögliche Factoren allemahl paarweiſe vorhanden ſind, (Alg. 272.) ſo läſſt ſich aus zween allemahl ein Product, wie eine quadratiſche Gleichung machen; welches die Rechnung noch verkürzt, und jetzo ſoll gewieſen werden.

Erfindung der dreytheilichten Factore.

389. Aufg. Wenn $pp - 2Qz + qqzz$ zweene unmögliche Factoren haben ſoll, deren jeder in einem Theile z im andern unveränderliche Gröſſen enthält, zu finden, was man zu dieſer Abſicht für einen Werth von Q annehmen muß.

Aufl.

Aufl. Dieſer Ausdruck $= 0$ geſetzt, giebt $z = \frac{Q \pm \sqrt{(QQ - ppqq)}}{qq}$ welches unmöglich wird, wenn $Q < pq$; Nun iſt jeder Sinus oder Coſinus kleiner als der Sinus totus $= 1$; und für alle mögliche Bogen von 0 an, bekommen die Sinus alle mögliche Werthe von 0 bis 1. Man nenne alſo φ einen Winkel und ſetze $Q = pq. \cos \varphi$ ſo iſt allemahl Q kleiner als pq. Weil nun $QQ - ppqq = ppqq. (\cos \varphi^2 - 1)$ ſo iſt $qz = p (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})$ und die beyden unmöglichen Factoren des dreytheilichten Products $pp - 2pqz. \cos \varphi + qqzz$ ſind $qz - p. (\cos. \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})$ und $qz - p. (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$

390. Aufg. Die ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 \ldots$ in ihre unmögliche Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Man muß zu dieſer Abſicht die Gröſſen p; q; und φ, ſo beſtimmen, daß das dreytheilichte Product (389) ein Factor der Function wird. Denn ſo giebt jede Beſtimmung von p; q; und φ; zweene unmögliche Factoren. (389) Dieſes geſchieht nun, wenn man in die Function, ſtatt z einmahl $\frac{p}{q} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi. \sqrt{-1})$ und denn $\frac{p}{q} (\cos \varphi - \sin \varphi. \sqrt{-1})$ ſetzt. Denn ſo

giebt

giebt jedes dieſer Verfahren eine Gleichung, und man hat alſo zwo Gleichungen, aus denen ſich die angenommenen Gröſſen $\frac{p}{q}$ ſtatt deren ich r ſchreiben will, und φ finden.

II. Aus (337) ſind die erſte; zweyte, dritte, u. ſ. w. Potenzen von z; folgende

für den erſten Factor

$$\frac{p}{q} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$$

$$\frac{pp}{qq} \cdot (\cos 2\varphi + \sin 2\varphi \sqrt{-1})$$

$$\frac{p^3}{q^3} \cdot \cos 3\varphi + \sin 3\varphi \sqrt{-1})$$

u. ſ. w.

Für den zweyten Factor hat der unmögliche Theil nur — vor ſich.

III. Dieſe Werthe alſo ſtatt der Potenzen von z in die Function (I) geſetzt, kömmt folgendes, wo ich e ſtatt $\sqrt{-1}$ ſchreibe.

$$o = \alpha + \beta r. \begin{cases} + \cos \varphi \\ + e \sin \varphi. \end{cases} + \gamma rr. \begin{cases} + \cos 2\varphi .. \\ + e. \sin 2\varphi. \end{cases}$$

$$o = \alpha + \beta r. \begin{cases} + \cos \varphi \\ - e. \sin \varphi \end{cases} + \gamma rr. \begin{cases} + \cos 2\varphi .. \\ - e. \sin 2\varphi. \end{cases}$$

IIII. Wenn die beyden Gleichungen addirt werden, ſo heben ſich die unmöglichen Theile in

ihnen

ihnen auf, zieht man aber die unterſte von der oberſten ab, ſo heben ſich die möglichen Theile auf, und man kann alles mit 2 e dividiren. So entſtehen folgende beyde neue Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r.\ \text{coſ}\ \varphi + \gamma rr.\ \text{coſ}\ 2\varphi + \delta r^3.\ \text{coſ}\ 3\varphi \ldots$$

$$0 = \quad + \beta r.\ \text{ſin}\ \varphi + \gamma rr.\ \text{ſin}\ 2\varphi + \delta r^3.\ \text{ſin}\ 3\varphi.$$

Wenn man alſo r und φ aus dieſen beyden Gleichungen beſtimmt, ſo hat man den dreytheilichten Factor, und die beyden unmöglichen.

V. Wie in Alg. 613. wird erwieſen, daß coſ φ = coſ $(\varphi + 2h\pi)$ wenn h eine ganze bejahte Zahl und π den halben Umfang für den Halbmeſſer 1; bedeutet. Denn es ſey Alg. 1. Taf. 5 F. der Bogen LM = φ, ſo gehört ſein Coſinus OE auch zum Bogen LMNHLM = LM + 2π; und ſo zu LM + 4π u. ſ. w. Aber Coſ $(\varphi + (2h - 1)\pi) = -$ coſ φ; (Trig. 3. Erkl. 3. Z.)

VI. Wäre $\varphi = 2h\pi$ wo h auch = 0 für Φ = 0 ſeyn kann; ſo wird coſ φ = 1 und ſin φ = 0 und ſo für jede ganze bejahte Zahl η; coſ $\eta\varphi = 1$; ſin $\eta.\varphi = 0$. In dieſem Falle werden die beyden unmöglichen Factoren (389) gleich und möglich, jeder nähmlich = qz — p; und ihr Product = $(qz - p)^2$. Es folgt aber alsdenn nicht, daß ſich die Function (I) mit dieſem Quadrate dividiren läſſt. Denn daß ſie ſich mit

dem

dem dreytheilichten Producte (389) dividiren lieſſe, folgte nur daraus, weil man in ſie jeden Factor dieſes Products ſetzen, und dadurch die beyden Gleichungen (III) erhalten konnte, aus denen die beyden (IIII) geſchloſſen wurden, deren eine φ die andere r beſtimmte. In gegenwärtigem Falle nun giebt der (II) gebrauchte Satz auch die Wahrheit $(\text{coſ}\,\varphi)^n = \text{coſ}\,n\,\varphi$ weil beyde $= 1$ ſind, aber wenn man alſo dieſen coſ n φ zweymahl ſtatt z in die Function ſetzet, ſo bekömmt man nicht zwo verſchiedene Gleichungen, ſondern nur eine zweymahl. Man iſt alſo auch nicht berechtiget anzunehmen, daß ein Product aus dieſem einzigen Factor mit ſich ſelbſt in der Function enthalten iſt, ſondern nur daß er ſelbſt darinnen enthalten iſt.

VII. Für $\varphi = (2h + 1)\pi$ iſt $\text{coſ}\,\varphi = -1$; $\text{ſin}\,\varphi = 0$; und jeder unmögliche Factor verwandelt ſich in den möglichen $p + qz$ der ebenfalls allein zu behalten, und nicht ſein Quadrat zu brauchen iſt.

VIII. Weil Alg. I. T. 5. F. coſ LMNHLM $=$ coſ LMNH; oder $\text{coſ}\,(2\pi + LM) = \text{coſ}\,(2\pi - LM)$ ſo iſt auch (V) $\text{coſ}\,(2h\pi + LM) = \text{coſ}\,(2h\pi - LM)$ oder Bogen, die zuſammen ein Vielfaches des Umkreiſes ausmachen, haben einerley Coſinus.

391. Exempel. $a^n + z^n$ zu zerfällen. Hier ſind die beyden Gleichungen $0 = a^n + r^n.\,\text{coſ}\,n\,\varphi$ und

φ und $o = r^n . \sin n \varphi$. Die letztere giebt $\sin n \varphi = o$; alſo iſt $n \varphi$ entweder $(2k + 1) \pi$ oder $2k\pi$; wo k eine ganze bejahte Zahl und π den halben Umfang für den Halbmeſſer 1 bedeutet. In dem erſten Falle iſt $\cos n \varphi = - 1$ im letzten $= + 1$ wie aus Trigon. 3. Erkl. 3. Zuſ. erhellt. Nähme man das letzte, ſo käme $a^n + r^n = o$ welches bey einem geraden n keinen möglichen Werth für r, und bey einem ungeraden nur einen verneinten gäbe. Man nimmt alſo das erſte; oder $a^n - r^n = o$ und $r = a$; oder $p = a$; $q = 1$; $\varphi = \frac{2k+1}{n} . \pi$ und der geſuchte Factor iſt $aa - 2az. \cos \frac{2k+1}{n} \pi + zz$. Nun kann man ſtatt k jede ganze bejahte Zahl ſetzen, und ſo bekömmt man verſchiedene Factoren.

392. Es ſey I) n gerade; und $2k + 1$ gröſſer als n; ſo muß es um eine ungerade Zahl gröſſer ſeyn. Dieſe ſey $= hn + 2g + 1$ wo h gerade oder ungerade oder auch $= o$ ſeyn mag, und $2g + 1 < n$ ſeyn muß. So iſt $2k + 1 = (1 + h). n + 2g + 1$ und $\frac{2k+1}{n} \pi = (1 + h) \pi + \frac{2g+1}{n} \pi$. und $\cos \frac{2k+1}{n} \pi = \pm \cos \frac{2g+1}{n} \pi$ nachdem $h + 1$ gerade oder ungerade

iſt

iſt (391; V). Nun muß $g < \frac{1}{2} n - \frac{1}{2}$ ſeyn, alſo iſt der gröſſte Werth, den g als eine ganze Zahl haben kann, $= \frac{1}{2} n - 1$ und ſein kleinſter Werth kann $= 0$ ſeyn; alſo hat es $\frac{1}{2}$ n Werthe, und giebt folglich $\frac{1}{2}$. n Factoren von der Form

$$aa - 2az. \cos \frac{2g+1}{n} \pi + zz;$$ Nun kann $a^n + z^n$ nicht mehr als $\frac{1}{2}$ n Factore von dieſer Form haben; weil das Product aus ſo vielen ſchon die Potenz n von z giebt; Folglich darf man für $2k + 1$ keine ungeraden Zahlen ſetzen, die gröſſer als die gerade n ſind. Auch würden ſolche Zahlen entweder eben die vorigen Coſinus oder nur ihre entgegengeſetzten geben.

II. n ungerade: Iſt da $2k + 1$ gröſſer, ſo kann es um eine ungerade oder um eine gerade Zahl gröſſer ſeyn, als ein Vielfaches von n. Im erſten Falle ſey $2g + 1 < n$ und $2k + 1 = 2hn + 2g + 1$ (denn das Vielfache n von muß gerade ſeyn, daß es mit einem Ungeraden was Ungerades ausmacht,) alſo $\frac{2k+1}{n} \pi$

$$= 2h\pi + \frac{2g+1}{n} . \pi$$ und $\cos \frac{2k+1}{n} \pi = \cos \frac{2g+1}{n} \pi$. Es iſt aber $g < \frac{n-1}{2}$ alſo der gröſſte Werth von g als einer ganzen

Zahl; $= \frac{n-1}{2} - 1$; der kleinſte 0; alſo giebt es $\frac{n-1}{2}$ Werthe für g, oder ſo viel dreytheilichte Factoren, die zuſammen $n - 1$ zweytheilichte unmögliche enthalten, dazu kömmt noch der zweytheilichte mögliche $a + z$ für $2k + 1 = n$ (391. VII;)

Im zweyten Falle iſt $2k + 1\ (2h + 1)n + 2g$ alſo $\frac{2k+1}{n}\pi = (2h+1)\pi + \frac{2g}{n}\pi$ und $\text{Coſ}\,\frac{2k+1}{n}\pi = -\text{Coſ}\,\frac{2g}{n}\pi$. Hier iſt von $2g$ der gröſſte Werth $n - 1$ alſo von g; $\frac{n-1}{2}$; ſo viel verſchiedene Werthe hat alſo g; weil es nicht $= 0$ ſeyn kann; dieſes giebt ſo viel dreytheilichte Factoren; und dazu noch den zweytheilichten $a + z$ für $2k + = n$. Alſo darf man hier ſtatt k nur alle Werthe von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ ſetzen; und bekömmt dadurch $\frac{n-1}{2}$ dreytheilichte und einen zweytheilichten Factor.

393. Für gerade n; I) $n = 2$; da kann k nichts anders als $= 0$ ſeyn (392; I) alſo giebt es

es den einzigen Factor $aa + zz$ weil $\frac{2k+1}{n} = \frac{1}{2}$ und $Coſ \frac{1}{2}\pi = 0$. II) $n = 4$; die Werthe von k; 0; 1; alſo die Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{4}\pi + zz$; $aa - 2az. coſ \frac{3}{4}\pi + zz$. III) $n = 6$; die Werthe von $g = 0$; 1; 2; alſo die Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{6}\pi + zz$; $a^2 - 2az. coſ \frac{3}{6}\pi + z^2$; $aa - 2az. coſ \frac{5}{6}\pi + zz$.

394. Für ungerade n; I) $n = 1$; kann offenbahr keinen dreytheilichten Factor geben. II) $n = 3$; die Werthe von k; (392. II;) 0; 1; Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{3}\pi + zz$ und $a + z$. III) $n = 5$; Werthe von k; 0; 1; 2; Factoren $aa - 2az. coſ \frac{1}{5}\pi + zz$; $aa - 2az. coſ \frac{3}{5}\pi + zz$; $a + z$.

395. Zweytes Exempel. Für $a^n - z^n$ giebt eben das Verfahren (392) ſin $n\varphi = 0$ alſo $n\varphi$ = nun nicht $(2k+1)\pi$ ſondern $2k\pi$ damit $coſ\, n\varphi = +1$ und $a^n - r^n = 0$ und wieder $r = a$ wird. So iſt der Factor $aa - 2az. coſ \frac{2k}{n}.\pi + zz$; wo man ſtatt $2k$ alle gerade Zahlen, die nicht gröſſer als n ſind, ſetzen darf. Für $k = 0$ kömmt der Factor $a - z$. Iſt n gerade, ſo giebt $2k = n$ den Factor $a + z$.

396. Anm. Dieſes (392...395) ſtimmt mit den Sätzen Alg. 237...247 überein. So ſind in 395; für $n = 3$; die Werthe von k; 0 und 1; alſo die

beyden Factoren a — z und aa — 2az. coſ $\frac{2}{3}$ + π zz. Es iſt aber $\frac{2}{3}$ π = 120 Gr.; alſo coſ $\frac{2}{3}$ π = — coſ 60 Gr. = — $\frac{1}{2}$ und der zweyte Factor wird aa + az + zz; alles vollkommen wie in 240; wenn man ſtatt des dortigen y; f; hier a; z; ſetzet. Mehr Exempel und Anwendungen der Aufgabe 389; findet man beym Euler Introd. L. I. cap. 9.

Anwendung dieſer Lehren auf die Integrationen.

397. Aufg. **Wenn man die dreytheilichten Factore des Nenners von $\frac{Mdx}{N}$ hat; die Integration dieſer Formel zu bewerkſtelligen.**

Aufl. I. Es ſey ein ſolcher dreytheilichter Factor nach 389; pp — 2pqx. coſ φ + qqxx; dieſer in ſeine einfachen zerfällt, giebt folgende beyde Theile des Integrals.

$$+ \int \frac{A\,dx}{qx - p.(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)}$$

$$+ \int \frac{B\,dx}{qx - p.(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)}$$

II) Die beſtändigen Gröſſen der Zähler muß man nach 386. beſtimmen. Es ſey alſo überhaupt $\frac{dN}{dx}$ = L auch $\frac{p}{q}$ = r ſo giebt $\frac{M}{L}$ die Gröſſe A, wenn man darinnen r. (coſ φ + √ — 1. ſin φ) und

und die Gröſſe B wenn man darinnen r. (coſ φ $- \sqrt{-1}$. ſin φ) ſtatt x ſetzt.

III) Ein unbeſtimmtes Glied von M oder von L heiſſe $\eta x^{\varkappa}$; ſo verwandelt ſich dieſes, wenn man darinnen (337) $r^{\varkappa}$. (coſ k $\varphi \pm \sqrt{-1}$ ſin k φ) ſtatt $x^{\varkappa}$ oder r (coſ $\varphi \pm \sqrt{-1}$. ſin $\varphi)^{\varkappa}$ ſetzt, in η. $r^{\varkappa}$. coſ k $\varphi \pm \eta$. $r^{\varkappa}$. $\sqrt{-1}$. ſin φ. Jedes Glied dieſer Gröſſen giebt alſo einen möglichen und einen unmöglichen Theil, und ſo verwandelt ſich jede der beyden Gröſſen, L; M; in eine, die aus zwey Stücken, einem möglichen und einem unmöglichen beſteht. Jenes kömmt heraus, wenn man überall $r^{\varkappa}$ coſ k φ; und dieſes, wenn man überall $r^{\varkappa} \sqrt{-1}$. ſin k φ ſtatt $x^{\varkappa}$ ſetzt. Man ſetze, jene möglichen heiſſen $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{L}$; und dieſe unmöglichen $m \sqrt{-1}$; $l \sqrt{-1}$ Weil nun das obere Zeichen für A, das untere für B gilt (II) ſo iſt $A = \frac{\mathfrak{M} + m \sqrt{-1}}{\mathfrak{L} + l \sqrt{-1}}$ und B $= \frac{\mathfrak{M} - m \sqrt{-1}}{\mathfrak{L} - l \sqrt{-1}}$

IIII) Nun geben die beyden Theile des Integrals (I) zuſammen gerechnet

$$\int \frac{\left.\begin{matrix} A \\ + B \end{matrix}\right\} . (qx - p. \cos\varphi) \left.\begin{matrix} + A \\ - B \end{matrix}\right\} . p. \sin\varphi \sqrt{-1}}{qqxx - 2pqx. \cos\varphi + pp} dx$$

 V) Des

V) Des Bruches erſter Theil giebt ſogleich das Integral $\frac{A+B}{2q} \cdot l\,(qqxx - 2pqx.\cos\varphi + pp)$ (218)

VI) Zweytens $(A - B).\ p \sin\varphi.\ \sqrt{-1}.$ $\frac{dx}{qqxx - 2pqx.\cos\varphi + pp}$ wird offenbahr ein Element eines Bogens von einem Kreiſe ſeyn, wenn es ſich folgendergeſtalt $\frac{du}{uu+1}$ ausdrucken läſſt. (299) Dieſes zu bewerkſtelligen, ſchaffe man wie Alg. 282 das zweyte Glied des Nenners weg. Es ſey $qx = u + p.\cos\varphi$ alſo $dx = du : q$; und

$$\frac{dx}{qqxx - 2p.\cos\varphi.\ qx + pp} =$$

$$\frac{du : q}{uu + pp.\sin\varphi^2} = \frac{1}{qp.\sin\varphi}.$$

$$\frac{\frac{du : p.\sin\varphi}{uu}}{pp.\sin\varphi^2 + 1}$$ davon das Integral =

$$\frac{1}{qp.\sin\varphi}.\ \text{Arc tang}\ \frac{u}{p.\sin\varphi} = \frac{1}{qp\sin\varphi}$$

Arc tang $\frac{qx - p\cos\varphi}{p.\sin\varphi}$. Folglich iſt das Integral

tegral des zweyten Theils $(A-B).p.\sqrt{-1}.\sin\varphi.$

$$\frac{1}{qp.\sin\varphi}.\ \text{Arc tang}\ \frac{qx-p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi}$$
$+ \text{Const.}$

VII) Für $x=0$ giebt dieſes Integral den Bogen $\text{Arc tang} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{Arc}\,(-\cot\varphi) = 90^\circ + \varphi.$ Soll alſo das Integral für $x=0$ verſchwinden, ſo ſetze man, nachdem der Kürze wegen ein Buchſtabe Q ſtatt des Coefficienten iſt geſchrieben worden; das Integral Q. (Arc tang $\frac{qx-p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi} - \text{Arc tang} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$).

Die Tangente des Unterſchiedes dieſer Bogen iſt nach Trig. 19. S. 4. Z. $\left(\frac{qx-p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) : \left(\frac{p.\cos\varphi - qx}{p.\sin\varphi}.\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + 1\right)$

oder $\frac{qx.\sin\varphi}{p-qx.\cos\varphi}.$

VIII) Nun iſt $A+B = \frac{2.(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M} + l\,m)}{\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll}$

und $A-B = 2.\ \frac{(\mathfrak{L}\,m - l\,\mathfrak{M})}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}+ll}.\sqrt{-1}$

alſo das völlige Integral V; VII; VIII;

$$\frac{(\mathfrak{L}.\,\mathfrak{M} + l.\,m)}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll).\,q} \cdot l\,(qqxx - 2pqx.\,\mathrm{coſ}\,\varphi + pp)$$

$$+ \frac{2\,(l\mathfrak{M} - \mathfrak{L}m)}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll).\,q}\ \text{Arc tang}\ \frac{qx.\,\mathrm{ſin}\,\varphi}{p - qx\,\mathrm{coſ}\,\varphi.}$$

welches ſich für $x = o$ in $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M} + lm}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll).\,q} \cdot 2\,lp$ verwandelt. Dieſe Gröſſe muß alſo noch als Conſt abgezogen werden, wenn das Integral für $x = o$ verſchwinden ſoll.

VIIII) Dieſe Coefficienten werden ſo beſtimmt:

$\left.\begin{matrix} M = \mathfrak{M} \\ L = \mathfrak{L} \end{matrix}\right\}$ für $x^k = r^k.\,\mathrm{coſ}\,k.\,\varphi$

$\left.\begin{matrix} M = m \\ L + l \end{matrix}\right\}$ für $x^k = r^k.\,\mathrm{ſin}\,k.\,\varphi$

wo $L = \frac{dN}{dx}$ und $r = \frac{p}{q}$ (III)

X) Aus Trig. 19. S. kann man auf die Vermuthung gerathen, daß ſich die Coefficienten durch Sinus von Winkeln ausdrucken laſſen. Es heiſſen zweene gewiſſe Winkel λ; μ und es ſey

$$\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll)}} = \mathrm{coſ}\,\lambda;\ \frac{l}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll)}} = \mathrm{ſin}\,\lambda$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm)}} = \mathrm{coſ}\,\mu;\ \frac{m}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm)}}$$

$= \mathrm{ſin}\,\mu$ Ferner ſey $\frac{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + mm)}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + ll)}} = \mathfrak{K}$ ſo

iſt

iſt $\sin(\lambda-\mu) = \frac{\mathfrak{l}\,\mathfrak{M} - \mathfrak{m}\,\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})}.\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}$

$\cos(\lambda-\mu) = \frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\,\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})}\,\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}$

Die Winkel λ; μ; aber ſind durch die gegebenen Gröſſen gegeben.

XI) Alſo iſt das Integral (VIII) nur die Coefficienten einfacher ausgedruckt

$\frac{\mathfrak{K}.\cos(\lambda-\mu)}{q}.\,l\,(qqxx - 2pq.\cos\varphi.\,x + pp) + \frac{2.\,\mathfrak{K}.\,\sin(\lambda-\mu)}{q}.\,\text{Arc tang}\,\frac{qx.\,\sin\varphi}{p - qx.\,\cos\varphi}$

398. I. Aufg. $\frac{x^m dx}{\alpha + x^n}$ zu integriren; wo m eine bejahte Zahl, und kleiner als n (357) iſt.

Aufl. Hier iſt $M = x^m$; $\frac{dN}{dx} = n\,x^{n-1} = L$ und der allgemeine Factor des Nenners aus 392; $\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x.\cos\frac{2k+1}{n}\pi.\sqrt[n]{(\alpha + xx)}$; alſo $p = \sqrt[n]{\alpha} = r$ weil $q = 1$; $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$; Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\cos m\varphi$; $\mathfrak{m} = r^m.\sin m.\varphi$; $\mathfrak{L} = n.\,r^{n-1}.\cos(n-1)\varphi$; $\mathfrak{l} = n.\,r^{n-1}.$ ſin

ſin (n − 1). φ; $\sqrt{}$ (𝔐𝔐 + mm) = r^m; $\sqrt{}$ (𝔏𝔏 + ll) = n. r^{n-1}; Alſo 𝔎 = $\frac{1}{n. r^{n-m-1}}$ $= \frac{r^{m+1}}{n\alpha}$. Ferner coſ λ = coſ (n − 1) φ; coſ μ = coſ m. φ alſo $\lambda - \mu = (n - 1 - m). \varphi$. Folglich giebt jeder dreytheilichte Factor des Nenners folgendes Integral

$$\frac{\cos \frac{n-m-1}{n}(2\varkappa+1).\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}} . l\left(\sqrt[n]{}(\alpha\alpha - 2x.\sqrt[n]{\alpha}.\cos.\frac{2\varkappa+1}{n}.\pi + xx)\right)$$

$$+ \frac{2.\sin\frac{n-m-1}{n}.(2\varkappa+1).\pi}{n.\alpha^{(n-m-1):n}}$$

$$A\frac{\text{tang } x.\sin(2\varkappa+1).\pi:n}{\sqrt[n]{\alpha} - x.\cos(2\varkappa+1).\pi:n}$$

Hier bekömmt man alſo alle Integrale, wenn man ſtatt 2k + 1 alle ungerade Zahlen, die kleiner als n ſind, ſetzt. (392) Iſt n ungerade, ſo giebt 2k + 1 = n das Integral des zweytheilichten Factors (392; II) Da denn ſin 2k + 1) π : n verſchwindet, und alſo der Theil des Integrals, der auf den Kreis ankam, wegfällt.

II. Zuſ.

II. Zuſ. Für $\frac{x^{-m}\,dx}{\alpha + x^n}$ ſetze man $x = 1 : y$; dieſes giebt das Differential $= -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^{m+n-2}}{1:\alpha + y^n} \cdot dy$ welches ſich nach 398 integriren läſſt, nachdem man die ganze Function (357) daraus abgeſondert hat.

III. Aufg. $\frac{x^m\,dx}{\alpha - x^n}$ zu integriren.

Aufl. $M = x^m$; $\frac{dN}{dx}$ oder $L = -\,n x^{n-1}$ und des Nenners allgemeiner Factor aus (395) $\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x.\cos\frac{2k}{n}\pi.\sqrt[n]{\alpha} + xx$ alſo

$q = 1$; $p = r = \sqrt[n]{\alpha\alpha}$; $\varphi = \frac{2k}{n}\pi$.

Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\cos m.\varphi$; $\mathfrak{m} = r^m.\sin m.\varphi$; $\mathfrak{L} = -\,n r^{n-1} \cos(n-1)\varphi$; $\mathfrak{l} = -\,n.\,r^{n-1} \sin(n-1)\varphi$; $\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + \mathfrak{m}\mathfrak{m})} = r^m$; $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})} = -\,n r^{n-1}$; Daß man das Zeichen — gebrauchen muß erhellt folgendergeſtalt: Für $\mathfrak{l} = 0$ iſt $(n-1)\varphi = 2k\pi$ oder $= (2k+1)\pi$ und $\cos(n-1)\varphi = \pm 1$ das obere Zeichen für den erſten, das untere für den zweyten Fall. (391. V. VI.). Alſo iſt alsdenn mit eben der Zweydeutigkeit $\mathfrak{L} = \mp r^{n-1}$; Aber $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}$ wird hier $\sqrt{nn\,r^{2n-1}.\cos(n-1)\varphi^2}$ und alſo ein Product aus ± 1 in einen Factor,

tor, deſſen Gröſſe $n r^{n-1}$ iſt, deſſen Zeichen aber — seyn muß, damit dieſes Product $\mp n r^{n-1} = 1$ ſeyn kann. Folglich kömmt $K = - \frac{1}{n . r^{n-m-1}} = - \frac{1}{n . \alpha^{(n-m-1):n}}$ und $\lambda = (n-1)\varphi$; $\mu = m\varphi$; $\lambda - \mu = \frac{(n-1-m) . 2\varkappa\pi}{n}$ und Coſ $(\lambda - \mu) = \cos \frac{m+1}{n} . 2\varkappa\pi$ (391. VIII.) alſo giebt jeder dreytheilichte Factor, das Integral

$$\frac{-\cos\frac{(m+1) . 2\varkappa\pi}{n}}{n\alpha^{(n-m-1):n}} . l(\sqrt[n]{\alpha\alpha} - 2x\sqrt[n]{\alpha} . \cos\frac{2\varkappa}{n}\pi + xx)$$

$$\frac{-2 . \sin\frac{m+1}{n} . 2k\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}} . \text{Arc tang} \frac{x . \sin(2\varkappa\pi : n)}{\sqrt[n]{}(\alpha - x . \cos\pi : n)}$$

wo man ſtatt $2k$ alle gerade Zahlen von 0 an (352) ſetzt, die kleiner als n ſind (395) $2k = 0$ giebt den Factor $\sqrt[n]{\alpha} - x$ (395) alſo das Integral $\frac{-1}{n\alpha^{(n-m-1):n}}$.

l ($\sqrt{}$

$l(\sqrt[n]{\alpha} - x)$ Iſt n gerade, ſo giebt $2k = n$ das Integral aus dem zweytheilichten Factor und wegen $\sin \frac{2k}{n} \cdot \pi = 0$ fällt der Theil, der auf den Kreis ankömmt, weg. Aber ſtatt des alsdenn herauskommenden $\sqrt[n]{\alpha\alpha} + 2x . \sqrt[n]{\alpha} + xx$ ſchreibe man nur (395) $\sqrt[n]{\alpha} + x$; alſo iſt dieſes Integral $\frac{-\cos(m+1)\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}} \cdot l(\sqrt[n]{\alpha} + x)$

IIII. Zuſ. $x^{-m}dx : (\alpha - x^n)$ wird wie in 399; auf $+ \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^{m+n-2}dy}{\frac{1}{\alpha} - y^n}$ gebracht.

V. Anm. Die Integration des Differentials, da der Nenner $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ iſt, findet man beym Euler Comm. Petrop. T. XIIII. (338).

VI. Aus dem bisherigen erhellt, daß ſich rationale Differentiale integriren laſſen, wenn man bey gebrochnen, die Zerfällung des Nenners in Factore vorausſeẞt. Imgleichen, daß das Integral entweder blos durch algebraiſche Gröſſen oder, durch tranſcendentiſche, wie Kreisbogen, und Logarithmen, gegeben iſt. Im erſten Falle heiſſt man es algebraiſch, im zweyten tranſcendentiſch.

dentiſch. Nun wird alſo begreiflich werden warum man irrationale rational zu machen ſucht (261) wovon gegenwärtig einiges folgt.

Ueber die Integrirung der Differentiale die eine zweytheilichte Irrationalgröſſe enthalten.

meiſtens nach Euler Inſtit. calc. integr. Vol. I. Sect. I. cap. II.

399. Aufg. Die Umſtände zu beſtimmen unter denen ſich das Differential (248) rational machen läſſt.

Aufl. I. Dieſes findet nach 248 (III) ſtatt wenn $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl iſt.

II. Aber auch wenn eben daſſelbe eine verneinte ganze Zahl iſt; da verwandelt ſich der Ausdruck in $\frac{z^p\,dz}{(z-a)^{\frac{1-(m+1)}{n}} \cdot n b^{\frac{m+1}{n}}}$

wo die Potenz der veränderlichen Gröſſe im Diviſor, einen ganzen bejahten Exponenten hat.

III. Um deutlicher auszudrucken, daß p ein Bruch ſeyn ſoll, ſetze man es $= \frac{\mu}{\nu}$ und

$(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = x^{\frac{n\mu}{\nu}} z^\mu$; dieſes giebt $x = \frac{1}{a^n}$

$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^{\nu} - b)^{\frac{1}{n}}}$, und das Differential (248) verwandelt ſich in

$$\frac{-\nu.\, a^{(m+1).\, n + \mu : \nu}\, z^{\mu + \nu - 1}\, dz}{n\,(z^{\nu} - b)^{\frac{m+1}{n} + \frac{\mu}{\nu} + 1}}$$

welches alſo rational iſt, wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl iſt.

IIII. Ein paar eigentliche Brüche, deren jeder in ſeinen kleinſten Zahlen ausgedruckt iſt, machen zuſammen nicht 1 aus, wenn ſie nicht einerley Nenner haben; Hievon kann man ſich leicht überzeugen. Sie machen aber auch gewiß zuſammen nicht 2 aus; alſo überhaupt keine ganze Zahl.

Wenn ein paar uneigentliche Brüche, ebenfalls jeder in ſeinen kleinſten Zahlen ausgedruckt ſind, ſo beſteht jeder aus einer ganzen Zahl und einem eigentlichen Bruche der ſich nicht auf heben läſſt. Beyder Summe alſo, iſt die Summe von zwo ganzen Zahlen, und zween eigentlichen Brüchen wie vorhin betrachtet wurden; alſo keine ganze Zahl.

V. Alſo iſt das Differential (III) nicht anders rational als wenn $n = \nu$ und noch dazu $m + 1 + \mu$ ein vielfaches davon iſt.

VI. Solchergeſtalt läſſt ſich das Differential (248) rational machen, wenn entweder I, II; oder III ſtatt findet. Das iſt nicht ſo zu verſtehn, daß das Differential wenn es durch eine der erſten Arten rational wird auch durch die zweyte rational wird. Z. E. das in 250; wo $n = 1$; $\mu = 1$; $\nu = 2$; bekäme hier nach III keinen rationalen Ausdruck.

VII. Wenn n, α, β, ganze Zahlen ſind, ſo iſt in der Vorausſetzung (III) auch $\frac{m+1}{n} \pm \alpha$. $n + \frac{\mu}{\nu} \pm \beta$ iſt eine ganze Zahl. Wenn alſo dieſe Vorausſetzung ſtatt findet, ſo läſſt ſich auch $x^{m \pm \alpha n}. (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu} \pm \beta}. dx$ rational machen.

VIII. Man betrachte alſo nur

$x^m. (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}. dx$ wo $m < n$; $\mu < \nu$ wenn ſich dieſes nach (III) rational machen läſſt, ſo läſſt ſich auch das Differential in (VII) rational machen.

VIIII. Läſſt ſich nun das Differential (VIII) rational machen, ſo muß es erſtlich ſo ausſehen:

$x^m. (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} dx$, zweytens muß $m + 1$

$+ \mu$

$+\mu = n$ ſeyn. Es läſſt ſich alſo folgendergeſtalt ausdrucken

$x^{n-\mu-1}. (a+bx^n)^{\frac{\mu}{n}} dx$ wo $\mu < n$; und ſich daraus noch andere Differentiale rational machen laſſen (VII)

X. Exempel. Es ſey $n = 3$; die Formel

$x^{2-\mu}. (a+bx^3)^{\frac{\mu}{33}} dx$ begreift alsdenn folgende unter ſich, nach dem man $\mu = 2$ oder $= 1$ ſetzt

$(a+bx^3)^{\frac{2}{3}} dx$; $(a+bx^3).^{\frac{1}{3}} x dx$

XI. Nach Eulers Urtheile a. a. O. 110 §. läſſt ſich das Differential (248) auf keine andere Arten als auf die angeführten rational machen. Aber auch alsdenn, wenn dieſes nicht angeht iſt es vortheilhaft, die Integration anderer Differentiale, wo möglich auf dieſes Integration zu bringen, weil man alsdenn, wenn man dieſes auf irgend eine Art integrirt hätte, auch die andern integrirt wären.

400. Aufg. $\int x^{m+n}. (a+bx^n)^p dx$ auf $\int x^m. (a+bx^n)^p dx$ zu bringen.

Aufl. I. Man ſetze $a+bx^n = u$ alſo $nbx^{n-1}. dx = du$. Nun betrachte man $x^{m+1}. u^{p+1}$; davon iſt das Differential $(p+1). nbx^{m+n} u^p dx + (m+1). u^{p+1}. x^m dx$. Weil im letzten Theile $u^{p+1} = u^p. (a+bx^n)$, ſo verwandelt ſich das Differential von

 x^{m+1}.

$x^{m+1}. u^{p+1}$ in $(np+n+m+1). bx^{m+n}. u^p dx + (m+1) a u^p x^m dx$; Folglich dieſer beyden Differentiale, ihre Integrale zuſammen $x^{m+1} u^{p+1}$ und wenn man hieraus das Integral von $x^{m+n} u^p dx$ ſucht, ſo findet ſich

$$\int x^{m+n} u^p dx = \frac{x^{m+1}. u^{p+1}}{(np+m+n+1) b}$$

$$-\frac{(m+1). a}{(np+m+n+1) b}. \int x^m u^p dx$$

II. Zuſ. Es iſt auch

$$\int x^m u^p dx = \frac{x^{m+1} u^{p+1}}{(m+1) a} - \frac{(np+m+n+1) b}{(m+1) a}$$

$$\int x^{m+n} u^p dx$$

Weil nun m ganz willkührlich und durch die übrigen Gröſſen gar nicht beſtimmt iſt, ſo ſchreibe man m — n ſtatt m; dieſes giebt

$$\int x^{m-1} u^p dx = \frac{x^{m+1-n}. u^{p+1}}{(m+1) a}$$

$$-\frac{(np+m+1) b}{(m+1-n.) a} \int x^m u^p dx$$

III. In I ſchreibe man m + n ſtatt m; ſo hat man $\int x^{m+2n}. u^p dx$ durch $\int x^{m+n} u^p dx$ und folglich durch $\int x^m u^p dx$; und eben ſo wenn man nach und nach m + 2n; m + 3n; u. ſ. w. ſtatt m ſchreibt, überhaupt

$\int x^{m \pm \alpha n}. u^p dx$ durch $\int x^m. u^p dx$;

Die

Die Integrale wo der Exponent m — α n iſt, folgen eben ſo aus II.

401. Aufg. $\int x^{m}. u^{p+1} dx$ auf $\int x^{m}. u^{p} dx$ zu bringen.

Aufl. I. aus 400; I; iſt wie daſelbſt gleich im Anfange
$d(x^{m+1}. u^{p+1}) = (m+1). x^{m}. u^{p+1} dx + nb. (p+1). x^{m+n}. u^{p} dx$ daraus folgt

$$\int x^{m} u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1}. u^{p+1}}{m+1} - \frac{nb. (p+1)}{m+1} \int x^{m+n}. u^{p} dx$$

Setzt man nun hier ſtatt $\int x^{m+n} u^{p} dx$ ſeinen Werth aus 400; I; ſo kömmt

$$\int x^{m}. u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1}. u^{p+1}}{np+m+n+1} + \frac{n. (p+1) a}{n. (p+1)+m+1}. \int x^{m} u^{p} dx$$

II. Weil $p = \frac{\mu}{\nu}$ ſo folgt, dieſen Werth im Exponenten ſtatt p geſetzt, und aus der Gleichung in (I) das Integral geſucht das ſich hier im zweyten Gliede auf der rechten Hand befindet

$$\int x^{m}. u^{\mu:\nu}. dx = - \frac{\nu. x^{m+1} u^{1+\mu:\nu}}{n. (\mu+\nu). a} + \frac{n(\mu+\nu)+(m+1)\nu}{n. (\mu+\nu). a} \int x^{m} u^{1+\mu:\nu} dx$$

 III.

III. Weil nun wiederum hier μ durch die übrigen Gröſſen gar nicht beſtimmt wird, ſo ſchreibe man $\mu - \nu$ ſtatt μ; und der Ausdruck (II) verwandelt ſich in

$$\int x^m . u^{-1+\mu:\nu} dx = - \frac{\nu . x^{m+1} . u^{\mu:\nu}}{n \mu a}$$

$$+ \frac{n\mu + (m+1)\nu}{n\mu a} \int x^m u^{\mu:\nu} dx$$

Und ſo hat man nach einem Verfahren wie in 400; III; durch $\int x^m u^p dx$ auch die Integrale von $x^m u^{p \pm \beta} dx$

IIII. Jmgleichen 400; III; und 401; III zuſammen genommen, durch eben das Integral, die Integrale von $x^{m \pm \alpha n} . u^{p \pm \beta}$

402. Ex. Die Integrale von

$\frac{x^m dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ zu finden, wo m jede bejahte ganze Zahl ſeyn mag.

Aufl. I. Jn 400; I. iſt

	a	b	μ	ν	p	n
hier	1	-1	-1	$+2$	$-\frac{1}{2}$	2

alſo giebt die dortige Formel, hier

$$\int \frac{x^{m+2}}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx = - x^{m+1} \frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{m+2}$$

$$+ \frac{m+1}{m+2} \int \frac{x^m}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx$$

II. Wenn

II. Wenn m ungerade ſeyn ſoll, ſo ſetze man zuerſt m = 1; Nun iſt $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $= (1 - \sqrt{(1-x^2)})$ wenn es für x = 0 verſchwindet. Solchergeſtalt iſt

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^2(\sqrt{(1-x^2)}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{2}{3}$$

wie in 253; II. Ex. Dieſe algebraiſchen Integrale ſind nähmlich ſchon dorten gefunden worden.

III. Iſt m gerade, ſo iſt ſein kleinſter Werth = 0; und $\int \frac{dx}{\sqrt{(1--x^2)}} = \mathfrak{B}\sin x$ (281)

Alſo $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}\sin x$

Setzt man nun m = 2 ſo wird

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^3\sqrt{(1-x^2)}}{3} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.\,3}{2.\,4}x\right)\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1.\,3}{2.\,4}\cdot\mathfrak{B}\sin x$$

und ſo kann man dieſe Integrale weiter fortſetzen.

403. Ex. Die Integrale von $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zu finden, wenn m jede ganze verneinte Zahl bedeutet.

Aufl. I. Weil eine negative Zahl, um was poſitives vermehrt, der o näher kömmt, oder eine kleinere negative Zahl iſt, ſo bedienet man ſich hier des erſten Ausdrucks in 400; II; es iſt

	p	a	n	b
daſelbſt	p	a	n	b
hier	$-\frac{1}{2}$	1	2	-1

und der Ausdruck wird hier:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{x^{m+1}.\sqrt{(1-x^2)}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} \int \frac{x^{m+2}.dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

II. Für m = o käme was 402; III; gefunden worden. Für m = − 1 würden die Coefficienten rechter Hand, unendlich, weil nun dieſes anzeigt daß die Integration auf Logarithmen ankömmt (219; I) ſo findet man $\int \frac{dx}{x.\sqrt{(1-x^2)}}$ folgendergeſtalt: $d(\sqrt{(1-x^2)} = -\frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ alſo iſt das Differential das integrirt werden ſoll $= -\frac{d\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}$; ſetzt man alſo $\sqrt{(1-x^2)} = z$; ſo iſt es $= \frac{-dz}{1-z^2}$

Davon

Davon iſt das Integral aus (359) ſo genommen daß es für $z = 0$ verſchwindet, $\frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z}$, und alſo $\int\frac{-d\surd(1-x^2)}{x^2}$ oder $\int\frac{dx}{x\surd(1-x^2)}$ ſo genommen daß es für $x = 1$ verſchwindet

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1-\surd(1-x^2)}{1+\surd(1-x^2)} = \tfrac{1}{2}\log\frac{x^2}{(1+\surd(1-x^2))^2}$$

$$= -\log\frac{1+\surd(1-x^2)}{x}$$

III. Auf dieſes logarithmiſche Integral werden alle gegenwärtigen Integrale gebracht, wo m eine verneinte ungerade Zahl iſt. So iſt für $m = -3$

$$\int\frac{dx}{x^3\,dx} = \frac{-\surd(1-x^2)}{2x^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x\surd(1-x^2)}$$

IIII. Wenn $m = -2$; ſo wird (I)

$$\int\frac{dx}{x^2\surd(1-x^2)} = -\frac{\surd(1-x^2)}{x}$$

V. Auf dieſes algebraiſche Integral laſſen ſich alſo alle die bringen, wo m eine verneinte gerade Zahl iſt. So iſt für $m = -4$

$$\int\frac{dx}{x^4\surd(1-x^2)} = \frac{-\surd(1-x^2)}{3x^3}$$

$+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}}$ Dieſe Integrale ſind alſo alle algebraiſch.

VI. Man drucke x durch z (II) aus, alſo $x=\sqrt{(1-z^2)}$; $dx=-\frac{z.dz}{x}$; ſo iſt

$\frac{x^m.dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-(1-z^2)^{\frac{1}{2}.(m-1)}.dz$ und

das Integral $=\frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}.(m+1)}.z}{m+1}-$

$\left(\frac{m+2}{m+1}\right).\int(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}.dz$

VII. Man ſetze $z=\cos\psi$, ſo iſt das Differential $=-(\sin\psi)^{m-1}.d\cos\psi$; $=+(\sin\psi)^m.d\psi$ und das Integral $=$

$\frac{(\sin\psi)^{m+1}.\cos\psi}{m+1}-\left(\frac{m+2}{m+1}\right).\int(\sin\psi)^{m+1}.$ $d\cos\psi$

VIII. Für $m=0$ iſt das Differential $=$

$\frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{-d\cos\psi}{\sin\psi}=+d\psi$; alſo das Integral $=\psi=\mathfrak{B}\sin x$ (402; III) Eben dieſes folgt, nur durch eine weitläuftigere Rechnung, wenn man in dem allgemeinen Integrale (VII) $m=0$, ſetzt, und die 17 Fig. wie in (274) braucht.

IX. Für

IX. Für m = − 1, oder das Differential

$= \frac{-1}{1-z^2} \cdot dz$; iſt

359	a	b	α	$\varkappa$
hie	− 1	0	1	1

daher das Differential $= \frac{-\frac{1}{2}.\,dz}{1-z} - \frac{\frac{1}{2}.\,dz}{1+z}$

davon das Integral $\frac{1}{2}.(\log(1-z) - \log(1+z)) = \frac{1}{2}.\log\frac{1-z}{1+z} = \log \text{tang}\,\frac{1}{2}\,\psi$ aus Trig. 19. S. 10 Zuſ.

X. Läſſt man m durch alle verneinte gerade Zahlen wachſen, ſo folgt nach o, (VIII) zuerſt m = − 2, und von $-\frac{d\,\text{coſ}\,\psi}{\text{ſin}\,\psi^3}$ das Integral = − cot ψ.

XI. Für m = − 4; iſt von $-\frac{d\,\text{coſ}\,\psi}{\text{ſin}\,\psi^5}$ das Integral $= -\frac{\text{coſ}\,\psi}{3.\,\text{ſin}\,\psi^3} - \frac{2}{3}.\cot\psi$

XII. Setzt man zu jeder verneinten geraden Zahl, − 2; daß die nächſtfolgende verneinte heraus kömmt, ſo hat man für jedes Differential in (VII) wo m eine gerade verneinte Zahl, das Integral durch zweene Theile, davon einer unmittelbar gegeben wird, der andre ſummatori-

ſche

ſche durch das nächſtvorhergehende, ſchon gefundene Integral. Aus den nach und nach kommenden Werthen von $m + 1$; $m + 2$; geben ſich auch die beſtimmten Zahlen die ſich bey den ſummatoriſchen Theilen als Coefficienten befinden.

XIII. Den Werth $m = 0$ ausgenommen, ſind die ſummatoriſchen Theile algebraiſch, Functionen von z, und $\surd(1 - z^2)$. Jeder iſt Integral eines Bruches, deſſen Zähler $= - dz$; der Nenner, eine Potenz von $\surd(1 - z^2)$ iſt, deren Exponent eine bejahte ungerade Zahl iſt. Dieſes Differential, iſt alſo irrational, und wird integrirt, ohne es rational zu machen.

XIV. Nun wachſe m durch alle verneinte ungerade Zahlen. Für den erſten Werth dieſer Art ſteht das Integral (IX). Für $m = - 3$ iſt in (VII) das Differential $= \frac{- dz}{(1 - z^2)^2}$: davon das Integral $= \frac{- \cos \psi}{2. (\sin \psi)^2} + \frac{1}{4}. \log \tan \frac{1}{2} \psi$

XV. Für $m = - 5$; iſt das Differential $= \frac{- dz}{(1 - z^2)^3}$, das Integral $= \frac{- \cos \psi}{4. \sin \psi^4} - \frac{3}{8}. \frac{\cos \psi}{\sin \psi^2} + \frac{3}{8}. \log \tan \frac{1}{2} \psi$

XVI. Für jedes Differential alſo, deſſen Zähler $= - dz$ iſt, der Nenner eine Potenz von $\surd(1$

$\sqrt{}(1 - z^2)$ welche eine bejahte gerade Zahl zum Exponenten hat, findet ſich das Integral; immer das wo der Exponent des Nenners um 2 gröſſer iſt, aus dem vorhergehenden. Auch hie giebt ſich ein Geſetz des Fortganges, der Zahlen die ſich bey den Integralen als Coefficienten befinden.

XVII. Dieſe Differentiale ſind alle rational. Ihre allgemeine Formel wäre $\frac{-dz}{(1-z^2)^r}$, wo r jede bejahte ganze Zahl bedeutet. Man könnte alſo den Bruch $\frac{1}{(1-z^2)^r}$ nach (365) zerlegen, und dann nach (387) integriren.

XVIII. Das Differential in (VII) hat das Zeichen —, weil ich es aus dem Ausdrucke deſſen in (403) durch x herleitete. Begreiflich, wenn ein Differential wie (VII) mit dem Zeichen + vorkömmt, bekommen die Integrale Zeichen, denen die ſie in vorſtehenden Ausdrückungen haben entgegengeſetzt.

404. Man findet dieſer Formeln mehr, und auch allgemeine Geſetze für ſie, die nicht ſchwer zu entdecken ſind beym Euler a. a. O. Irrationalgröſſen die noch mehr zuſammengeſetzt wären, laſſen ſich nicht wohl auf einfachere und rationale Geſtalten bringen, oder wenn dieſes angeht entdeckt ſich die Reduction leicht von ſich ſelbſt.

In

In der erſten Ausgabe dieſer Analyſis hatte ich an dieſen Stellen die Integration von $x^m.(a + bx^n)^p dx$ ſo vorgetragen, daß ich das Integral durch eine algebraiſche Reihe und einen ſummatoriſchen Theil ausgedruckt. Ich befolgte darinn: Traité du calcul integral pour ſervir de ſuite à l'analyſe des infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital, par M. de Bougainville le jeune, Par. 1754; 1756; 2 Quartbände P. I. ch. V. VIII; brachte aber einige Verbeſſerungen an. Die Stelle die dieſes einnahm, habe ich dem euleriſchen Verfahren eingeräumt, das bequemer und brauchbarer iſt.

Differentiale, rationale und irrationale, welche ſich durch Kreisbogen, und Logarithmen, integriren laſſen, giebt: Harmonia menſurarum, ſiue analyſis et ſyntheſis, per rationum et angulorum menſuras promotae; accedunt alia opuſcula mathematica per Rogerum Coteſium. Edidit et auxit Robertus Smith, Collegii S. Trinitatis ap. Cantabrigienſes Socius, Aſtron. et Experim. Philoſ. poſt Coteſium Profeſſor. Cantabrig. 1722, 4°. Epiſtola ad amicum de Coteſii inuentis, curuarum ratione quae cum circulo et hyperbola comparationem admittunt. Lond. 1722. Appendix ad epiſtolam

Tractatus de quadratura curuarum Iſ. Newton, welcher einzeln erſchienen iſt, ſich auch bey

N. Op-

N. Optice, Clarks lat. Ueberſ. Lond. 1706 befindet, enthält ebenfalls Fluxionalformeln, deren Fluenten ſich auf Flächen von krummen Linien bringen laſſen.

Integrirung der Differentialgleichungen, wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind.

405. Erkl. Wenn in einer Differentialgleichung, wo y; x; mit ihren Differentialen vorkommen, Glieder ſind, die Producte aus einer Function einer veränderlichen Gröſſe in der andern Differential enthalten, ſo heiſſt die veränderlichen Gröſſen voneinander ſondern (ſeparare indeterminatas;) aus dieſer Gleichung eine andere machen, in deren jedem Gliede, jeder veränderlichen Gröſſe Function nur in ihr Differential multiplicirt wird, oder daß die Gleichung nun ſo ausſieht $Xdx = Ydy$; wo X eine Function von x; Y eine von y iſt.

406. Zuſ. Wenn X; Y rationale Functionen ſind, läſſt ſich jeder Theil dieſer Gleichung nach 385; 397; integriren, oder $\int Xdx = \int Ydy$ finden, welches eine Gleichung zwiſchen x und y giebt. Bey irrationalen Functionen, wie 404 muß zuweilen die Integration auf die Quadratur einer krummen Linie gebracht werden.

407. Zuſ. Wenn die Integrale von Xdx und Ydy, beydes zugleich lauter mögliche Logarithmen,

men, oder lauter unmögliche, das iſt, Kreisbogen ſind, ſo giebt ſich zwiſchen x und y eine algebraiſche Gleichung. Wenn ſie aber zum Theil algebraiſch, oder zum Theil mögliche, zum Theil unmögliche Logarithmen ſind, geht ſolches nicht an.

408. Ex. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 - x^2}$ giebt $\log y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}$ (403; II) wenn $y = 1$ für $x = 0$ ſeyn ſoll. Daraus wird $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

409. Ex. $\frac{dx}{1 + xx} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$ giebt $\mathfrak{B}$ tang $x = \mathfrak{B}$ ſin y (299; 281) $= \mathfrak{B}$ tang $\frac{y}{\sqrt{(1 - yy)}}$; alſo $x = \frac{y}{\sqrt{(1 - yy)}}$ oder $xx. (1 - yy) = yy$.

Befände ſich bey jedem der Exempel (408; 409) noch rechter Hand $x\,dx$; ſo würde bey dem erſten $\log y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} x^2$ bey dem zweyten $\mathfrak{B}$ tang $x = \mathfrak{B}$ ſin $y + \frac{1}{2} x^2$ aus deren keinem ſich eine algebraiſche Gleichung machen läſſt.

Hätte man aber $\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 - y^2}$ ſo käme $\frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y} = \mathfrak{B}$ tang $x = \frac{\sqrt{-1}}{2} . \log$

$\frac{1 - x\sqrt{-1}}{1 + x\sqrt{-1}}$ (328), wo man zwar die Zeichen der Logarithmen wegbringen könnte, aber eine Potenz deren Exponent unmöglich wäre machen müſſte, welches wieder keine algebraiſche Gleichung giebt.

411. Aufg. Wenn in einer Gleichung nicht y ſelbſt, ſondern nur deſſelben erſtes Differential, ferner Functionen von x und deſſelben erſtes Differential vorkommen, die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern.

Aufl. I. Erſter Fall. Wenn ſie nur die erſten Potenzen der Differentiale enthält, ſo muß ſie ſo ausſehen: $Pdx = Qdy$; wo P und Q, Functionen von x allein ſind. Da iſt alſo die Abſonderung der veränderlichen Gröſſen ſogleich geſchehen, weil $\frac{Pdx}{Q} = dy$.

II. Zweyter Fall. Wenn die Differentiale auf höhere Potenzen ſteigen, ſo enthält die Gleichung Producte aus Functionen von x; 1) in Potenzen von dx allein; 2) in Potenzen von dx mit Potenzen von dy multiplicirt; 3) in Potenzen von dy allein; die Exponenten der Differentiale müſſen aber zuſammen allemahl eine Summe ausmachen, weil ſonſten dieſe Producte von ver=

ſchiedenen Graden des Unendlich kleinen wären, und alſo nicht zuſammen eine Gleichung geben könnten. Alſo läſſt ſich eine ſolche Gleichung folgendergeſtalt vorſtellen:

(☉) $P dx^n + Q dx^{n-\alpha}. dy^\alpha + R dy^n = 0$ da P; Q; R; Functionen von x ſind; α kann andere und andere Werthe bekommen und für jeden Werth bekömmt Q auch einen andern Werth. Hier ſey nun $dy = udx$ ſo iſt $P + Qu^\alpha + Ru^n = 0$ alſo u vermittelſt einer algebraiſchen Gleichung durch x gegeben. Folglich kann in der Gleichung $dy = udx$; u als eine Function von x angeſehen werden, und alſo kann man die veränderlichen Gröſſen als von einander geſondert anſehen. Betrachtet man in der algebraiſchen Gleichung zwiſchen u und x; u als die Wurzel, ſo läſſt ſich entweder dieſe Gleichung ſo auflöſen, daß man die verſchiedenen Wurzeln derſelben durch endliche Ausdrückungen findet, wie es allemahl angeht, wenn u nur auf die erſte oder auf die zweyte Potenz ſteigt, oder man kann auch durch das newtoniſche Parallelogramm, ſoviel unendliche Reihen finden, als es Wurzeln giebt. (Alg. 667.). In jedem Falle läſſt ſich jede dieſer endlichen Ausdrückungen oder unendlichen Reihe ſtatt u ſetzen, und y wird alsdenn durch die vorhin gelehrten Regeln zu integriren gefunden.

III. Ein leichter Fall hievon iſt, wenn x nur von der erſten Abmeſſung in der Differentialgleichung vorhanden iſt; denn da ſteigt es nur auf

eben

eben die Abmeſſung in der algebraiſchen Gleichung zwiſchen x und u und man kann alſo daraus dx nur durch u und du ausgedruckt finden, welcher Werth von dx in udx geſetzt, $dy = udx = Udu$ giebt, wo U eine Function von u iſt, und zwar eine rationale, wenn die algebraiſche Gleichung zwiſchen x und u rational iſt, da denn Udu ſich allemahl nach 385; 397; integriren läſſt, wenn es ein rationaler Bruch iſt, oder ohne dieſe Kunſtgriffe, wenn es eine ganze Function iſt.

Ex. $xdx^3dy - ady^4 - 2ady^2dx^2 - adx^4 = 0$. Hier iſt in 407; $P = -a = R$; $n = 4$; und nachdem $\alpha = 1$ oder 2; iſt $Q = x$ oder $-2a$. Folglich bedeutet Qu^α zwey Glieder xu und $-2auu$; und die algebraiſche Gleichung zwiſchen u und x iſt $-a + xu - 2auu - au^4 = 0$; alſo $x = \frac{a}{u} + 2au + au^3$; und

$$dx = \left(-\frac{a}{uu} + 2a + 3auu\right)du;$$ und dy oder

$$udx = -\frac{adu}{u} + 2audu + 3au^3 . du$$

alſo $y = -a \log u + auu + \frac{3au^4}{4}$

IIII. So findet man in III. eine Gleichung zwiſchen y und u. Iſt ſolche blos algebraiſch, ſo kann man ſie mit der vorigen algebraiſchen zwi-

ſchen x und u verbinden, und aus beyden eine zwiſchen y und x machen. (Alg. 199.) Kommen aber Logarithmen hinein, ſo geht dieſes nicht an. Man kann aber aus der algebraiſchen zwiſchen x und u, weil x nur eine Abmeſſung hat, für jedes angenommene u das zugehörige x finden, und wenn man für eben das u das y berechnet, ſo ſieht man, was für x und y zuſammengehören. Alſo nimmt man hier eigentlich nicht x nach Gefallen an, das zugehörige y zu berechnen, ſondern man nimmt u nach Gefallen an, und berechnet daraus zuſammengehörige x und y.

V. Es ſey 20 F. LK die krumme Linie, welche der algebraiſchen Gleichung zwiſchen x und u (III) zugehört, ſo daß CM = x, MK = z = au. Man nehme $MN = \frac{CMKL}{a}$; ſo iſt es $= \int u dx = y$. Dieſes heiſſt die Differentialgleichung ⊙ durch die Quadratur der krummen Linie CMKL conſtruiren; oder eine krumme Linie NB finden, deren Coordinaten CM = x; MN = y ſind.

Ex. $a^3 dx^5 - aaxdxdy^4 - x^3 . dy^5 = 0$ giebt $n = 5$; $P = a^3$; $\alpha = 4$; $Q = - aax$; $R = - x^3$; alſo $a^3 - a^3 xu^4 -- x^3 u^5 = 0$ für die Gleichung der krummen Linie LK, deren Quadratur MN giebt.

412. Aufg. a; b; n ſind unveränderliche Gröſſen, und zwar bedeutet n jede Zahl; p,

q, ſind

q, ſind Functionen von x; Man ſoll in der Gleichung $a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$ (H) die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern.

Aufl. I. Man ſetze $y = zu$ wo z; u; zwo neue veränderliche Gröſſen ſind. Alſo $dy = z\,du + u\,dz$; und wenn man ſtatt y; dy; ihre Werthe ſetzt, verwandelt ſich H in (K) $az\,du + au\,dz = zup\,dx + bz^n u^n q\,dx$. Weil nun z; u; gar nicht beſtimmt ſind, ſo kann man aus K ein Paar Glieder wählen die eine Differentialgleichung geben, das übrige Paar giebt von ſich ſelbſt auch eine ſolche Gleichung. Damit aber das erſte Paar eine Differentialgleichung nur zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen giebt, ſetze man $a.u.dz = u.z.p.dx$ (L) da ſich mit u auf beyden Seiten dividiren läſſt, folglich bleibt $az\,du = bz^n u^n q\,dx$ (M). Aus L folgt $\frac{dz}{z} = \frac{p\,dx}{a}$ oder $lz = \int p\,dx : a$ oder $z = e^{\int (p\,dx : a)}$ wenn $le = 1$ (232) alſo wird aus M; $\frac{a\,du}{u^n} = bz^{n-1} q\,dx$ (N) wo die veränderlichen Gröſſen von einander geſondert ſind, weil z durch x gegeben iſt. Aus ihr wird das Integral

$$c - \frac{a}{(n-1)\,u^{n-1}} \text{ oder } c - \frac{a.\,z^{n-1}}{(n-1)y^{n-1}} = b\int z^{n-1} q\,dx \text{ (O)}$$

wo c die beſtändige Gröſſe bedeutet, die bey der Integration addirt wird.

Auch $- \frac{a.\ z^{n-1}}{(n-1).\ y^{n-1}} = b.\int(z^{n-1}.q.\ dx)$ wenn man das Integral rechter Hand ſo nimmt daß die Conſt die beygefügt werden ſollte ſchon darinn enthalten iſt.

II) Exempel. $a\,dy = \frac{f\,y\,dx}{x} + y^n x^m dx$;

Hier iſt $p = \frac{f}{x}$; $b = 1$; $q = x^m$; alſo

$\int \frac{p\,dx}{a} = \frac{f}{a}\, lx = lz$ oder $z = x^{f:a}$.

Daraus kömmt in (O) $\int z^{n-1} q\,dx = \frac{1}{\mu}$

$x^\mu = c - \frac{a\,x^{f.(n-1):a}}{(n-1)\,y^{n-1}}$ wo

$\mu = \frac{f.(n-1) + (m+1)\,a}{a}$

III) Dieſes Exempel begreift unzählige einzelne unter ſich. Man ſetze $m = 0$; $n = 2$; ſo wird aus $a\,dy = \frac{f\,y\,dx}{x} + yy\,dx$ die Integrale

$\frac{a}{f+a}\, x^{(f+a):a} = c - \frac{a\,x^{f:a}}{y}$.

Setzt man hier wieder $f = 2$; $a = 1$; ſo wird von $dy = \frac{2\,y\,dx}{x} + yy\,dx$ die Integrale: $y x^3 = 3cy - 3xx$.

III.

IIII. Wenn $p = h$ einer beſtändigen Gröſſe und q eine rationale ganze Function von x iſt, ſo läſſt ſich $\int z^{n-1} q dx$ aus 242 finden. Z. E. wenn $h = 1 = a$ und $q = xx + x$ ſo iſt $z = e^x$

und $\int z^{n-1}. (xx + x) dx = \frac{e^{(n-1)x}}{n-1}.$

$$\left\{\begin{matrix} xx - \frac{2x}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} \\ + x - \frac{1}{n} \end{matrix}\right\}$$

die oberſte Zeile des zweyten Factors kömmt nähmlich heraus, wenn man 2; und die untere, wenn man 1 ſtatt ε in 242 ſetzt.

Dieſes Product mit b multiplicirt und $= c - a z^{n-1} : (n-1). y^{n-1}$ geſetzt giebt die Integrale O der Differentialgleichung $dy = y dx + b. y^n. (xx + x) dx$.

V. Wenn $(\int p dx : a)$ nur durch Logarithmen gegeben iſt, ſo iſt z algebraiſch durch x gegeben und alſo kann $\int z^{n-1} q dx$ algebraiſch, und folglich die Gleichung O zwiſchen x und y algebraiſch ſeyn, wie in (II). Iſt aber $\int (p dx : a)$ ganz, oder zum Theil algebraiſch, ſo findet zwiſchen z und x folglich auch zwiſchen x und y keine algebraiſche Gleichung ſtatt, wie in (IIII).

VI. Wenn $n = 1$ ſcheint die Integrale (I) was unendliches zu enthalten. Aber alsdenn iſt $y p dx$ mit $y q dx$ einerley, weil p ſowohl als q

jede Function bedeuten kann. Die Gleichung verwandelt ſich alſo in $a\,dy = y\,p\,dx$ deren Integral $a \log y = \int p\,dx$ iſt.

VII. Wenn y nicht höher als von der erſten Potenz vorhanden iſt ſo iſt $n = 0$ oder

$$c + \frac{ay}{z} = b \int \frac{q\,dx}{z}$$

VIII. Dieſe Differentialgleichung brachte ſchon Leibniz durch Voneinanderſonderung der veränderlichen Gröſſen auf Quadraturen. Act. Er. Mart. 1696; p. 147. Sie iſt faſt die einzige etwas allgemeine, wo ſich die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern laſſen, ſagt Euler Inſt. Calc. Int. Vol. I. Sect. 2. Cap. 1. ſonſt kann man ſolches nur in einzelnen Fällen verrichten dergleichen er da ebenfalls anführt.

IX. In $P . y^{m-1} . dy + Q . y^m . dz = R . dz$ ſind P, Q, R, Functionen von z.

Die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern, und dann die Integration auf Quadraturen zu bringen lehrt Landerbeck Kongl. Vetenſkaps Academiens Nya Handlingar för 1796. I. Quart. 5. Abh.

413. Aufg. Man ſoll die gleichartige Gleichung (Alg. 529)

$$(a . x^m + b . x^{m-1} . y \ldots + k\,y^m)\,dx + (p . x^m + q . x^{m-1} . y \quad + \omega . y^m) . dy = 0$$

integriren, wo nichts als x und y veränderlich iſt.

Aufl.

Aufl. I. Man ſetze $y = zx$; $dy = zdx + xdz$ wo alſo noch z veränderlich iſt. Alſo

$$\left.\begin{array}{l}(a + bz \ldots\ldots + kz^m).\ x^m\,dx \\ +\,(p + qz \ldots\ldots + \omega z^m)\ x^m\,zdx \\ +\,(p + qz + \omega z^m)\ x^{m+1}\,dz\end{array}\right\} = 0$$

II. Alſo

$$-\frac{dx}{x} = \frac{p + qz \ldots\ldots + \omega z^m}{a + (b + p)\,z \ldots\ldots + \omega z^{m+1}} \cdot dz$$

Und dieſes auf 385 u. f. zu bringen

$$-\frac{\omega dx}{x} = \frac{p + qz \ldots + \omega z^m}{\frac{a}{\omega} + \frac{b + p}{\omega} z \ldots + z^{m+1}} \cdot dz$$

wo des rationalen Bruchs der in dz multiplicirt iſt, ſein Zähler = M; ſein Nenner = N. Man kann alſo dieſes nach a. O. integriren, und im Integrale $\frac{y}{x}$ ſtatt z ſetzen.

III. Es iſt alſo $N = (z - A).(z - B).(z - C)\ldots$ welche Factoren an der Zahl $m + 1$ ſeyn werden. Wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Zähler der $m + 1$ Brüche heiſſt die nach (360) herauskommen, ſo iſt

$$-\frac{\omega dx}{x} = \frac{\alpha dz}{z - A} + \frac{\beta dz}{z - B} + \frac{\gamma dz}{z - C} \ldots$$

und

$$\text{a. } l\,\frac{\text{Conſt}}{x} = \alpha.\log(z - A) + \beta.\log(z - B)\ldots$$

oder

$$\frac{\text{Conſt}\,\omega}{x\omega} = \frac{(y - Ax)^\alpha}{x^\alpha}\cdot\frac{(y - Bx)^\beta}{x^\beta}\ldots$$

$$\text{Conſt}\,\omega = x^{\omega - \alpha - \beta \ldots}.\,(y - Ax)^\alpha.(y - Bx)^\beta\ldots$$

IIII. Exempel. $m = 1$; oder
$(ax + ky)\,dx + (px + \omega y)\,dy = 0$ und

$$M = p + \omega z;\ N = \frac{a}{\omega} + \frac{(k + p)}{\omega}.\,z + z^2$$

Wenn man $N = 0$ ſetzt, und die alsdenn herauskommende quadratiſche Gleichung aufloͤſet, ſo erhaͤlt man

$$z = \frac{-(k + p) \pm Q}{2\omega}$$

wo $Q = \sqrt{((k + p)^2 - 4a\omega)}$
Alſo ſind die beyden Factore, in die ſich N zerfallen laͤſſt

$$z + \frac{k + p - Q}{2\omega} = z - A$$

$$z + \frac{k + p + Q}{2\omega} = z - B$$

Daher iſt

	P	q	S	A
in 361	P	q	S	A
hier	$-A$	-1	$z - B$	α

und

und hernach

$$\begin{array}{l|c|c|c|l} 361 & p & q & S & A \\ \text{hier} & -B & -\ 1 & z - A & \beta \end{array}$$

Daraus findet ſich nach dortigem Verfahren

$$\alpha = \frac{p + \omega . A}{A - B}; \beta = - \frac{p - \omega B}{A - B}$$

und $\alpha + \beta = \omega$

Daher in III;
$Const\omega = (y - Ax)^{\alpha} . (y - Bx)^{\beta}$
wo A, B, α, β, durch die beſtändigen Gröſſen gegeben ſind.

V. In (I) ſetze man $dz = 0$ ſo kömmt

$$\begin{array}{l} a + bz \ldots + kz^m \ m + 1 \\ \quad + p \qquad\quad + \omega z \end{array} = 0$$

eine beſtimmte Gleichung für z; die m + 1 Wurzeln hat. Nun iſt $z = \frac{y}{x}$ eine Zahl, alſo giebt dieſes m + 1 beſtimmte Zahlen, und jede ſolche Zahl giebt eine Gleichung $y = zx$ für eine gerade Linie. Auſer der krummen Linie alſo, welche die Integration nach (IIII) giebt, thun der gleichartigen Gleichung, auf m + 1 gerade Linien genug.

VI. Ex. Für $m = 1$. kömmt in (V) $a + (k + p) z + \omega z^2 = 0$ woraus alſo die beyden Werthe von z folgen, die in (IIII) aus $N = 0$ hergeleitet wurden.

414. Zuſ. $(ax^m \ldots + kx^{m-n}y^n)^e = x^{me}.$ $(a \ldots + kz)^{ne} = x^{me}.Z$ wo der andere Factor kein x ſondern nur z enthält. Wenn e ein Bruch iſt, bedeutet dieſes eine Wurzelgröſſe.

415. F ſey eine gleichartige Function der beyden veränderlichen Gröſſen, die aber auch irrationale Theile enthalten mag, ſo muß erſtlich jeder ſolcher Theil für ſich gleichartig ſeyn, das iſt, die Glieder, welche zuſammen unter einem Wurzelzeichen ſtehen, müſſen eines ſoviel Abmeſſungen der veränderlichen Gröſſen haben als das andere; zweytens, müſſen dieſe Wurzelgröſſen mit ſolchen Producten der veränderlichen Gröſſen multiplicirt ſeyn, daß ſie lauter gleichartige Theile geben. So iſt $x\sqrt{(x^4 + y^4)} + y^2\sqrt[3]{(y^3 + xyy)}$ eine gleichartige Function; weil die erſte Wurzelgröſſe für zwo, die andere für eine Abmeſſung gerechnet wird. Alſo muß ſich jeder Theil von F ſo ausdrucken laſſen. $x^\alpha y^\varepsilon. (ax^m \ldots + kx^{m-n}y^n)^e$ ſo daß $me + \alpha + \varepsilon = \lambda$ einer Zahl, die für einen Theil ſo groß als für den andern iſt. Dieſer Theil läſſt ſich aber auch ſo ausdrucken $x^{me+\alpha+\varepsilon}.Z$ (414). Alſo beſteht F aus lauter Theilen, deren jeder ein Product aus einer Function von z, in eine Potenz von x iſt, die in einem Theile wie in dem andern bleibt. Man kann alſo dieſe Potenz von x als einen gemeinſchaftlichen Factor abſondern, und F ſo ausdrucken $x^\lambda.T$ wo T eine Function von z iſt.

416. Wenn F, G, gleichartige Functionen von x; y; ſind, die auch mit aus irrationalen Theilen beſtehen, und $F dx + G dy = 0$; ſo giebt z ſtatt y, und $z dx + x dz$ ſtatt dy geſetzt, $x^\lambda . T dx + x^\lambda V . (z dx + x dz) = 0$; wo V auch eine Function von z iſt, wie T (415); daraus folgt $-\frac{dx}{x} = \frac{V dz}{T + Vz}$ eine Gleichung wie die 413; nur daß T und V auch Irrationalgröſſen enthalten können.

Ex. $(x \sqrt[5]{y^4 x} + \sqrt{(x^4 + x^3 y)}) dx + y \sqrt[3]{xyy} . dy = 0$. Hier iſt

	für F		für G
$e =$	$\frac{1}{5}$;	$\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{3}$
$\alpha =$	1	0	0
$\varepsilon =$	0	0	1
$m =$	5	4	3
$\lambda =$	2	2	2

alſo $T = \sqrt[5]{z^4} + \sqrt{(1 + z)}$; $V = z . \sqrt[3]{zz}$. Wenn alſo $dz = 0$ ſo giebt $T = - Vz$ wieder eine Gleichung für z zu Beſtimmung der geraden Linien $y = zx$ die der Differentialgleichung genug thun.

Anm. Ich habe hievon in einer Vorleſung in der K. Soc. d. Wiſſ. umſtändlicher gehandelt. Sie iſt die 4; in den diſſertat. math. et phyſ. Soc. R. S. 1756. ... 1766 exhibitis. Joh. Bernoulli hat dieſe Gleichungen

chungen integriren gelehrt, ohne die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern, wovon ich in der Ausübung keinen Vortheil ſehe. Op. T. III. n. 136. T. IIII. n. 156. Daß ſich die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern laſſen, hat er nicht erinnert. Inſtituzioni analitiche ad uſo della gioventu' Italiana di Donna Maria Gaetana Agneſi Milaneſe, dell' Accademia delle Scienze di Bologna; Milano 1748; 2 Quartbände. In dieſem Werke L. IV. c. 3. §. 14. p. 869 wird gewieſen wie man in ſolchen Gleichungen die veränderlichen Gröſſen von einander ſondert, auch §. 18 wie man Gleichungen, die nicht gleichartig ſind, zuweilen in gleichartige verwandeln kann. Folgendes iſt ein Exempel davon.

417. Aufg. **Die Umſtände zu beſtimmen, unter denen die Gleichung**
$(a y^n x^m + b y^q x^p).\, dx + c x^r y^s\, dy = 0$
ſich in eine gleichartige verwandeln läſſt.

Aufl. Man ſetze $y = z^t$; dieſes giebt $(a z^{tn} x^m + b z^{tq} x^p)\, dx + tc x^r z^{st+t-1}\, dz = 0$ Soll dieſe Gleichung gleichartig ſeyn, ſo iſt $tn + m = tq + p = r + (s+1)\, t - 1$; die erſten beyden gleichen Werthe geben $t = \frac{p-m}{n-q}$ welches in dem dritten und zweyten ſtatt t geſetzt, $(s-q+1).(p-m) = (p-r+1)(n-q)$ giebt. Dieſe Vergleichung muß unter den Exponenten ſtatt finden, wenn ſich die gegebene Gleichung ſoll auf eine gleichartige bringen laſſen.

In zween Fällen geht es nicht an z^t ſtatt y zu ſetzen, 1) wenn $p = m$; alsdenn aber verwandelt ſich die vorgegebene Gleichung ſelbſt in x^{m-r}

dx =

$dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$ 2) wenn $n = q$ da verwandelt ſie ſich in $\frac{(ax^m + bx^p)\,dx}{x^r} = -$ $cy^{s-n}\,dy$.

418. Aufg. $dp + p\,d\omega = dQ$ zu integriren, wo in Q nichts von p enthalten iſt, ω aber durch eben ſolche veränderliche Gröſſen gegeben ſeyn kann wie Q; z. E. es könnte $d\omega = \frac{ds}{f}$ ſeyn, wenn dx und dy in dQ wären, da denn $ds = \surd(dx^n + dy)$. Alſo ſind hie die veränderlichen Gröſſen vermengt.

Aufl. Man erinnere ſich, daß von e^ω das Differential $d\omega.\, e^\omega$ iſt (An. Un. §. 241) Man multiplicire alſo mit e^ω

$e^\omega\,dp + p.\,d\omega.\,e^\omega = e^\omega\,dQ$, ſo ſteht linker Hand das Differential von $p.\,e^\omega$, alſo iſt

$p.\,e^\omega = \int e^\omega\,dQ$ oder $p = e^{-\omega}.\int e^\omega\,dQ$, wo alſo p durch die übrigen veränderlichen Gröſſen gegeben iſt.

Man ſetze $\int e^\omega\,dQ = e^\omega.\,Q + P$ ſo iſt

$e^\omega\,dQ = e^\omega.\,dQ + d\omega.\,Q.\,e^\omega + dP$ oder

$dP = -\,e^\omega.\,Q.\,d\omega$ und

$p = e^{-\omega}.\,(e^\omega.\,Q - \int e^\omega.\,Q.\,d\omega)$

$= Q - e^{-\omega}.\int e^\omega.\,Q.\,d\omega$.

Ein Exempel hievon hat Euler Principia motus fluidorum §. 53. Comment. Nou. Petrop. T. VI. p. 294.

Integrirung der Differentialgleichungen, durch Reihen vermittelſt des Newtoniſchen Parallelogramms, und anderer Methoden.

419. Aufg. Aus der Differentialgleichung zwiſchen x und y; y durch eine Reihe auszudrucken, die nach den Potenzen von x ſteigt oder fällt.

Aufl. Man nehme dx unveränderlich an, und ſetze $y = Ax^m + \ldots$ alſo $dy = mAx^{m-1} dx + \ldots$ ſo verwandelt ſich die Differentialgleichung in eine zwiſchen x und y die lauter endliche Gröſſen enthält; mit dieſer kann man alſo nach Alg. 665. verfahren.

Ex. $abdy + axdy - by - yx - aa = 0$ Hier verſtehe ich, daß in die Glieder, welche kein dy enthalten, dx multiplicirt iſt. Ich ſehe nähmlich dx als die Einheit der Differentiale an, daher man in dieſer Bedeutung auch ſagen kann, es ſey $dx = 1$ Nun kömmt alſo

$mabAx^{m-1} + maAx^m - bAx^m - Ax^{m+1} - aa$ die Exponenten in die Fächer geſetzt, geben

$$\begin{array}{ll} {*}\,m+1 & \\ 0 & m \\ {*}\,m-1 & \end{array}$$

Für eine ſteigende Reihe ſetze ich $m - 1 = 0$, alſo $m = 1$; die Werthe 0; 1; 2; geben den Unterſchied der Exponenten, oder $\delta = 1$; alſo $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots + Mx^{n-1} + Nx^n + Ox^{n+1} \ldots$ und

abdy

$$
\begin{array}{llllll}
abdy = abA & + \, 2aB \, \big| \, x & + \, 3abC \, \big| \, x^2 \ldots\ldots & + \, (n+1)\, abO \, \big| \, x^n & \Big| & \\
axdy & + \, aA & + \, 2aB \quad \ldots\ldots & + \, n.\, A.\, N & & \\
-\, by \;\; = & -\, bA & -\, bB \quad \ldots\ldots & -\, b.\, N & & C \\
-\, xy \;\; = & & -\, A & -\, M & & \\
-\, aa \;\; = -\, aa & & & & &
\end{array}
$$

folglich $A = a : b$; $B = (b - a) A : 2ab$; $C = (A + (b - 2a). B) : 3ab$, und überhaupt $O = (M + (b - na). N) : (n + 1) ab$ ſo daß jeder Coefficient durch die beyden nächſtvorhergehenden gegeben iſt.

Für eine fallende Reihe iſt $m + 1 = 0$; oder $m = -1$ die Werthe ſind 0; -1; -2; alſo $\delta = -1$ und $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + \ldots\ldots + Lx^{-n+2} + Mx^{-n+1} + Nx^{-n}$ wo $A = -aa$; $B = -(b + ab) A$; $C = -(b + 2. a). B - abA$; $N = -(b + na) M - (n - 1) abL$.

420. Wenn y nur von der erſten Abmeſſung, und nicht mit dy multiplicirt vorhanden iſt, ſo läſſt ſich das Geſetz des Fortganges meiſtens leicht allgemein darthun, wie das Exempel zeigt. Sonſt würde es etwas ſchwerer fallen, doch aber nach dem 56 gebrauchten Verfahren ebenfalls zu bewerkſtelligen ſeyn.

421. Wenn man ſtatt y die Reihe $Ax^m + Bx^{m+\delta} \ldots\ldots + Rx^{m+r\delta} \ldots\ldots$ ſetzt, die ich wie Alg. 645 nennen will; daß ſich die Differentialgleichung in die Reihe ☾ verwandelt, ſo wird aus jedem Theile der Differentialgleichung wie $x^{\varkappa} y^{\varepsilon} dy$ eine Reihe ♂; in welcher R zuerſt bey dem Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ vorkömmt. Denn in der Reihe, die aus $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ wird, kömmt R zuerſt bey dem Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa$ vor, (Alg. 656.) und in der Reihe dy bey $m + r\delta - 1$. Jener Reihe Glied alſo, in welchem

chem R zuerſt vorkömmt, mit der Reihe dy erſtem Gliede multiplicirt, bekömmt den Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa + m - 1$. Und jener Reihe erſtes Glied, mit der Reihe dy Gliede, wo R zuerſt vorkömmt, multiplicirt bekömmt den Exponenten $m + r\delta - 1 + m\varepsilon + \varkappa$, welche beyden Exponenten mit dem vorhin genannten einerley ſind; Eher aber kann R in ♂ nicht vorkommen.

Ich nehme allemahl r für eine ganze bejahte Zahl an. Iſt $m + r\delta < m$ ſo muß δ verneint ſeyn.

Wenn im Exempel 419; ♂ aus $axdy$ wird, ſo iſt $\varepsilon = 0$; $\varkappa = 1$; $m = \delta = 1$; Es ſey R = B ſo iſt $r = 1$; und B kömmt zuerſt beym Exponenten 2 vor.

422. Wenn $m = 0$ kömmt R zuerſt bey dem Exponenten $r\delta - 1 + \varkappa$ vor. In dieſem Falle verſchwindet der Reihe dy eigentliches erſtes Glied mAx^{m-1} und das, welches nun ihr erſtes wird, $\delta Bx^{\delta - 1}$ giebt mit dem Gliede der Reihe $y^\varepsilon x^\varkappa$ das zuerſt R hat multiplicirt, den Exponenten $\delta - 1 + \varkappa$: Aber das erſte Glied der Reihe dy das R enthält, hat den Exponenten $r\delta - 1$ und giebt mit der Reihe $y^\varepsilon x^\varkappa dy$ erſtem Gliede multiplicirt den Exponenten $\delta r - 1 + \varkappa$.

423 Eine Reihe ♃ entſtehe aus einem Gliede der Differentialgleichung, daß kein dy enthält, und $y^\lambda x^\tau$ heiſſe, ſo kömmt in ihr R zuerſt bey dem Exponenten $m\lambda + r\delta + \tau$ oder wenn $m = 0$ bey $r\delta + \tau$ vor.

424. Eine andere Reihe wie die in 421 die aus $x^{\nu} y^{\pi} dy$ entſtehe, heiſſe ☿, und fange ſich nicht in der Reihe ☾ erſtem Gliede, ♂ aber im erſten an, und ſey alſo eine Anfangsreihe (Alg. 650) da ☿ keine iſt. Wenn δ eine bejahte Zahl iſt, ſo wird der erſte Exponent der Reihe ♂ eine kleinere bejahte oder gröſſere verneinte Zahl ſeyn, als der erſte Exponent der Reihe ☿; oder es iſt $m(\varepsilon + 1) + \varkappa - 1 < m.(\pi + 1) + \nu - 1$, gröſſer und kleiner, in der zweyten Bedeutung 153 genommen. Addirt man alſo auf beyden Seiten $r\delta$ ſo iſt der Exponent, bey welchem R zuerſt in der Anfangsreihe vorkömmt, kleiner, als der Exponent, bey dem es zuerſt in ☿ vorkömmt, oder R kömmt in jener Reihe eher als in dieſer vor, und iſt folglich aus jener ſchon beſtimmt, ehe es in dieſer vorkömmt, imgleichen ehe es in ♃ (423) vorkömmt, wenn ♃ auch keine Anfangsreihe, oder derſelben erſter Exponent gröſſer iſt als der erſte der Anfangsreihe.

Iſt δ eine verneinte Zahl, ſo erhellt eben dieſes, man darf nur abziehen ſtatt addiren, und kleiner ſtatt gröſſer ſetzen.

425. Wenn δ oder m verneint, und $m + r\delta = 0$ iſt, ſo findet ſich R gar nicht in der Reihe dy; Aber in der Anfangsreihe (424) kömmt es in dem Producte aus dem erſten Gliede von dy in das Glied der Reihe $y^{\varepsilon} x^{\varkappa}$ das zuerſt R enthält, zuerſt bey dem Exponenten $m\varepsilon + r\delta + \varkappa + m - 1 = m\varepsilon - 1 + \varkappa$ vor.

426. Wenn ſich bey dem Exponenten m. $(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ noch kein Glied der Reihen (424) die keine Anfangsreihen ſind befindet, ſo iſt $R = 0$ (Alg. 657.).

427. Wenn wegen 425; R in einer Anfangsreihe, die aus einem Gliede der Gleichung entſtanden iſt, das dy enthält, nicht bey demjenigen Exponenten vorhanden iſt, wo es zuerſt vorkommen ſollte, und wenn unter den Gliedern der Gleichung, die dx enthalten, keines eine Reihe giebt, in der ſich R bey dieſem Exponenten befindet, ſo iſt der Coefficient der Gleichungsreihe (Alg. 649) bey dieſem Exponenten nur durch ſchon zuvor beſtimmte Coefficienten der Reihe ⊙ gegeben: Wenn dieſe alſo nicht von ſich ſelbſt $= 0$ geben; ſo kann der Coefficient der Gleichungsreihe nicht verſchwinden, und die Gleichungsreihe findet alſo nicht ſtatt.

Exempel. $xxdy - y - pxx - 2x^3 - rx = 0$ giebt

$$\begin{array}{ll} 3 & \\ 2 & \\ 1 & m + 1 \\ & m \end{array}$$

Man ſetze $m + 1 = 3$ oder $m = 2$ und $y = Ax^2 + Bx + C + Dx^{-1} \ldots$ alſo

$xxdy = 2Ax^3 + Bx^2 \ * - D$

$-y = \qquad - A - Bx - C$

u. ſ. w. $= - 2 - p - r$

Hier iſt $A = 1$; $B = 1 + p$; und im dritten Gliede ſoll $1 + p + r = 0$ ſeyn: Wenn dieſes

 ſo

ſo zutrifft, ſo bleibt C oder D unbeſtimmt, und das Uebrige hat alles ſeine Richtigkeit; wo aber nicht, ſo kann man dieſe Reihe nicht brauchen.

Dieſes kann ſich alſo nur ereignen, wenn m und δ einander entgegengeſetzte Gröſſen ſind, und $\frac{m}{\delta}$ eine ganze verneinte Zahl iſt.

428. Es ſey R = A und alſo r = o; über dieſes auch m = o; ſo iſt der Reihe dy erſtes wirkliches Glied; $\delta B x^{\delta - 1}$. Die Glieder der Gleichung nun, die Anfangsreihen (424) geben, können I) theils dx theils dy; II) nur dy; III) nur dx enthalten. Im Iten Falle befindet ſich B zugleich mit A ſchon im erſten Coefficienten der Gleichungsreihe, und folglich kann man A oder B unbeſtimmt laſſen, und dadurch B oder A, und die folgenden beſtimmen. Im IIten Falle wird A beſtimmt, denn B iſt ein Factor in allen Theilen, die den erſten Coefficienten der Gleichungsreihe zuſammen ausmachen, alſo kann man dieſen Coefficienten, der = o geſetzt wird, mit B dividiren, und eine Gleichung für A erhalten. Wollte man es nicht ſo machen, ſo könnte man auch in dieſem Coefficienten B = o ſetzen, da denn A unbeſtimmt bliebe, und da man alſo auch A und C zugleich = o ſetzen könnte. Im IIIten Falle wird wiederum A beſtimmt, und wenn alle Glieder, die dx enthalten, Anfangsreihen geben, ſo findet man ein A das ſtatt y geſetzt, die Glei-

chung

chung auf 0 bringt, wenn $dy = 0$ oder $y = A$. Dieſer Werth kann zwar für die ganze Gleichung nicht richtig ſeyn, weil $y - 1$ eine veränderliche Gröſſe ſeyn ſoll, er iſt aber doch richtig, wenn man die Glieder, die dy enthalten, aus ihr wegläſſt.

429. Ex. Ein Exempel ſey die Gleichung, welche die Columne linker Hand ausmacht; wo

$$\begin{array}{rlll}
y = & A & + Bx & + Cx^2 \ldots \\
ydy = & AB & & + BBx \\
 & & & + 2AC \\
dy = & B & & + 2C \\
yyx = & & & A^3 \\
x = & & & 1 \\
-f = & -f & & \\
\hline
0 = & & &
\end{array}$$

Dieſes Exempel giebt für den I. Fall $A = \frac{f - B}{B}$ oder $B = \frac{f}{A + 1}$. Will man es für den zweyten Fall brauchen, ſo ſetze man $f = 0$; alſo $A = -1$ oder $B = 0$.

Ein Exempel des IIIten Falles wo die Reihe für y eben die Geſtalt hat, iſt

$$\begin{array}{lllll}
+x^2ydy = & & +ABx^2 & +2ACx^3 \\
 & & & +BB \\
 & & & +2AC \\
+x^3dy = & & & +B \\
+fxy^2 = & +fAAx & & \\
+gxy^2 = & +gA & & \\
+hx = & +h & & \\
+kxx = & & +k & \\
\hline
0 = & & &
\end{array}$$

wo $fAA + gA + h = 0$. Der hieraus gefundene Werth von A thut der Differentialgleichung völlig genug, wenn $dy = 0$ und $k = 0$. Es iſt nähmlich klar, daß ſie ſich alsdenn durch xdx dividiren läſſt.

430. Weil R wo es zum erſtenmahle vorkömmt, nur die erſte Abmeſſung hat, (Alg 647; 656;) ſo wird es wie Alg. 657. $= 0$, wenn ſich da, wo es zuerſt vorkömmt, nur Gröſſen, die von den Anfangsreihen herrühren befinden, und dieſe Gröſſen nicht für ſich ſelbſt verſchwinden, in welchem Falle es unbeſtimmt bliebe.

431. Der Anfangsreihe (421) Glied, das den Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ hat, beſteht aus Producten, die R von der erſten Abmeſſung enthalten, und aus andern, in denen ſich die Coefficienten der Reihe ☉ befinden, die vor R vorhergehen.

432. Aufg.

432. Aufg. Von $(ay + bx^n + cx^{n-1} \ldots + hx^{n-\lambda} \ldots + k)\, dx - dy = 0$ die Integrale zu finden.

Aufl. Die Exponenten geben

$$\begin{array}{cc} & n \\ & n-1 \\ & \vdots \\ & \cdot \\ 0 & m \\ & m-1 \end{array}$$

Um nun eine fallende Reihe zu haben; ſetze man $m = n$, alſo $\delta = -1$, und

$$ay = aAx^n + aBx^{n-1} \ldots + aLx^{n-\lambda} \ldots\ldots + aRx^{-1} + aSx^{-2}$$

$$- dy = - nAx^{n-1} \ldots - (n - \lambda + 1) Kx^{n-\lambda}$$
$$^{*}- nRx^{-2} \text{ u. ſ. w.} = + bx^n + cx^{n-1} + hx^{n-\lambda}$$

Wo $A = - b : a$; $B = (nA - c) : a$;

$L = \frac{(n - \lambda + 1) K - h}{a}$ alſo $R = 0 = S$ und allen folgenden Coefficienten der Reihe y daß alſo dieſer Reihe letzter Coefficient für $\lambda = n$, iſt, und die Reihe endlich wird.

Goldbach hat dieſe Reihe aus andern Gründen gefunden. Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 209.

Ob aber gleich $y = \frac{-bx^n}{a} + \frac{nA - c}{a} x^{n-1} \ldots + Q$ der Differentialgleichung genug thut, und

alſo als die Integrale davon angeſehen werden kann; ſo läſſt ſich doch eine andere Integrale finden, wo y nicht durch eine endliche Reihe auszudrucken iſt. Man findet dieſes aus (412. I.) denn

das dortige $a;\ b;\ p;\ n;\ q$
iſt hier $1\ \ 1;\ a;\ 0;\ bx^n\ldots$

alſo das dortige $\int p\,dx$: a hier ax und $z = e^{-ax}$ alſo $Const + ye^{-ax} = \int e^{-ax}\,q\,dx$. Dieſes Integral findet man hier ſo. Die gefundene Reihe für y heiſſe T, und es ſey $y = T + u$ ſo iſt

$$\begin{array}{rcl} a y dx &=& a T dx + a u dx \\ -dy &=& -a dT + du \\ +k\ldots &=& +k \\ \hline 0 &=& 0 \end{array}$$

Nun iſt das, was ſich in der erſten Columne zur rechten Seite des Gleichheitszeichens befindet, wie man nur gefunden hat $= 0$; alſo auch $adx = \frac{du}{u}$ und $e^{ax} + Const = u$ wo ſich u durch eine unendliche Reihe giebt. (239) Eine ſteigende Reihe durch das Parallelogramm geſucht, wird auch unendlich.

Daß die endliche Reihe nicht die völlige Integrale dieſer Gleichung ſey, hat auch Nicolaus Bernoulli erinnert Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 207. Man ſ. auch Op. Iac. Bern. T. II. n. 82. p. 733. und daſelbſt Cramers Noten.

433. Aufg. z in $\alpha z + (\beta + \gamma x)\,dz - (\varepsilon + \vartheta x) = 0$ zu finden.

Aufl. I.

Aufl. I. Wenn $m = 1$, $\delta = 1$ kömmt

1
o m
m — 1

$$\alpha z = \alpha A x + \alpha B x^2 \ldots + \alpha M x^{n-1}$$
$$+ \beta dz = + \beta A + 2\beta B + 3\beta C \ldots + n\beta N$$
$$+ \gamma x dz = + \gamma A + 2\gamma B \ldots + (n-1)\gamma M$$
$$-\varepsilon = -\varepsilon$$
$$-\vartheta x = -\vartheta$$

alſo $A = \varepsilon : \beta$; $B = -\frac{(\gamma+\alpha).\ A + \vartheta}{2\beta}$;

$C = -\frac{(\alpha + 2\gamma) B}{3\beta}$; $N = -\frac{(\alpha + (n-1)\gamma) M}{n\beta}$;

Iſt alſo $\alpha = -(n-1.\gamma$ ſo wird N mit allen folgenden Coefficienten der Reihe, welche z ausdruckt, $= 0$; oder dieſe Reihe bricht ab, wenn $-\frac{\alpha}{\gamma}$ eine ganze bejahte Zahl iſt. Man nenne dieſe Reihe T und ſetze

$$\alpha z = \alpha T + \alpha w$$
$$+ \beta dz = + \beta dT + \beta dw$$
$$+ \gamma x dz = + \gamma x dT + \gamma x dw$$
$$-\varepsilon - \vartheta x = -\varepsilon - \vartheta x$$

ſo iſt wiederum $\alpha w + (\beta + \gamma x).\ dw = 0$ und

$\frac{dw}{\alpha w} = -\frac{dx}{\beta + \gamma x}$ woraus ſich wieder w giebt.

II. Man

II. Man ſetze $\beta + \gamma x = u$; alſo $dx = \frac{du}{\gamma}$ und $\alpha z du : \gamma + u dz - \varepsilon du : \gamma - \vartheta u du : \gamma\gamma + \vartheta\beta du : \gamma\gamma = 0$. Wenn man hier z durch u ſuchet, findet ſich

$$\frac{\alpha}{\gamma} \cdot z du = \frac{\alpha}{\gamma} A + \frac{\alpha}{\gamma} B u \ldots\ldots + \frac{\alpha}{\gamma} N u^n$$

$$u dz = \qquad + B \qquad + nN$$

$$\text{u. ſ. w.} = \frac{\vartheta\beta - \varepsilon\gamma}{\gamma\gamma} - \frac{\vartheta}{\gamma\gamma}$$

alſo $A = (\varepsilon\gamma - \vartheta\beta) : \alpha\gamma$; $B = \vartheta : (\alpha + \gamma)$. γ ferner $- \alpha : \gamma = n$ da N unbeſtimmt bleibt; oder $N = 0$; wenn man das erſte annimmt; ſtatt u ſeinen Werth ſetzt und denn N ſo beſtimmt, daß x und z zugleich verſchwinden, ſo findet man nach gehöriger Rechnung die Integrale ſo, wie ſie Joh. Bernoulli Hydraul. P. I. art. 14. Op. T. IIII. n. 186. gegeben hat.

Wollte man hier wieder dieſen gefundenen endlichen Ausdruck T; heiſſen, und $z = T + w$ ſetzen, ſo kàme

$$\frac{\alpha}{\gamma} z du = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot T + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot w du$$

$$+ u dz = + u dT + u dw$$

$$\text{u. ſ. w.} = \text{u. ſ. w.}$$

alſo müſſte $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{du}{u} + \frac{dw}{w} = 0$ ſeyn. Dieſes

gàbe,

gäbe, wenn $\varkappa$ eine willkührliche beſtändige Gröſſe bedeutet; $w = \varkappa^{-n}.\, u^n$ und alſo wäre $\varkappa^{-n}$ was vorhin N war; daher hier die vorhin gefundene Integrale vollſtändig iſt.

III. Nach (412) kann man dieſe Differential-gleichung wie ſie in der Aufgabe ausgedrucket worden iſt auch ſo integriren.

412	y	n	a	p	b	q
hier	z	0	1	$\frac{-\alpha}{\beta + \gamma x}$	1	$\frac{\varepsilon + \vartheta x}{\beta + \gamma x}$

alſo das dortige $\frac{p\,dx}{a}$ hier $-\frac{\alpha\,dx}{\beta + \gamma x}$; davon das Integral $-\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \log(\beta + \gamma x)$, daher das dortige z hier $(\beta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}$ und aus 412. VII.

$$c + az.\, (\beta + \gamma x)^{+\alpha:\gamma} = \int \frac{\alpha + \vartheta x}{(\beta+\gamma x)^{1-\alpha:\gamma}}.\, dx$$

434. Aufg. y durch x in der Gleichung $yy + (\tfrac{1}{2} x^3 y + \tfrac{1}{2} xy - \tfrac{1}{2} x^3)\, dy - xxy = 0$ auszudrucken.

Aufl. $m + 2 \qquad 2m + 2$

$\qquad * \qquad\qquad *$

$\qquad m \qquad\qquad 2m$

$m = 2m$ giebt (Alg. 644.) $m = 0$; $\delta = 2$; da wird aber der Reihe $A + Bx^2 + Cx^4 \ldots\ldots$ jeder

jeder Coefficient = o. Setzt man $y = \mathfrak{A}x^{-2} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}x^2 \ldots$ ſo bleibt $\mathfrak{A}$ unbeſtimmt, aber $\mathfrak{B}$ wird $= \mathfrak{A} - 1$; $\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}) : 2\mathfrak{A}$ u. ſ. w. Daß dieſe Reihe auch im Parallelogramm enthalten iſt, erhellt ſo: die äuſſerſten Fächer werden deswegen gleich geſetzt, weil ſie den erſten Exponenten der Gleichungsreihe enthalten; (Alg. 610) wenn man nun $m = 2m + 2$ ſetzt, woraus $m = -2$ folgt, ſo ſind dieſe Fächer zwar nicht die äuſſerſten, weil $2m$ unter der Linie durch ſie liegt, aber der Coefficient der Gleichungsreihe, der dem Exponenten $2m$ oder -4 zugehört, verſchwindet von ſich ſelbſt, weil er aus den erſten Coefficienten der Reihen yy und $\frac{1}{2}xydy$ beſteht, die hier $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ ſind, daß man alſo das Glied der Gleichungsreihe, das den Exponenten $2m + 2$ oder -2 hat, als das erſte, und ſeinen Exponenten als den erſten anſehen kann. Dieſes kömmt alſo auf die beſtändigen Gröſſen in der Gleichung an. Hätte das Glied, das $\frac{1}{2}xydy$ heiſſt, z. E. $\frac{3}{3}xydy$ geheiſſen, ſo wäre es nicht angegangen. Man darf hier nicht $\mathfrak{A} = 0$ ſetzen, wodurch ſich die letztere Reihe in die erſte verwandeln würde; denn dadurch würde A oder $\mathfrak{B} = -1$; da doch $A = 0$ iſt, und B oder $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2.0}$ unendlich; u. ſ. w. Die letzte Reihe kann ſich nähmlich deswegen nicht in die erſte verwandeln, weil für $x = 0$ der Werth von

y in der letztern unendlich, in der erſtern = A wird.

435. Aufg. Durch die Fächer $\lambda m + l$; $\varphi m + f$ (Alg. 636 wo $b = 1$) gehe eine gerade Linie, ſo daß zwiſchen beyden in dieſer geraden Linie kein anders Fach fällt. Eben dieſe Linie gehe auch durch das Fach $\tau m + t$. Man ſucht τ; t; durch λ; φ; l; f;

Aufl. In Alg. 636. iſt $A = \lambda m + l$; $C = \varphi m + f$ alſo das dortige n; r; $n + \delta$; $r - q$;
hier λ; l; φ; f;
Nun erhellt aus demjenigen, was dorten bey dem Werthe von B gezeigt worden iſt, daß ſich jedes Fach, das in eben die gerade Linie fällt, ſo ausdrucken läſſt: $(n + k\delta) m + r - kd$ wo k eine ganze Zahl bedeutet. Dieſer Ausdruck giebt in den hier gebrauchten Buchſtaben $(\lambda + k.(\varphi - \lambda)) m + l - k.(l - f)$.

Ex. Wenn das Linial zugleich durch $-m + 1$ und 3 geht, ſo iſt $\lambda = -1$; $l = 5$; $\varphi = 0$, $f = 3$, und jedes Fach in dieſer Linie heiſſt $(-1 + k).m + 5 - k.2$. Setzt man ſtatt m nach der Ordnung 0; 1; 2; 3, 4, 5, ſo werden dieſe Fächer $-m + 5$; 3; $m + 1$; $2m - 1$; $3m - 3$; $4m - 5$, . . .

436. Wenn alle in einer wagrechten Linie liegen, alſo $m = 0$; ſo iſt $l = f$ (Alg. 644) alſo ihr allgemeiner Ausdruck $(\lambda + k.(\varphi - \lambda)) m + l$.

437. Fallen alle in eine lothrechte Linie, ſo iſt $m = \infty$ und ihr Ausdruck $m\lambda + l - k.(l - f)$ weil $\lambda = \varphi$.

438. In den Theilen einer Differentialgleichung welche dy enthalten, habe y die Exponenten α, β, γ, ..; x die Exponenten a; b; c; .. ſo daß dieſe Theile ſo ausſehen $y^\alpha x^a dy$ u. ſ. w. Setzt man nun hier Ax^m ſtatt y; ſo verwandeln ſich die Exponenten in $m.(\alpha + 1) + a - 1$; $m.(\beta + 1) + b - 1$; $m.(\gamma + 1) + c - 1$; u. ſ. w. Man ſetze alſo in 435; $\lambda = \alpha + 1$; $l = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $f = b - 1$; ſo iſt für jeden andern Exponenten, der mit jenen beyden in eine gerade Linie fällt; $\gamma = \alpha + k.(\beta - \alpha)$; $c = a - k.(a - b)$ und die Reihen der Exponenten ſind folgende, wo die in einem Theile der Gleichung beyſammen ſind, die hier untereinander ſtehen:

Bey y; α; β; $2\beta - \alpha$; $3\beta - 2\alpha$...
x; a; b; $2b - a$; $3b - 2a$....

439. In den Theilen der Gleichung, welche dx enthalten, ſeyn die Exponenten von y; π, ϱ, σ, von x; p, r, $ſ$, daß die Glieder ſo ausſehen, $y^\pi x^p dx$... Dieſe verwandeln ſich in $m\pi + p$; $m\varrho + r$; $m\sigma + ſ$; und man findet eben ſo, daß für jeden Exponenten, der mit den erſten beyden in eine gerade Linie fällt, $\sigma = (\pi + k.(\varrho - \pi)).m$ und $ſ = p - n.(p - r)$.

440. I) $m.(\alpha + 1) + a - 1 = m.(\beta - a) + b - 1$ giebt $m = (b - a):(\alpha - \beta)$;

II) m

II) $m(\alpha + 1) + a - 1 = m\pi + p$ giebt $m = (p - a + 1 : (\alpha - \pi + 1)$; III; $m\pi + p = m\varrho + r$ giebt $m = (r - p) : (\pi - \varrho)$.

441. Wenn $m. (\alpha + 1) + a - 1$; $m. (\beta + 1) + b - 1$; $m\pi + p$; in eine gerade Linie fallen, ſo iſt in 435; $\lambda = \alpha + 1$; $l = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $f = b - 1$; alſo $\pi = \alpha + 1 + k. (\beta - \alpha)$ und $p = a - 1 - k. (a - b)$.

Ex. Es ſey $\alpha = 3$; $a = 2$; $\beta = 5$; $b = 7$; ſo iſt $\pi = 4 + 2k$; $p = 1 + 5. k$, und alſo fallen folgender Glieder Exponenten in eine gerade Linie $y^3 x^2 dy$; $y^6 x^7 dy$; $y^4 x$; $y^5 x^6$; $y^8 x^{11}$ ....

442. Fallen aber $m\pi + p$; $m\varrho + r$; $m (\alpha + 1) + a - 1$ in eine gerade Linie, ſo iſt $\alpha = \pi - 1 + (\varrho - \pi). k$ und $a = p + 1 - (p - r). k$.

443. In 436 iſt für (442) $r = p$; und $a = p + 1$; oder alle Exponenten von x in den Theilen der Gleichung, die dy enthalten, ſind unter ſich gleich, und um 1 gröſſer als die auch unter ſich gleichen Exponenten der Theile der Gleichung, welche dx enthalten.

444. In 437. iſt $\alpha = \beta$; $\pi = \varrho$ (440) und $\alpha = \pi - 1$ (441).

445. Wenn man die Reihe ⊙ (421. und Alg. 645.) in $x^a y^\alpha dy$ ſetzt, ſo entſteht daraus eine Reihe, die folgende Coefficienten hat:

I) $m A^{\alpha+1}$; II) $(m + \delta + m\alpha A)^\alpha B$; III) $(m + 2\delta + m(\alpha - 1)). A^\alpha C +$ $\left((m+\delta)\alpha + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{1.2}.m\right) A^{\alpha-1} BB$

Die Potenzen von x zu denen dieſe Coefficienten gehören, haben die Exponenten $m\alpha + m - 1 + a$; $m\alpha + m - 1 + a + \delta$; $m\alpha + m - 1 + a + 2\delta$. Aus $x^p y^\pi$ aber wird auf eben die Art eine Reihe, deren Coefficienten I) A^π; II) $\pi A^{\pi-1} B$; III) $\left(\frac{\pi.(\pi-1)}{1.2} BB + (\pi-1). A. C\right) A^{\pi-2}$ zu den Exponenten $m\pi + p$; $m\pi + p + \delta$; $m\pi + p + 2\delta$ gehören. Iſt nun $m\pi + p = m\alpha + m - 1 + a$ ſo haben beyde Reihen einerley Exponenten, und ihre erſten Coefficienten kommen zuſammen in den erſten Coefficienten der Gleichungsreihe, die zweyten in den zweyten, die dritten in den dritten u. ſ. w. Die erſte Reihe ſtellt alle Reihen vor, die aus den Theilen der Gleichung entſtehen, welche dy enthalten, und die zweyte, alle die aus den Theilen der Gleichung entſtehen, welche dx enthalten.

446. Geſetzt, es fallen alle Exponenten, die $A x^m$ ſtatt y geſetzt giebt, in eine einzige gerade Linie,

Linie, ſo geben alle Theile der Gleichung, Anfangsreihen; und der erſte Coeſſicient der Gleichungsreihe = o geſetzt giebt Werthe von A, die ſo beſchaffen ſind, daß $y = Ax^m$ ein völliger Werth von y iſt, welcher der Gleichung genug thut.

Gleichwohl erhellt, daß ſich auch hier eine unendliche Reihe erhalten läſſt. Denn wenn man ⊙ in die Gleichung ſetzt, ſo bekömmt man Reihen wie ♂ und ♃ (421; 423) deren erſte Exponenten erwähnter maaſſen alle gleich ſind; weil nun die Exponenten jeder Reihe eines Theiles der Gleichung eine arithmetiſche Progreſſion ausmachen, (Alg. 645) ſo ſind alle zweyten Exponenten dieſer Reihen unter ſich gleich, und ſo auch alle dritten, alle vierten, u. ſ. w. was auch δ ſeyn mag. Daher geben alle zweyte Glieder der Reihen der Theile zuſammen das zweyte Glied der Gleichungsreihe, alle dritten Glieder der Reihen der Theile zuſammen das dritte der Gleichungsreihe, u. ſ. w. wo man auch die Glieder rechnen muß, die nach dem Geſetze des Differentiirens durch o multiplicirt werden und verſchwinden, ſo wäre im Exempel 427; Bxx der Reihe xxdy zweytes; aber — D ihr viertes Glied. Hieraus alſo beſtimmt ſich δ durch das Parallelogramm nicht.

Aber der zweyte Coefficient der Gleichungsreihe beſteht aus lauter ſolchen Theilen wie die

beyden Coefficienten II in 445 ſind; und iſt alſo ein Product, deſſen einer Factor B iſt, der andere aus gegebenen Gróſſen der Gleichung, wie auch den ſchon beſtimmten A und m; und endlich mit aus δ beſteht. Soll alſo dieſer Coefficient = o ſeyn, ſo kann man den nur erwähnten Factor = o ſetzen: da bleibt B unbeſtimmt, aber δ wird durch die übrigen Gróſſen beſtimmt. Nunmehro beſtimmen ſich C; D; . . . aus den folgenden Coefficienten, weil C nicht ein gemeinſchaftlicher Factor aller Theile des dritten iſt (445) und eben ſo wenig D aller Theile des vierten, u. ſ. w.

447. Man hätte auch können B = o ſetzen; weil alsdenn im dritten Coefficienten der Gleichungsreihe alles wegfiele, was mit B multiplicirt iſt, ſo würde er ſich in ein Product verwandeln, deſſen einer Factor C wäre, und man würde δ dadurch beſtimmen, daß man den andern Factor = o ſetzte. Wollte man aber auch C = o ſetzen, ſo würde ſich wiederum dieſes Verfahren mit D bey dem vierten Coefficienten der Gleichungsreihe auf eine von beyden Arten vornehmen laſſen, u. ſ. w.

Man ſetze $A x^m + R x^{m+\eta}$ ſtatt y in die Gleichung, ſo iſt klar, daß wenn R unbeſtimmt bleiben ſoll, η ſich von eben der Gróſſe beſtimmt wie δ in 446; weil der ganze Unterſchied darinnen

nen beſteht, daß man hier η ſchreibt, wo vorhin δ ſtunde. Nun ſey $\eta = r.\vartheta$ und r eine ganze bejahte Zahl, ſo bedeutet ϑ hier den Unterſchied der Progreſſion der Exponenten der Reihe ℭ welcher Alg. 645; d hieſſe, und R iſt das dortige R. Ferner nehme man an, es ſollen B; C; u. ſ. w. alle bis auf die Gröſſe unter ihnen, die zunächſt vor R hergeht, $= o$ ſeyn; ſo iſt klar, daß man alsdenn $Ax^m + Rx^{m+r\vartheta}$ ſtatt der beyden erſten Theile von y in die Gleichung ſetzen darf, und alſo $r\vartheta = \delta$ wird. Die Coefficienten der Reihe ℭ die nach R folgen, werden nun durch R eben ſo beſtimmt wie in 446 die, welche nach B folgen, durch B beſtimmt werden. Alſo giebt dieſes Verfahren einerley Reihe mit 446.

448. Das Parallelogramm giebt hier eigentlich $\delta = o$ weil alle Fächer deſſelben die Exponenten enthalten, in einer geraden Linie liegen, und alſo nicht verſchiedene Werthe haben, wie doch Alg. 665. VIII. fodert. Die andere Beſtimmung von δ, beruhet auf der Natur der Differentialgleichungen, bey denen δ durch dy allein in die Coefficienten kommen kann, und läſſt ſich daher bey algebraiſchen nicht anbringen.

449. Ex. In der gleichartigen Gleichung (413) $(ax^{\varepsilon} \ldots + kx^{\varepsilon - n}y^n \ldots)\,dx + (px^{\varepsilon} \ldots + tx^{\varepsilon - r}y^r + ux^{\varepsilon - r - 1}y^{r+1} \ldots)\,dy =$ ſchreibe man 445; ſtatt a; α; p; π;

hier $\varepsilon - r; r, \varepsilon - n; n;$ ſo werden die 445 gefundenen Progreſſionen der Exponenten, hier

$(m-1).(r+1)+\varepsilon; (m-1).(r+1)+\varepsilon+\delta; \ldots (m-1).n+\varepsilon; (m-1).n+\varepsilon+\delta \ldots;$ Beyder Progreſſionen erſte Exponenten werden gleich, was auch n iſt, wenn $m = 1$; und folglich findet hier 446; ſtatt, und man darf nur $Ax + Bx^{1+\delta} + Cx^{1+2\delta}$ ſtatt y ſetzen, um δ und A; C; .... nach 446 zu beſtimmen. Man nehme zur Erläuterung die einfachſte dieſer Gleichungen $(ax+by).dx+(px+qy)dy = 0$ ſo kömmt

$$\begin{aligned} ax &= ax \\ by &= bA \qquad + bBx^{1+\delta} \ldots \\ pxdy &= pA + (1+\delta)\,pB \ldots \\ qydy &= qAA + q.(2+\delta)\,AB \ldots \end{aligned}$$

alſo gäbe der erſte Coefficient $= 0$; A

$$= -\frac{(b+p) \pm \sqrt{((b+p)^2 - 4aq)}}{2q}$$

für einen vollſtändigen Werth von $y = Ax$ für die Fortſetzung der Reihe aber iſt $b + (1+\delta).p + q.(2+\delta).A = 0$ oder $\delta = -(b+p+2qA):(p+qA)$.

Dieſes wird unendlich, wenn $p+qA = 0$; alsdenn aber iſt, wegen des erſten Coefficienten auch

$bA + a = 0$; folglich $A = 1\,\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$

oder

oder $q = \frac{bp}{a}$ und die Differentialgleichung ver-

wandelt ſich in $(axby). \left(dx + \frac{p}{a} dy\right) = 0$

wo entweder $y = -\frac{a}{b}$ oder $ax + py = Const.$

450. Die Progreſſionen der Exponenten (449) werden auch einerley, was m auch ſeyn mag, wenn $n = r + 1$. Damit nun hier die Exponenten $(m - 1)(r + 1) + \varepsilon$; $(m - 1) n + \varepsilon$ zugleich die erſten der Gleichungsreihe werden, ſo müſſen die Glieder, von denen ſie herrühren, jenes unter denen die dy, dieſes, unter denen, die dx enthalten, das erſte oder das letzte ſeyn. So laſſen ſich wenigſtens in manchen Fällen noch andere Reihen finden. Man ſetze $n = 1$ alſo $r = 0$; und $a = 0$ ſo iſt

$$
\begin{array}{llll}
b x^{\varepsilon-1} y = & b A x^{m+\varepsilon-1} + & b B & \rbrace x^{m+\varepsilon-1+\delta} \\
p x^{\varepsilon} dy = m p A & & + (m+\delta) p A & \rbrace \ldots \\
c x^{\varepsilon-1} y^2 = & & + c A A & \rbrace x^{2m+\varepsilon-2} \ldots \\
q x^{\varepsilon-1} y dy = & & + m q A A & \rbrace \ldots
\end{array}
$$

Hier

Hier kann man nun m und δ nach Gefallen beſtimmen. Man ſetze z. E. $(mp + b) A = 0$ oder $m = - b : p$ auch $m + \varepsilon - 1 + \delta = 2m + \varepsilon - 2$ oder $\delta = m - 1 = - (b + p) : p$ ſo bleibt A unbeſtimmt, aber B u. ſ. w. werden beſtimmt.

451. Die rationalen Gleichungen, die unter 443 ſtehen, laſſen ſich ſo ausdrucken:
$(a + by + cy^2 \ldots) dx + (p + qy + ryy \ldots) xdy = 0$ oder $Pdx + Qxdy = 0$ daraus folgt $-\frac{dx}{x} = \frac{Qdy}{P}$ wovon ſich die Integrale nach (385) finden läſſt. Will man aber ohne dieſe Integrirung, y durch x ausdrucken, ſo geht ſolches nach 446 an, wenn nur ſo wohl Q als P aus einer endlichen Menge von Theilen beſtehen. Denn wenn man $y = A + Bx^{\delta} + Cx^{2\delta} \ldots$ ſetzt, ſo findet man

$$\begin{array}{lll}
+ b . A^{a} & \left.\begin{array}{r} + bB \\ + 2cAB \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + p\delta B \\ + qA\delta B \\ \\ + r\delta AAB \end{array}\right] . x^{\delta} & \left.\begin{array}{r} + bC \\ + cBB \\ \\ + 2cAC \\ \\ + 2p\delta C \\ + 2qA\delta C \\ + q\delta BB \\ + 2r\delta AC \\ \\ + 2r\delta ABB \end{array}\right] . x^{2.\delta} \\
+ c . A . A & & \\
\cdot & & \\
\cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \\
 & \cdot &
\end{array}$$

Im erſten Coefficienten der Gleichungsreihe ſteigt A auf den Grad auf den y in P ſteigt. Im zweyten befinden ſich alle beſtändigen Gröſſen aus P und Q. Man kann auch in Fällen, die den in 450 angezeigten ähnlich ſind, nach der daſelbſt gegebenen Anweiſung verfahren.

452. Anm. Es iſt nicht unnütz dieſe Art y durch x auszudrucken zu wiſſen, ob man gleich dieſe Gleichungen völlig integriren kann. Denn wenn Q aus ſehr vielen Theilen beſteht, ſo iſt ſeine Zerfällung in Factoren, welche bey der ordentlichen Integration vorausgeſetzt wird, (385) der Auflöſung einer ſehr hohen Gleichung gleichgültig und alſo ſchwer, oft nicht einmahl in unſerer Gewalt, dagegen kann A hier durch eine niedrige Gleichung gegeben ſeyn, und δ wird aus dem zweyten Coefficienten durch eine einfache Gleichung gefunden. Wenn man auch durch die ordentliche Integration eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y findet, ſo kann man zu gewiſſen Abſichten y in x durch eine Näherung ausdrucken wollen, und müſſte alsdenn doch das Parallelogramm auf die Integralgleichung anwenden. Auch wird die Integralgleichung nicht allemahl algebraiſch werden, wo ſich die Schwürigkeit y aus x zu finden noch mehr vergröſſert.

453. Die allgemeine Formel rationaler Gleichungen, die unter 444 gehören, iſt $(a + bx + cxx..)ydx + (p + qx + rxx...)dy = 0$ oder $Tydx + Sdy = 0$ wo ſich die vollkommene Integrale aus $\frac{Tdx}{S} = -\frac{dy}{y}$ finden läſſt. Setzt man hier $y = Ax^m + Bx^{m+\delta}$ . . . ſo kömmt

pdy

$$
\begin{aligned}
pdy &= mpAx^{m-1} + (m+\delta).\,pBx^{m+\delta-1} \\
ay &= \left.\begin{matrix} a \\ +mq \end{matrix}\right\} Ax^{m} + \left.\begin{matrix} a \\ (m+\delta)\,q \end{matrix}\right\} Bx^{m+\delta} \\
qxdy &= \\
bxy &= \left.\begin{matrix} +b \\ +mr \end{matrix}\right\} Ax^{m+1} + \left.\begin{matrix} b \\ (m+\delta)\,r \end{matrix}\right\} Bx^{m+\delta-1} \\
rxxy &=
\end{aligned}
$$

u. ſ. w.

Hier laſſen ſich nun in manchen Fällen wenigſtens Reihen wie in 450 finden. Es ſey z. E. $p=0$ ſo kann man $a+mq=0$ und $m+1=m+\delta$ ſetzen, wo A unbeſtimmt bleibt, das übrige aber gefunden wird.

454. Aufg. In allen Differentialgleichungen, die nur zwey Glieder haben, von welchem Grade ſie auch ſeyn mögen, y durch x zu finden.

Aufl. Für ein beſtändiges $dx=1$; iſt der allgemeine Ausdruck dieſer Differentialgleichungen $y^{n}.\,dy^{\pi-\varepsilon}.\,d^{\varepsilon}y - ax^{\varkappa}dx^{\pi} = 0$. Nun ſey $y = Ax^{m} + Bx^{m+\delta}$ ſo iſt

$$d^{\varepsilon}y = m\,(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1).\,Ax^{m-\varepsilon} + (m+\delta).\,(m+\delta-1)\ldots(m+\delta-\varepsilon+1)$$

$Ax^{m+\delta-\varepsilon}$ und nach gehöriger Rechnung kömmt λ ſtatt $mn + (m-1).(\pi-\varepsilon) + m - \varepsilon$ geſetzt

$$m^{\pi-\varepsilon}.\,m.\,(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1)\,A^{n+\pi-\varepsilon+1}\,x^{\lambda} - ax^{\varkappa}$$

$$\left.\begin{matrix} +(m+\delta-1)\ldots(m+\delta-\varepsilon+1)) \\ +(m-1)\ldots\ldots(m-\varepsilon+1) \\ +m.\,(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1).\,n \end{matrix}\right\}(m+\delta)\Bigg\}.$$

$$m^{\pi-\varepsilon}.\,A^{\pi-\varepsilon+n}.\,Bx^{\lambda+\delta}$$

daraus

daraus folgt $m = \frac{\varkappa + \pi}{n + \pi - \varepsilon + 1}$;
$A = \sqrt[n+\pi-\varepsilon+1]{a : m^{\pi-\varepsilon}.\, m.\, (m-1) \ldots (m-\varepsilon+1)}$ und um δ zu beſtimmen; wo B unbeſtimmt bleibt.

$$\left.\begin{matrix}(m+\delta-1) \ldots\ldots (m+\delta-\varepsilon+1)\\ +(m-1) \ldots\ldots (m-\varepsilon+1)\end{matrix}\right\}.$$
$$(m+\delta) + m\,(m-1) \ldots (m-\varepsilon+1).\, n = 0.$$

455. Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, die nicht gröſſer iſt als $\varepsilon - 1$ ſo iſt A unendlich. Nähmlich alsdenn verſchwindet in irgend einem Differentiale von y der erſte Theil, der A allein enthält, weil ſein Coefficient $= 0$ wird, alſo fällt die Vorausſetzung weg, daß der erſte Theil des Products $y^n.\, dy^{\pi-\varepsilon}.\, d^\varepsilon y$; A allein enthalte.

456. Für $\varepsilon = 2$, oder alle Differentialgleichungen des zweyten Grades von zwey Gliedern iſt

$m = \frac{\varkappa + \pi}{n + \pi - 1}$; $A = \sqrt[n+\pi-1]{a : m^{\pi-2}.\, m.\, (m-1)}$; und $\left.\begin{matrix}(m+\delta-1)\\ +(m-1)\end{matrix}\right\}.\,(m+\delta) +$ $m.\,(m-1).\, n = 0$ woraus man $m + \delta = -\frac{(m-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - m.\,(m-1).\, n\right)}$ erhält.

457. Ex. Wäre hier $n = 1$ und $\varkappa = 0$ und $\pi = 2$ oder $y\,ddy - a\,dx^2 = 0$ ſo käme $m = 1$

aber A unendlich. Alsdenn nähmlich wäre $y = Ax + Bx^{1+\delta}$ folglich $ddy = * + (1+\delta).\delta.Bx^{\delta-1}$; und das erſte Glied von $yddy$ wäre $(1+\delta).\delta.ABx^{\delta}$ alſo nicht durch A allein gegeben; wie die Auflöſung annimmt. Dieſes erläutert 435.

458. Ex. Für $\varepsilon = 2$; $n = 1$; $\pi = 3$ kömmt

$$m = \frac{\varkappa + 3}{3};\ A = \sqrt[3]{a : mm.(m-1)};$$

$$m + \delta = -\frac{(\varkappa - 3)}{6} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\varkappa - 3}{6}\right)^2 - \frac{(\varkappa - 3).\varkappa}{9}\right)}$$

459. Der Werth $y = Ax^m$ (454) thut der Differentialgleichung völlig genug.

460. Zuſ. Hier kann δ unmöglich werden. Z. E. die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen in 458 iſt $-\frac{(\varkappa - 3).(\varkappa + 1)}{12}$; ſind nun beyde Factoren zugleich bejaht oder verneint, ſo iſt dieſe Wurzelgröſſe unmöglich.

461. Zuſ. Wenn $n + \pi - \varepsilon + 1 = 0$ ſo ſcheint $m = \infty$ zu werden. (454) Eigentlich kömmt alsdenn $m.0 - \pi = \varkappa$; Soll ſich alſo die Methode anbringen laſſen, ſo muß $\varkappa = -\pi$ ſeyn; und alsdenn giebt ſich m aus der Gleichung $m^{\pi-\varepsilon} m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1) - a = 0$ und

A bleibt

A bleibt unbeſtimmt. Man kann auch nach 446 verfahren, welches nöthig iſt, wenn nicht $\varkappa = -\pi$. Alsdenn ſetzte man nähmlich $m^{\pi-\varepsilon}. m. (m-1) \ldots (m-\varepsilon+1) = 0$ welches m gäbe; und $\varkappa = \lambda + \delta$ welches δ gäbe; da bliebe A oder B unbeſtimmt, und eines von beyden beſtimmte ſich, wenn man das, was in die Potenzen $\lambda + \delta$; und $\varkappa$; von x multiplicirt wird, zuſammen $= 0$ ſetzte.

461. Anm. Differentialgleichungen wie (456) auf welche des erſten Grades zu bringen, und alsdenn wenigſtens zuweilen zu integriren, lehret Joh. Bernoulli Op. T. IIII. n. 162. und das hier gebrauchte Verfahren ſteht bey ihm daſ. am Ende. Eben das lehret von dieſen und andern Differentialgleichungen Euler Comm. Ac. Petrop. T. III. p. 124.

462. Aufg. z in $aa\,ttddz - cczdt^2 + aaddz = 0$ zu finden.

Aufl. I. Wenn $z = At^m + Bt^{m+\delta} \ldots$ und $dt = 1$; ſo fallen die Exponenten m; $m-2$ in eine lothrechte Reihe (437) alſo giebt das Parallelogramm hier keine Reihe. Die drey Glieder der Gleichung aber geben nach der Ordnung, wie ſie von der linken nach der rechten gehen, folgendes:

$$\begin{array}{ll} m.(m-1).\,aa.\,At^m & +(m+\delta).(m+\delta-1)\,aa\,Bt^{m+\delta} \\ -ccA & -ccB \\ & +aa.\,m.\,(m-1)\,At^{m-2} \end{array}$$

Hier iſt $m.(m-1).\,aa = cc$ alſo $m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + cc : aa)}$ und $\delta = -2$.

II. Für

II. Für eine andere Reihe mache man folgendes

$$+ m.(m-1)\,aaAt^{m}$$
$$-\,ccA$$
$$+ m.(m-1).\,aaAt^{m-2} + (m+\delta)(m+\delta-1).\,aaBt^{m+\delta-2}$$

Damit hier das erſte Glied verſchwindet, muß $m = 0$ oder $m = 1$ ſeyn: A bleibt unbeſtimmt, und es iſt $\delta = 2$.

III. Endlich kann man auch die erſten Glieder der Reihen, die aus $-ccz$; und $aattddz$ entſtehen, unter das dritte der Reihe, die aus $aaddz$ entſteht, ſetzen; deſſen Coefficient $(m + 2\delta)(m + 2\delta - 1).\,aaC$ und der Exponent $m + 2\delta - 2$ iſt. So kömmt $m + 2\delta - 2 = m$ oder $\delta = 1$ und in der Reihe aus $aaddz$ zweytem Gliede bleibt der Coefficient $(m+\delta).(m+\delta-1).\,aaB$ allein, ohne andere. Dieſer verſchwindet, wenn $m = 0$ und $\delta = 1$ und B bleibt unbeſtimmt. So bekömmt man $z = A + Bt + Ct^2 \ldots + Lt^{\varepsilon} + Mt^{\varepsilon+1} + Nt^{\varepsilon+2} \ldots$ und die Gleichungsreihe wird

$$* \quad * + 2aaCt^2 \ldots\ldots + \varepsilon.(\varepsilon-1)\,aaLt^{\varepsilon}$$
$$-ccA - ccBt - ccC \ldots\ldots - ccL$$
$$+2aaC + 6aaD + 12aaE \ldots + (\varepsilon+2.)(\varepsilon+1)\,aaN$$

Iſt hier $L = 0$ ſo verſchwindet N; wird alſo $A = 0$ geſetzt, ſo verſchwinden C; E.. alle Coefficienten bey geraden Exponenten, hingegen alle bey ungeraden, wenn $B = 0$; daß alſo hierinnen die beyden vorigen Reihen enthalten ſind, welche von $m = 0$ und $m - 1$ entſtanden.

Jede

Jede bricht ab, wenn irgend einer ihrer Coeffi=cienten = o geſezt wird, weil N =

$\frac{cc - \varepsilon.(\varepsilon - 1).aa}{(\varepsilon + 2).(\varepsilon + 1)aa}$ . . L. Es ſey I der Coefficient bey dem Exponenten $\varepsilon - 2$; ſo iſt L = (cc — 2).(ε — 3).aa) I : ε.(ε — 1).aa; Iſt alſo nicht I = o ſo muß cc : aa = (ε — 2) (ε — 3) ſeyn, wenn L = o ſeyn, und die Reihe abbrechen ſoll. Dieſe Differentialgleichung kömmt bey einer Aufgabe vor, die Euler Act. Erud. Lipſ. Iun. 1744. aufgelöſet hat.

463. Aufg. In einer Differentialgleichung des erſten Grades y durch eine nach x ſteigende Reihe wie in Alg. 694. auszudrucken.

I. α) Man richte die Gleichung ſo ein, daß ein Theil von ihr aus dy ganz allein beſteht β) Dieſes iſt allemahl möglich, denn wofern ein ſolcher Theil nicht von Anfange ſchon in der Gleichung enthalten iſt, ſo darf man nur die ganze Gleichung mit dem, was in dy multiplicirt iſt, dividiren. γ) Giebt es verſchiedene Theile, die dy enthalten, ſo kann man zu gegenwärtigem den wählen, wo es nur mit einer beſtändigen Grösſe multiplicirt wird. δ) Iſt dergleichen nicht vorhanden; ſo muß man einen wählen, der x oder y enthält, und alſo damit die ganze Gleichung dividiren. ε) Kömmt alsdenn ein Theil der Gleichung, deſſen ganzer Diviſor nur x von der erſten Abmeſſung mit einer beſtändigen Gröſſe multipli=

tiplicirt iſt, der ſo $\frac{adx}{bx}$ ausſähe, ſo ſchreibe man $e+u$ ſtatt x. ζ) So verwandele man die Glieder, deren Diviſor x oder $b+x$ enthält, nach Alg. 6. in unendliche Reihen.

Ex. Wo $dx = 1$ (419) zu β; γ; $ady - xy - ab = 0$ giebt $dy - \frac{xy}{a} - b = 0$; zu δ); $ydy = 1 - xyy$ giebt $dy = \frac{1}{y} - xx$; zu ε); $xdy - xy - 1 = 0$ giebt $dy - \frac{(y+1)}{e+x} = 0$ folglich $dy - (y+1).\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{ee}\ldots\right) = 0$.

II. Alle Theile der Gleichung, welche y und dy beydes zugleich oder eines allein enthalten, ſchreibe man linker Hand in eine Columne untereinander, ſo, daß der Theil, der aus dy allein beſteht, die oberſte Stelle einnimmt.

III. Mit dieſem Theile ſchreibe man in eine Zeile alle Theile der Gleichung, die nur x enthalten; ſo, daß zur linken Hand zuerſt die niedrigſten ſtehen, das iſt, diejenigen, wo x den gröſſten verneinten Exponenten, oder wenn keine verneinten Exponenten da ſind, den kleinſten bejahten hat.

IIII. Wenn x keine verneinten Exponenten hat, ſo nehme man o für den erſten Theil der Reihe dy an; und alſo c für den erſten Theil der Reihe y, wo c die beſtändige Gröſſe bedeutet, die beym Integriren pflegt hinzugeſetzt zu werden. Dieſe Werthe von y und dy, ſetze man in die übrigen Theile der Columne, und verfahre ferner wie Alg. 694; nur daß man ſtatt des Dividirens integrirt.

V. Ex. $xdy + dy + yydx = xxdx + dx$; wo man $dx = 1$ ſetzt. Alſo kömmt

$$\begin{array}{llll}
dy = & +1 & * & +x^2 \\
 & -cc & -(2c+1)Bx & -2C \\
 & & & -BB \\
 & & & -2cC \\
xdy = & & +B & +2C \\
yy = & +cc & +2cB & +BB \\
 & & & +2cC \\
\hline
\end{array}$$

$$y = c + (1-cc)x - \frac{(2c+1)}{2}Bx^2 + \frac{1-2C-BB-2cC}{3}x^3.$$

Weil von der Reihe dy das erſte Glied $=$ o, ſo ſind die erſten Glieder von xdy; und yy; o und cc. Das zweyte Glied der Reihe dy nun muß enthalten was in dx und nicht mit in x multiplicirt iſt. In der Gleichung ſelbſt nun befindet ſich ſchon der Theil dx der hier in einer Zeile mit dy geſchrieben iſt: dazu kömmt hier noch (nach Alg. 694.) der Reihe yy erſter Theil $+$ cc aber mit entgegengeſetztem Zeichen alſo bekömmt die

Reihe

Reihe dy den zweyten Theil 1 — cc; dieſes giebt für y den zweyten Theil $(1 - cc)x$. Man nenne deſſelben Coefficienten B; ſo ſind der Reihen xdy; yy; zweyte Glieder; + Bx und + 2cBx; die alſo, weil die Gleichung ſelbſt keinen Theil mit x allein von der erſten Abmeſſung enthielte, $-(2c + 1)Bx$ zum dritten Gliede der Reihe dy geben: So wird $-\frac{(2c+1).B}{2}$ x^2 der Reihe y drittes Glied; und wenn man wiederum den Coefficienten $-\frac{(2c+1)B}{2} = C$ ſetzt, ſo ſind der Reihen ydy; yy; dritte Glieder + 2Cxx und + (BB + 2cC). xx welches mit entgegengeſetzten Zeichen zu xx das ſchon als ein Theil der Gleichung in der oberſten Zeile ſteht, addirt, $(1 - 2C - 2cC - BB)$ xx für der Reihe dy und folglich $\frac{1 - 2C - 2cC - BB}{3}$ x^3 für der Reihe y drittes Glied giebt: So läſſt ſich die Arbeit immer weiter fortſetzen.

VI. Hat x verneinte Exponenten, ſo nehme man für der Reihe dy erſten Theil, den niedrigſten in der Zeile (III) an, ſo giebt die Integrirung den erſten von y, und ſolchergeſtalt fährt man wie vorhin fort.

VII. Ex. $xxdy + xxy = x - 1$ giebt nach I. δ und III;

$$\begin{array}{llll} dy = & -x^{-2} & +x^{-1} \\ y = & & +1 \\ & & +1 \end{array}$$

Aus $-\frac{1}{xx}$ als dem erſten Theile von dy wird $+\frac{1}{x}$ als der erſte Theil von y; und dieſer mit entgegengeſetztem Zeichen in die oberſte Zeile zu dem ſchon da befindlichen $+\frac{1}{x}$ geſetzt giebt o für den zweyten Theil der Reihe dy. Alſo wird $y = \frac{1}{x}$ der völlige Werth ſeyn, der dee Gleichung genug thut. Man könnte zwar auch aus $dy = -\frac{1}{xx} + 0$ ſchlieſſen $y = +\frac{1}{x} + 0$ aber die Rechnung wird zeigen, daß $c = 0$ ſeyn muß. Der Schluß thut nähmlich nicht dar, daß die beſtändige Gröſſe, die man zu $+\frac{1}{x}$ addiren kann, von o unterſchieden ſeyn muß, weil die Conſt (204) auch = o ſeyn kann wie in 208.

VII. Eigentlich hätte man in dieſem Exempel nach I ε; verfahren ſollen. Die Urſache von dieſer Regel iſt, weil ſich $\frac{a\,dx}{bx}$ nur logarithmiſch integriren läſſt, welches ſich hieher nicht ſchickt.

Weil

Weil man nun in dem Exempel den Theil $+\frac{1}{x}$ von dy nicht integrirte, indem er ſich ſelbſt aufhob, ſo war dieſe Veränderung nicht nöthig.

VIII. Wäre die Gleichung $xxdy + xxy = 3x - 1$ geweſen, ſo wäre der Reihe dy zweytes Glied nach eben dem Verfahren wie in VI; $+\frac{2dx}{x}$ geworden, das hätte für der Reihe y zweytes Glied $2lx$ gegeben. Dieſes nun kann man hier nicht brauchen, weil die Potenzen von x in der Reihe für y nach ihren Graden folgen ſollen, welche Ordnung durch den Logarithmen unterbrochen wird. Daher hätte man nach I. ε. $dy + y = -\frac{1}{(b+u)^2} + \frac{3}{b+u}$ gemacht, wo ſich die Theile rechter Hand in eine nach u ſteigende Reihe verwandeln laſſen. Solchergeſtalt erhält man

$$dy = 0 + \frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u + \frac{3b-3}{b^4}u^2 \ldots$$
$$\quad - c \qquad\quad - B \qquad\quad - C$$

$$y = c + \left(\frac{3b-1}{bb} - c\right)u + \left(\frac{3b-2}{b^3} - B\right) \cdot \frac{1}{2}uu + \left(\frac{3b-3}{b^4} - C\right) \cdot \frac{1}{3}u^3 \ldots$$

Nähmlich $\frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u$

$$+ \frac{3b-3}{b^4} u^2 \ldots = \frac{3}{b+u} - \frac{1}{(b+u)^2}$$ und

B iſt der Reihe y zweyter Coefficient $= \frac{3b-1}{bb}$.

$- c$; ſo C ihr dritter $= \left(\frac{3b-2}{b^3} - B \right) \cdot \frac{1}{2}$

u. ſ. w. Will man hier y für ein gegebenes x haben, ſo drücke man x durch einen groſſen Theil b und einen kleinen u aus; z. E. für $x = 1001$ ſetze man $b = 1000$; $u = 1$; ſo findet man y unmittelbar aus der Reihe für $u = 1$ d. i. für $x = 1001$.

Eine Reihe aber, die y unmittelbar durch x ausdruckte, läſſt ſich ſo nicht finden: denn wollte man $x - b$ ſtatt u ſetzen, ſo müſſte man alle Potenzen von u machen, um alle Theile zu haben, die nur b ohne eine beſtändige Gröſſe enthielten und zuſammen in das erſte Glied dieſer neuen Reihe gehörten, u. ſ. w.

Das Parallelogramm gäbe hier für eine ſteigende Reihe $y = Ax^{-1} + B + Cx \ldots$ aber man fände für den erſten Coefficienten zwo Gleichungen $1 - A = 0$ und $A + 3 = 0$ welche nicht zuſammen ſtatt finden können; alſo giebt es keine ſteigende Reihe unmittelbar durch x.

X. Ex. Bey $dy - 1 : y = - xx$ ſetze man

$$\begin{array}{rl} dy = & 0 + c - c^3 x - xx + \frac{3}{2} c^5 \\ -1 : y = & \quad - c + c^3 \qquad\qquad - \frac{3}{2} c^5 \\ \hline y = & 1 : c + cx - \frac{c^3 xx}{2} + \frac{3c^5 - 2}{2} x^3 \ldots \end{array}$$

Wenn

Wenn man nähmlich $\frac{1}{2}$ für das erſte Glied von y annimmt, ſo kömmt $-$ c für das erſte von y^{-1} und alſo $+$ c für das zwente von d y; daher $+$ cx für das zweyte von y; folglich von $\left(\frac{1}{c} + cx\right)^{-1}$ das zweyte Glied $+ c^3 x$ welches mit entgegengeſetzten Zeichen das dritte von d y und folglich $- \frac{c^3 xx}{2}$ zum dritten von y giebt. Ferner wird von $\left(1 : c + cx - \frac{c^3 xx}{2}\right)^{-1}$ das dritte Glied $- \frac{3}{2} c^5 xx$, dieſes mit entgegengeſetzten Zeichen zu dem ſchon oben befindlichen geſetzt, giebt das vierte Glied von d y und alſo von y u. ſ. w.

XI. Das bisherige iſt Newtons Regel Meth. of Flux. Prob. 2. nur habe ich ſie etwas anders und ſo vorgetragen, daß man den Grund davon leichter einſehen kann. Wie ſie bey dem Newton ausſieht, wird folgendes zeigen: Er ſetzt zum voraus, daß man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens; $\frac{dy}{dx}$ auf den andern den Werth dieſes Bruches in endlichen Gröſſen ausgedruckt hat. Es ſey $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$; ſo iſt ſein Verfahren folgendes:

	$1 - 3x + xx$					
y	*	$+ x$	$- xx$	$+ \frac{1}{3} x^3$	$- \frac{1}{6} x^4$	$+ \frac{1}{30} x^5$
$+ xy$	*	*	$+ 1$	$- 1$	$+ \frac{1}{3}$	$- \frac{1}{6}$
Summe	1	$- 2$	$+ 1$	$- \frac{2}{3}$	$+ \frac{1}{6}$	$- \frac{4}{30}$

Die

Die Theile der Gleichung, welche nur x enthalten, ſchreibt er in die horizontale Zeile, und die, welche y enthalten, in die verticale Columne. Nun nimmt er für der Reihe y erſtes Glied, den erſten Theil linker Hand in der Zeile, mit x multiplicirt, und mit dem Exponenten, den er nach dieſer Multiplication hat dividirt, mit einem Worte, ſein Integral, welches hier x iſt. Dieſes erſte Glied braucht er, die erſten Glieder der Reihen zu erhalten, welche aus den Theilen der ſenkrechten Columne werden, und hier x und xx ſind. Der Reihe y erſter Theil x, zu $-3x$ in der oberſten Zeile geſetzt giebt $-2x$; daraus folgt durch die Integration der Reihe y zweytes Glied $-xx$ und der Reihe xy zweytes Glied $-x^3$. Nun hebt ſich der Reihe y zweytes Glied, mit dem erſten der Reihe xy auf, das eben den Exponenten hat, und bleibt nur xx im dritten Theile der oberſten Zeile übrig, daraus durch die Integration der Reihe y drittes Glied $\frac{1}{3}x^3$ und alſo der Reihe xy drittes Glied $\frac{1}{3}x^4$ folgt. Die Glieder, welche den Würfel von x enthalten, betragen zuſammen $-\frac{2}{3}x^3$ alſo wird durch die Integration der Reihe y viertes Glied; $-\frac{1}{6}x^4$ u. ſ. w.

Man ſieht leicht, daß Newtons Verfahren nur der äuſerlichen Geſtalt nach von dem meinigen unterſchieden iſt. Ich hätte die gegebene Gleichung ſo eingerichtet: $dy - y - xy = 1 - 3x + xx$ und die Glieder zur linken des Gleichs-

 heits-

heitszeichens, hätten die Columne ausgemacht. Newton läſſt dy weg, und ſchreibt die übrigen Theile der Columne mit dem Zeichen, das demjenigen, das ſie bey mir hätten, entgegengeſetzt iſt; das ſie nähmlich bekämen, wenn ſie auf die rechte Seite, zu den Theilen die nur x enthalten, wären gebracht worden. Aus dem erſten Theile ſeiner oberſten Zeile aber, findet er das erſte Glied der Reihe für y eben ſo, wie ich es nach IIII gefunden hätte, wenn ich $c = o$ angenommen hätte, wie Newton thut, ob er wohl auch lehret, wie man die beſtändige Gröſſe zu addiren hat. So erhält er daraus die Glieder der Reihen, welche den Theilen der Columne zugehören; dieſe Glieder aber addirt er mit den Zeichen, welche ſie durch die Rechnung bekommen, nicht mit den entgegengeſetzten, zu den Theilen der Zeile, die eben die Exponenten haben; dieſe Glieder haben nähmlich, nur erwähntermaſſen, in Newtons Rechnung Zeichen, die denen entgegengeſetzt ſind, welche ſie in der meinigen hätten. Alſo iſt meine Regel der newtoniſchen vollkommen gleichgültig.

464. Zuſ. Man kann auch ſo eine fallende Reihe erhalten. Z. E. aus $dy - y : xx = 2x + 3 - 4 : x + 1 : 2x$ folgendergeſtalt:

$dy =$

$$\begin{array}{rlllll}
dy & = 2x + 3 & - 4.\, x^{-1} & + 1.\, x^{-2} & & \\
 & + 1 & + 4 & + c & - (c + 1)\, x^{-2} & \\
- y : x^2 & = - 1 & - 4 & - c & + c + 1 & \\
\hline
y & = xx + 4x + c - (c + 1) : x + (c + 1) : 2xx \ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

Hätte ſich hier, was in 1 : x multiplicirt iſt, nicht von ſich ſelbſt aufgehoben, ſo wäre das Verfahren auf dieſe Art nicht fortzuſetzen geweſen. (463; VII. VIII.)

465.

465. Anm. Was von 419. bis hieher enthalten iſt, habe ich in einer 1745. zu Leipzig gehaltenen Diſputation: De reſolutione aequationum differentialium per ſeries; ad Newt. meth. flux. Prob. II. meditata vorgetragen. Der Gebrauch des Parallelogramms, den ich in einer vorhergehenden gezeigt, (Alg. 311.) brachte mich darauf. Ich habe indeſſen ſchon damahls in der Vorrede erinnert, daß man den Reihen keinen ſo hohen Werth beylegen dürfe, darüber die andern Methoden, Integrale durch endliche Ausdrückungen zu finden, zu vernachläſſigen. Ich zeigte auch damahls an, was ich in Cramers Anmerkungen zu Jac. Bernoullis Werken, n. CI. not. a. geleſen hatte, daß Herr Nicolaus Bernoulli eine allgemeinere Methode als das Parallelogramm erfunden hätte. Ich hatte damahls auf mein Befragen dieſerwegen von Herr Eulern keine Nachricht erhalten können; als ich aber meine Schrift Herrn Daniel Bernoulli nach Baſel ſchickte, hat derſelbe die Gewogenheit gehabt, mir einen Auszug aus Briefen von 1733; und 1736; an Stirlingen und Cramern zu überſenden, welche dieſe Methode enthalten. Sie beſteht kürzlich in Folgendem:

466. Aufg. **Alle mögliche Reihen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läſſt, zu finden.**

Aufl. Man ſetze $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ wo jeder Exponent kleiner oder gröſſer als der folgende iſt, nachdem die Reihe ſteigen oder fallen ſoll. So verwandelt man die Gleichung in eine Reihe, wo die Glieder, die einerley Exponenten haben, folgendergeſtalt erkannt und die Exponenten und Coefficienten beſtimmt werden:

Für

Für eine ſteigende Reihe erwähle man die Glieder, in welchen x den kleinſten Exponenten hat, wobey man verſchiedene Vorausſetzungen macht, daß α erſtlich eine verneinte Zahl, denn 0; denn eine bejahte, bedeuten ſoll: Man nimmt nähmlich α nach jeder dieſer Vorausſetzungen zu beſtimmen, wenn es nöthig iſt, Theile der Gleichung mit zu Hülfe, in deren Exponenten α nicht iſt. A beſtimmt man wie gewöhnlich, wofern es nicht unbeſtimmt bleibt. So verhält man ſich mit den folgenden Gröſſen β; γ; ... ſo daß α; β; γ; eine ſteigende Reihe ausmachen.

467. Ex. Für $rrdy^2 - rr + yy = 0$ kömmt

$$yy = Ax^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2AD^{\alpha+\delta} + 2AEx^{\alpha+\varepsilon}$$
$$+ BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma} + 2BDx^{\beta+\delta} + 2BEx^{\beta+\varepsilon}$$
$$+ CCx^{2\gamma} + 2CDx^{\gamma+\delta} ..$$

$$rrdy^2 = \alpha^2 A^2 r^2 x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta ABr^2 x^{\alpha-\beta-2} + 2\alpha\gamma ACr^2 x^{\alpha+\gamma-2}$$
$$+ 2\alpha\delta ADrrx^{\alpha+\delta-2} ...$$
$$+ \beta\beta BBr^2 x^{2\beta-2}. + 2\beta\gamma BDrrx^{\beta+\gamma-2}$$
$$+ \gamma\gamma CCrrx^{2\gamma-2} ...$$

$$-rr = -rr$$

Man ſuche eine ſteigende Reihe.

I. Fall.

I. Fall. Wenn α eine verneinte Zahl ſeyn ſoll, ſo kann nur der Exponent $2\alpha - 2$ der kleinſte unter allen ſeyn, alſo müſſte der Coefficient deſſelben, folglich entweder α, oder A; $= 0$ ſeyn, welches beydes nicht ſtatt findet, und alſo zeigt, daß dieſe Vorausſetzung nicht gemacht werden darf.

II. Fall. Wenn $\alpha = 0$ ſo ſo iſt wieder, eben der vorige Exponent der kleinſte unter allen, und ſein Coefficient wird $= 0$ weil $\alpha = 0$; alſo findet dieſe Vorausſetzung ſtatt, und A bleibt unbeſtimmt; dieGleichungsreihe aber ſieht nun ſo aus.

$$\left.\begin{array}{l} AA - rr \\ +\beta\beta BBrrx^{2\beta-2} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} 2ABx^{\beta} \\ +2\beta\gamma BCr^2x^{\beta+\gamma-2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2ACx^{\gamma} \\ +BBx^{2\beta} \\ +2\beta\delta BDrrx^{\beta+\delta-2} \\ +\gamma\gamma CCrrx^{2\gamma-2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +2ADx^{\delta} \\ +2BCx^{\beta+\gamma} \\ +2\beta\varepsilon BErrx^{\beta+\varepsilon-2} \\ +2\gamma\delta CDrrx^{\gamma+\delta-2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\beta\zeta BFrrx^{\beta+\zeta-2} \\ +2\gamma\varepsilon CErrx^{\gamma+\varepsilon-2} \\ +\delta\delta DDrrx^{2\delta-2} \end{array}\right\}$$

Die Theile, welche mit Klammern zuſammenhängen, bekommen, wie die Folge zeigen wird, einerley Exponenten, wo ſich in den Coefficienten griechiſche Buchſtaben befinden, da rühren die Theile von $rrdy^2$ her.

Um nun β zu beſtimmen, nimmt man den Exponenten $2\beta - 2$, deſſen Coefficient allein oder zuſammen mit $AA - rr$; $= 0$ ſeyn muß.

Wenn

Wenn er allein $= 0$ ſeyn ſollte, ſo müſſte entweder β; oder B; $= 0$ ſeyn. Jenes findet nicht ſtatt, weil $\beta > \alpha$ ſeyn ſoll. Wäre $B = 0$; und β nicht $= 0$ ſo hätte man keinen andern Theil der Gleichungsreihe mit $AA - rr$ in ein Glied zu bringen, als den deſſen Exponent $2\beta - 2$ iſt. Denn der, deſſen Exponent β iſt, geht alſo nicht dazu an, und die andern enthalten alle noch γ u. ſ. w. auſer β, daß ſich alſo β durch ſie nicht beſtimmte, wenn man einen von ihnen $= 0$ ſetzte. Alſo wäre $2\beta - 2 = 0$ oder $\beta = 1$; und weil $B = 0$; auch $AA - rr = 0$; und $A = \pm r$ und B; C; D; $\ldots = 0$ oder $y = \pm r$ und $dy = 0$; welches allerdings der Gleichung auch genug thut: Aber weil man einen veränderlichen Werth von y ſucht, ſo läſſt ſich nicht $B = 0$ ſetzen. Folglich behält man nur $2\beta - 2 = 0$ und ſetzt $AA - rr + BB\beta\beta rr = 0$ oder $BB = (rr - AA) : rr$.

Die Gröſſe γ zu beſtimmen, nimmt man den Theil, deſſen Exponent $\beta + \gamma - 2$ oder $\gamma - 1$. Wenn die vorhergefundenen Werthe von B; β; α; beybehalten werden, und A nicht $= 0$ ſeyn ſoll, ſo kann des Theiles, deſſen Exponent $\gamma - 1$ iſt, Coefficient für ſich allein nicht $= 0$ ſeyn. Sonſt müſſte $C = 0$ ſeyn, und daraus folgte, daß der Theil, welcher $\beta = 1$ zum Exponenten hat, auch $= 0$ folglich A oder $B = 0$ ſeyn müſſte, welches doch nicht angeht Alſo nehme man zu dem Theile, deſſen Exponent $\beta + \gamma - 2 = \gamma - 1$ iſt, noch den Theil, deſſen Exponent $\beta = 1$

iſt,

iſt, damit beyde zuſammen ein Glied der Gleichungsreihe ausmachen; oder man ſetze $\gamma - 1 = 1$ und $\gamma = 2$ auch $2\gamma BCrr + 2AB = 0$ und $C = - A : 2rr$.

Eben ſo beſtimmt ſich δ aus dem Theile, deſſen Exponent $\beta + \delta - 2 = \delta - 1$ iſt, und der mit den Theilen, deren Exponenten $\gamma = 2 = 2\beta = 2\gamma - 2$ ſind, zuſammen $= 0$ ſeyn muß. Alſo iſt $\delta = 3$ und $D = - (2AC - BB - \gamma\gamma CCrr) : 2\delta BBr$ d. i. $= - B : 6rr$ weil $2AC + \gamma\gamma CCrr = 0$. Wie vorhin bey C ſo wird hier auch erwieſen, daß D nicht $= 0$ ſeyn kann, und eben ſo verhält es ſich mit E; F; u. ſ. w.

So findet man bey den folgenden Gliedern $\beta + \varepsilon - 2$ oder $\varepsilon - 1 = \delta = \beta + \gamma = \gamma + \delta - 2 = 3$ alſo $\varepsilon = 4$; und $E = - C : 12rr$; Ferner $\zeta = 5$; und folgendes Geſetz der Coefficienten $B = (rr - AA) : rr$; $C = - A : 1.2.rr$; $D = - B ; 2.3rr$, $E = - C : 3.4rr$; $F = - E : 4.5.rr$.

Ein Bogen, deſſen Sinus A iſt, heiſſe $\mathfrak{B}$ ſin A; und es ſey $y = \sin (x + \mathfrak{B} \sin A)$ ſo iſt

$$\frac{rdy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx;$$ (281) ferner ſey auch

$y = \operatorname{coſ} (x + \mathfrak{B} \sin A)$ oder $\pm \sqrt{(rr - yy)}$

$$= \sin (x + \mathfrak{B} \sin A) \text{ oder } \frac{\pm rydy}{y. \pm \sqrt{(rr - yy)}} = dx$$

$= dx$ alſo $- \frac{rdy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx$. Die vor-gegebene Gleichung $\frac{rrdy^2}{rr - yy} = dx^2$ begreift beyde unter ſich, und alſo bedeutet y entweder den Sinus, oder den Coſinus des Bogens, der $= x + B \sin A$ iſt. Nachdem alſo $A = 0$ oder $= r$ iſt, begreift dieſe Reihe die beyden 286; 297; unter ſich.

III. Fall. Wenn α bejaht ſeyn ſoll, ſetze man nur in der gefundenen Reihe $A = 0$ da die Reihe von Bx anfängt, welches ſoviel iſt, als wäre $\alpha = 1$;

Fallende Reihen giebt es nicht, denn in der Gleichungsreihe hätte der erſte Theil der Reihe, die aus yy entſteht, allein den höchſten Exponenten α; alſo müſſte $A = 0$ ſeyn.

468. Anm. Man könnte dieſe Reihe leichter fol-gendergeſtalt finden: Man nehme der vorgegebenen Gleichung ihre Differentialgleichung $2rrdyddy + 2ydy = 0$ oder $rrddy + y = 0$. Dieſe giebt für $r = 1$;

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma.(\gamma-1).Cx^{\gamma-2}..$$
$$+ Ax^{\alpha} \ldots$$

oder $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = \alpha + 2 = 2$; $\delta = \beta + 2 = 3$; $\varepsilon = \gamma + 2 = 4$ u. ſ. w. wo A; B; unbeſtimmt bleiben, und $C = - \frac{A}{\gamma(\gamma - 1)}$

$D = \frac{-B}{\delta.(\delta - 1)}$ u. ſ. w. Dieſe Reihe iſt allgemei-

ner

ner als die vorige (467) wo B beſtimmt war; denn jede höhere Differentialgleichung begreift mehr unter ſich als eine, die nicht ſo hoch iſt, weil man bey ihr mehrmahl integriren, und alſo auch mehr beſtändige Gröſſen addiren kann. (204)

469. Ex. Aus $xxddy - ny = 0$ wird $(\alpha(\alpha - 1) - n)Ax^{\alpha} + (\beta(\beta - 1) - n)Bx^{\beta} + (\gamma.(\gamma - 1) - n)Cx^{\gamma} \ldots$ Setzt man hier jeden Coefficienten $= 0$ ſo iſt $\alpha\alpha = \alpha + n$ alſo $\alpha = \frac{1}{2} \pm \surd(\frac{1}{4} + n)$ und weil eben die Gleichung für β herauskömmt, ſo ſetze man $\beta = \frac{1}{2} \mp \surd(\frac{1}{4} + n)$ da alsdenn bey beyden Exponenten die obern Zeichen für eine fallende, die untern für eine ſteigende Reihe gelten. Nun kömmt eben die Gleichung für γ, welches alſo entweder α oder β ſeyn müſſte, und weil es keines von beyden ſeyn ſoll, gar nicht vorhanden ſeyn kann: alſo muß C u. ſ. w. $= 0$ ſeyn; und der Werth von y beſteht nur aus den gefundenen beyden Theilen, da A und B unbeſtimmt bleiben.

470. Dieſe Methode (466) iſt in der That allgemeiner als das newtoniſche Parallelogramm, beſonders deßwegen, weil ſie die Exponenten aus den Coefficienten der Differentiale beſtimmt; daher ſie Reihen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe, und ſelbſt wenn ſie Reihen giebt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reihen des Parallelogramms in einer Progreſſion ſind, doch dieſe Reihen vollſtändiger, nähmlich mit mehr Gliedern giebt als das Parallelogramm.

Das Parallelogramm kann z. E. $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 \ldots$ geben, und dieſe Methode $y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 \ldots$ wo $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{D}$; unbeſtimmt bleiben, und wenn ſie $= 0$ geſetzt werden, die Reihe des Parallelogramms herauskömmt. Bey Gleichungen zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen aber, die keine Differentialgleichungen ſind, kann dieſe Methode, ſoviel ich einſehe, nichts anders geben als das Parallelogramm und das Parallelogramm iſt ihr da vielleicht noch vorzuziehen, weil man die Ordnung bey dem Verfahren nach demſelben leichter überſieht. Man vergleiche hiemit Alg. 737 . . . 739. Vielleicht hat Newton ſeine Regel zuerſt die Gleichungen zwiſchen endlichen Gröſſen aufzulöſen erfunden, und nachgehends auf Differentialgleichungen erweitert. Daß mir übrigens, ehe ich Unterricht von dieſer Methode erhalten habe, nicht unbekannt geweſen iſt, daß man die Exponenten aus den Coefficienten beſtimmen kann, wird aus 450; 453; 454; u. ſ. w. erhellen. Von der Integration durch Reihen handelt Euler Inſt. calc. Int. Vol. I. S. I. c. 3.

Von den Differentialen für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe.

471. Aufg. Wenn y eine Function von x iſt, das Differential von y ſo vollſtändig auszudrucken, daß die höhern Differentiale nicht weggelaſſen werden.

Aufl.

Aufl. In dem Werthe von ym (151) ſey e = dx oder er ſey der nächſte nach dem Werthe y ſelbſt, ſo iſt $ym - y = dy = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \frac{d^4 y}{1.2.3.4} \ldots$ oder wenn $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx \ldots$ ſo iſt $dy = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 \ldots$

472. Bey den gewöhnlichen Regeln des Differentiirens werden die folgenden Glieder dieſer Reihe weggelaſſen, weil $\frac{dy}{dx} = p + \frac{1}{2} qdx + \frac{1}{6} rdx^2 \ldots$ ſich in p verwandelt, wenn dx verſchwindet; daß alſo $dy = pdx$ die Differentialgleichung für ein verſchwindendes dx iſt (20). Aber wenn für einen beſondern Werth von x; die Gröſſe $p = 0$ würde, ſo wäre dafür $dy = \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{6} rdx^3 \ldots$ und alſo für ein verſchwindendes dx; $\frac{dy}{dx^2} = \frac{1}{2} q$ oder $dy = \frac{1}{2} qdx^2$. Machte einerley Werth von x, zugleich p und q = 0; ſo erhellt, daß eben ſo $dy = \frac{1}{6} rdx^3$ ſeyn wird; u. ſ. w. In ſolchen Fällen verſchwindet alſo dy in Vergleichung mit Unendlichkleinen der erſten Ordnung (11). Dieſe Betrachtungen kommen bey den gröſſten und kleinſten vor (155).

473. Ex. Für $y = (a - x)\,x$ iſt $p = a - 2x$ $q = -2$; $r = 0$. . . alſo das vollſtändige $dy = (a - 2x).\,dx - dx^2$. Für $2x = a$ wird alſo $dy = -\,dx^2$.

474. Man findet dieſen Werth von dy für einen gewiſſen Werth von x z. E. für $x = a$ auch unmittelbar aus den Regeln des Differentiirens (20) ſo: Man ſetze $x - a = z$; und ſetze $z + dz$ ſtatt z und ziehe den erſten Zuſtand von y vom zweyten ab, wobey man $z = 0$ ſetze.

Ex. Für $y = (x - a)^n.\,P + C$ wo n eine bejahte Zahl iſt, und P den Factor $x - a$ nicht enthält, wird der zweyte Zuſtand von $y = (z + dz)^n.\,(P + dP) + C = dx^n.\,(P + dP) + C$; alſo wird der Werth von dy hier $P\,dx^n$ wie ſchon (16) vorgekommen iſt. Dieſes Verfahren iſt oft bequemer als die Betrachtung der Reihe (472).

475. Ex. Das Differential von $y = x^x$ für den Fall zu finden, da $x = \frac{1}{e}$ (232). Weil überhaupt $dy = y.\,(1 + lx)\,dx$. (236) ſo würde dieſes hier $= 0$. Man brauche alſo die Reihe (472); da iſt $p = y\,(lx + 1)$; $q = y.\,(lx + 1)^2 + \frac{y}{x}$. Für $x + \frac{1}{e}$ wird alſo $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1-e):e}$ und der geſuchte Werth von $dy = \frac{1}{2}\,e^{(1-e):e}.\,dx^2$.

476. Wenn die Gleichung zwiſchen x und y vom erſten Grade $y = \alpha x + b$ iſt, alſo $dy = \alpha dx$; ſo iſt $p = \alpha$ und alſo nie $= 0$, was auch x für einen Werth hat, daher hier dieſe Erinnerungen nicht vorkommen. Wenn man die Sache nach 16 betrachtet wie in 474; ſo erhellt ebenfalls, daß $(x + dx) - x = dx$ auch wenn x in Vergleichung mit dx verſchwindet.

Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo veränderliche Gröſſen enthalten.

477. Lehrſ. Jede gleichartige ganze oder gebrochne Function von x; y; die V heiſſen mag, läſſt ſich, wenn $y = zx$ geſetzt wird, durch ein Product aus einer Potenz von x in eine Function von z ausdrucken.

Bew. A; B; ſollen zwo ganze rationale oder irrationale gleichartige Functionen von x; y; ſeyn, ſo wird $A = x^\lambda . Z$; $B = x^\varkappa . W$ daß Z; W; Functionen von z ſind (415) alſo $\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa} . \frac{Z}{W}$. Nun kann $\frac{A}{B}$ jede Function des Lehrſatzes vorſtellen, und $\frac{Z}{W} = T$ iſt eine Function von z. Es ſey noch $\lambda - \varkappa = n$; ſo iſt $V = x^n . T$.

478. Wenn $dT = R.dz$ wo R eine Function von z iſt, ſo iſt $dV = nx^{n-1}Tdx + x^n Rdz$. Nun ſoll auch $dV = Pdx + Qdy$ ſeyn. Weil $dy = zdx + xdz$ ſo iſt $dV = Pdx + Qzdy + Qxdz$. Nun müſſen beyde Ausdrückungen von dV noch gleich bleiben, wenn man auch entweder x oder z unveränderlich ſetzte, weil y durch x nicht beſtimmt wird, und ſich alſo ſo verändern könnte, daß z ungeändert bliebe, indem ſich x ändert, oder auch umgekehrt x ungeändert bleiben kann, indem ſich z ändert. Alſo müſſen in beyden Ausdrückungen von dV, die Theile, welche dx enthalten, unter ſich, und die, welche dz enthalten, auch unter ſich, gleich geſetzt werden, und es iſt $x^n R = Qx$; und $nx^{n-1}T = P + Qz$; die letzte Gleichung iſt ſoviel als $\frac{nV}{x} = P + \frac{Qy}{x}$; folglich $nV = Px + Qy$. Eine merkwürdige Eigenſchaft gleichartiger Gleichungen, deren Abmeſſung n iſt.

479. Ex. $V = \frac{\surd(y^e + x^e)}{y - x}$; giebt $dV =$

$$\frac{\frac{1}{2}e.(y^{e-1}dy + x^{e-1}dx).(y-x) - (dy-dx).(y^e + x^e)}{M}$$

wo $M = (y - x)^2.\surd(y^e + x^e)$. Alſo

$$P = \frac{(1 - \frac{1}{2}e)x^e + \frac{1}{2}ex^{e-1}y + y^e}{M};$$

Q =

$$Q = \frac{(\tfrac{1}{2}e - 1).\,y^e - \tfrac{1}{2}ey^{e-1}x - x^e}{M}$$

und der Zähler von $Px + Qy$; den gemeinſchaftlichen Nenner weggelaſſen:

$$(1 - \tfrac{1}{2}e).\,x^{e+1} \left.\begin{array}{l} + \tfrac{1}{2}e \\ - 1 \end{array}\right\} x^e y \left.\begin{array}{l} + 1 \\ - \tfrac{1}{2}e \end{array}\right\} y^e x \left.\begin{array}{l} + \tfrac{1}{2}e \\ - 1 \end{array}\right\} y^{e+1}$$

$$= (\tfrac{1}{2}e - 1).\,((x^e.\,(y - x) + y^e.\,(y - x))$$

$= (\tfrac{1}{2}e - 1).\,(x^e + y^e).\,(y - x)$ welches alſo mit M dividirt $Px + Qy = (\tfrac{1}{2}e - 1).\,V$ giebt. Die Abmeſſung der Function iſt nähmlich $\tfrac{1}{2}e$ im Dividendus, 1 im Diviſor, alſo $\tfrac{1}{2}e - 1$.

480. Zuſ. Für $n = 0$ (483) iſt $Px + Qx = 0$ wäre im Exempel 484; $e = 2$ ſo wäre von

$$V = \frac{\sqrt{(y^2 + x^2)}}{y - x}$$ die Abmeſſung $= 0$. und

$$Px + Qy = (1 - 1).\,V. = 0.$$

481. Lehrſ. V ſey eine Function von x; y; vermiſcht. Man differentiire V ſo, daß man nur x veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder, ſo daß man nur y veränderlich ſetzt. Zweytens differentiire man V ſo, daß man nur y veränderlich ſetzt; und dieſes Differential wieder, ſo daß man nur x veränderlich ſetzt. Ich behaupte, die zweyte Differentiation werde in beyden Fällen einerley geben.

Exempel. Es ſey $V = xy$; ſo iſt

I) erſtes Differ. ydx; zweytes $dydx$.

II) erſtes Diff. xdy zweytes $dxdy$.

Bew. Man ſetze δx; δy; ſind endliche Gröſſen, um welche ſich x; y; verändern; und es verwandele ſich V in ϱ wenn man $x + \delta x$ ſtatt x ſetzt, aber y nicht ändert, in σ wenn man $y + \delta y$ ſtatt y ſetzt, ohne x zu ändern, und in τ wenn man zugleich $x + \delta x$ ſtatt x und $y + \delta y$ ſtatt y ſetzt. Man kann jeden Theil der Function, ſie mag nun rational oder irrational ſeyn, durch dieſe Subſtitutionen vermittelſt des Binomialſatzes in unendliche Reihen verwandeln, und die Glieder dieſer Reihen, in denen δx; δy; oder beyde zugleich, auf einerley Art vorhanden ſind, zuſammen als eines anſehen. Ferner wird ſich, wenn man V von τ abzieht, in τ alles aufheben, was weder δx, noch δy enthält, weil dieſes eben ſo in V zu finden iſt. Alſo beſteht $\tau - V$ aus folgenden Arten von Theilen: aus ſolchen, die I) nur δx; II) nur δy; III) beyde vermengt enthalten. Es läſſt ſich alſo folgendergeſtalt ausdrucken:

$$\begin{aligned} \tau - V = {} & \alpha . \delta x + \beta . \delta x^2 \ldots \text{(I)} = a \delta x \\ & + \varepsilon . \delta y + \zeta . \delta y^2 \ldots \text{(II)} = b \delta y \\ & \left. \begin{aligned} & + \vartheta . \delta x \delta y + \eta . \delta x \delta y^2 \ldots \\ & + \varkappa . \delta x^2 \delta y + \lambda . \delta x^2 \delta y^2 \ldots \end{aligned} \right\} \text{(III)} = c \delta x \delta y \\ & \quad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

wo α; β; ε; ζ; ϑ; η; $\varkappa$; λ; Functionen von x; y; vermengt ſeyn können; a aber enthält noch

über

über dieſes δx; und b noch δy und c beydes. Nun verwandelt ſich $\tau - V$ für

$\delta y = 0$ in $a \delta x = \varrho - V$

$\delta x = 0$ in $b \delta y = \sigma - V$

Man ſetze ferner $y + \delta y$ ſtatt y in $a \delta x$; ſo verwandelt ſich dadurch ϱ in τ und V in σ. (Es iſt nähmlich offenbahr einerley, ob man gleich auf einmahl $x + \delta x$ und $y + \delta y$ ſtatt x und y ſetzt V in τ zu verwandeln, oder ob man dieſe beyden Arbeiten eine nach der andern vornimmt, und zuerſt V in ϱ, nach dieſem ϱ in τ verwandelt.) Solchergeſtalt verwandelt ſich $a \delta x$ in $\tau - \sigma$ welches als der zweyte Werth von $a \delta x$ angeſehen werden kann, der erſte davon abgezogen giebt $\tau - \sigma - \varrho + V$, für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wieviel ſich V verändert, wenn nur x veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur y veränderlich iſt.

Nun ſetze man $x + \delta x$ ſtatt x in $b \delta y$; ſo verwandelt ſich σ in τ; V in ϱ; $b \delta y$ oder $\sigma - V$ in $\tau - \varrho$; Von dieſem zweyten Werthe der Gröſſe $b \delta y$ den erſten abgezogen, läſſt $\tau - \varrho - \sigma + V$ für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wieviel ſich V verändert, wenn nur y veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur x veränderlich iſt. Es kömmt alſo in beyden Fällen einerley heraus, und da dieſes für jede Verän-

derun-

derungen von x und y richtig iſt, ſo gilt es auch für verſchwindende, oder Differentiale.

482. **Ex.** Wenn $V = ax^2 - bxy + cy^2$ ſo iſt

$$\tau - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ - by \end{matrix}\right\} \delta x + a.(\delta x)^2$$
$$\left.\begin{matrix} + 2cy \\ - bx \end{matrix}\right\} \delta y + c.(\delta y)^2$$
$$- b\delta x.\delta y$$

alſo $\alpha = 2ax - by$; $\beta = a$; $\varepsilon = 2cy - bx$; $\zeta = c$; $\vartheta = -b$; $\varrho - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ - by \end{matrix}\right\} \delta x + a.(\delta x)^2$ deſſen zweyter Zuſtand $(2ax - b.(y + \delta y))\,\delta x + a\,(\delta x)^2$ davon der erſte abgezogen $- b\,\delta y\,\delta x$ läſſt, welches auch herauskömmt, wenn man von $\left.\begin{matrix} 2cy \\ - bx \end{matrix}\right\} \delta y + c.(\delta y)^2$ den zweyten Zuſtand $2cy - b.(x + \delta x)\,\delta y + c.(\delta y)^2$ macht, und davon den erſten abzieht.

483. **Anm.** Dieſes Exempel kann 472 zu erläutern gebraucht werden. Wäre $a = c = \frac{1}{2} b$ oder $\frac{V}{a} = x^2 - 2xy + y^2$ ſo wäre zwar überhaupt $\frac{dx}{2a} = (x - y)\,dx + (y - x)\,dy$ aber für $y = x$ würde das Verſchwindende $\tau - V = a.(dx - dy)^2$.

484. **Willk. Satz.** $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ ſoll bedeuten, daß V ſo differentiiret wird, daß man nur y als veränderlich

derlich anſieht, und alsdenn das Differential mit dy dividirt, wodurch eine endliche Gröſſe herauskömmt. Eben ſo bedeutet $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, man ſoll V differentiiren daß ſich nur x ändert, und das Differential das auf dieſe Art erhalten wird, mit dx dividiren. So iſt in 481. $\left(\frac{dV}{dy}\right) = b$; $\left(\frac{dV}{dy}\right) = a$

485. Zuſ. Wenn $dV = Pdx + Qdy$; ſo iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; und aus 481. $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$

486. Wenn eine Differentialgröſſe vorkömmt, wo x; y; und ihre Differentiale vermiſcht ſind, ſo heiſſe man P; alles, was in dx und Q alles was in dy multiplicirt wird, alsdenn mache man $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Sind beyde nicht gleich, ſo kann die vorgegebene Differentialgröſſe nicht durch Differentiirung einer Function von x; y; entſtanden ſeyn, daß es alſo vergeblich wäre, eine ſolche Function, die ihr Integral ſeyn ſollte, zu ſuchen.

So giebt es keine Function, weder eine algebraiſche noch tranſcendentiſche, deren Differential

tial $yxdx + xxdy$ wäre; weil hier $P = yx$; $Q = xx$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = x$ aber $\frac{dQ}{dx} = 2x$

Von den Differentialen der Functionen, die drey veränderliche Gröſſen enthalten.

487. Lehrſ. V ſey eine Function von drey veränderlichen Gröſſen x; y; z; und $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ ſo iſt I) $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$ II) $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ III) $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$

Bew. Weil keine von den drey veränderlichen Gröſſen, durch die andere beſtimmt wird, ſo kann man welche man will für unveränderlich annehmen. Dieſes ſey erſtlich z; ſo iſt V eine Function von zwo veränderlichen Gröſſen, x; y; und das Differential dieſer Function $Pdx + Qdy$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ (485). Nun ſey y unveränderlich, alſo V eine Function von x; z; ihr Differential $Pdx + Rdz$ und $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Endlich x unveränderlich, V eine Function

tion von y; z; ihr Differential $Qdy + Rdz$ und $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$.

488. Es ſey

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = \pi dx + qdy + udz$$
$$dR = \varrho dx + \varphi dy + rdz$$

ſo iſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \pi$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t = \left(\frac{dR}{dx}\right) = \varrho$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u = \frac{dR}{dy} = \varphi$. alſo

$$dP = pdx + sdy + tdz$$
$$dQ = sdx + qdy + udz$$
$$dR = tdx + udy + rdz$$

489. Wenn man V ſo differentiirt, daß man nur eine der drey Gröſſen, deren Function es iſt, veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder, ſo differentiirt, daß man nur die zweyte dieſer drey Gröſſen veränderlich ſetzt, und dieſes Differential wieder ſo differentiirt, daß man nur die dritte veränderlich ſetzt, ſo kömmt das drittemahl einerley heraus, in was für einer Ordnung man auch die drey Gröſſen nimmt, wie in 481. Den Beweis leichter zu überſehen, dividire man nach jedesmahliger Differentiation durch das Differential der Gröſſe, die man dabey veränderlich geſetzt hat. Dieſe drey Gröſſen haben aber 6 Ordnungen

nungen (Alg. 51.) I) xyz II) yxz III) zxy IIII) xzx V) zyx für I iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s$ und die dritte Arbeit giebt $\left(\frac{ds}{dz}\right)$.

Für II) hat man $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = s$; und drittens wieder $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Für III) iſt $\left(\frac{dV}{dz}\right) = Q$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Aber wenn y unveränderlich, oder V nur eine Function von den veränderlichen Gröſſen x und z iſt, ſo iſt Q auch nur eine Function von ihnen, und $dQ = sdx + udz$; und $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ alſo giebt die dritte Arbeit in III und in II einerley.

Für IIII iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t$ und drittens $\left(\frac{dt}{dy}\right)$. Aber weil $dP = sdy + tdz$ für ein unveränderliches x; ſo iſt $\left(\frac{dt}{dy}\right) = \left(\frac{ds}{z}\right)$.

Für V iſt $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u$; und drittens

tens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Weil aber $dQ = sdx + udz$ für ein unveränderliches y iſt, ſo iſt $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ds}{dz}\right)$

Für VI iſt $\left(\frac{dV}{dz}\right) = R$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$ wie vorhin.

Wenn man nicht nach jeder Differentiation mit dem Differentiale der Gröſſe, die bey ihr veränderlich war, dividirt, ſo darf man nur dieſes Differential bey der folgenden Differentiation als einen unveränderlichen Factor anſehen, und ſo bekömmt man bey jeder dritten Differentiation den Factor $dxdydz$.

490. Ex. Vom $\frac{xxy}{aa - zz}$ giebt die erſte und zweyte Differentiation, nach den erwähnten Ordnungen folgendes, wo $v = aa - zz$.

I) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{2xdxdy}{v}$; II) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xdxdy}{v}$; III) $\frac{2xxyzdz}{vx}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$;

IIII) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$; V) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$ VI) $\frac{2xxyzdz}{vv}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$; die dritte Differentiation giebt alle-

mahl $\frac{4xzdxdydz}{(aa - zz)^2}$

491. Anm. Man wird eben ſo überſehn, daß in der vierten Differentiation einerley herauskömmt, in was für einer Ordnung man vier Gröſſen veränderlich nimmt, von denen V eine Function iſt, wo es 24 Ordnungen giebt; u. ſ. w.

492. Wenn 487. nicht ſtatt findet, ſo iſt $Pdx + Qdy + Rdz$ kein Differential einer Function wie 486. Man ſ. von ſolchen Gleichungen Eul. Inſt. Calc. diff. P. I. c. 9. am Ende.

493. Anm. Den wichtigen Satz (485) haben Clairaut, Fontaine und Euler jeder für ſich erfunden. S. Clairaut; ſur l'integration des equat. differentielles &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1740. p. 419. ed. de Holl. Nach Eulern I. C. D. P. 1. c. 7. hat Karſten dieſe Lehren (481. . . . 492) mit vieler Scharfſinnigkeit und Gründlichkeit in zwoen zu Roſtock gehaltenen Diſputationen abgehandelt. De adfectionibus, quae omnis generis functionum, praecipue ſi tres vel adeo quatuor inuoluant variabiles differentialibus competunt, ſi eorum integrale ſit poſſibile; 1756. Regulae pro differentiandis functionibus duar. variabil. vniuerſalius et euidentius demonſtratae 1759. Nachgehends iſt eben dieſes von ihm in ſeiner Matheſi theoretica elementari et ſublimiori Sect. 26. vorgetragen worden. Bey verſchiedenen ſchweren Integrationen haben dieſe Sätze ihren Gebrauch.

Anwen-

Anwendung auf die Differentialgleichungen.

494. Lehrſ. P iſt eine Function von x und y.

Erſtens. Man integrire $P dx$ ſo daß nur x als veränderlich angeſehn wird, und nehme von dieſem Integrale das Differential ſo daß nur y veränderlich iſt.

Zweytens. Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire dieſes Differential mit dy. Was ſo heraus kömmt, werde mit dx multiplicirt, und dieſes Product ſo integrirt daß ſich nur x ändert. Dieſes Integral multiplicire man mit dx. Ich ſage beyde Verfahren geben einerley.

Beweis. I. $P dx$ ſo integrirt, daß ſich nur x ändert und keine Conſt addirt wird, oder Conſt $= 0$ iſt, heiſſe V.

II. Dieſes V iſt nun eine ſolche Function von x und y daß ihr Differential, nur x veränderlich geſetzt, $P dx$ iſt (201) oder es iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$ (484)

III. Dieſes V differentiire man nun auf die gewöhnliche Art daß ſich ſo wohl x als y ändern. In dieſer Bedeutung ſey $dV = P dx + G dy$, ſo iſt $G dy$ das was beym erſten Verfahren gefunden wird.

IIII. P und G, enthalten jedes x und y; Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire was herauskömmt, durch dy;

Man differentiire G ſo daß ſich nur x ändert, und dividire was herauskömmt mit dx.

Beyde Quotienten ſind gleich, (485) alſo
$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dG}{dx}\right)$$

V. Weil $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ bedeutet: G ſo differentiirt daß ſich nur x ändert, und was ſolchergeſtalt herauskömmt mit dx dividirt, ſo bedeutet $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx; man habe G ſo differentiirt, daß ſich nur x ändert.

Alſo $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx dergeſtalt integriren, daß nur x veränderlich iſt, und keine andre Conſt als o, beyfügen, heiſſt G wiederherſtellen.

VI. Weil $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bedeutet: P ſo differentiirt daß ſich nur y ändert und dann mit dy dividirt, ſo enthält der Ausdruck $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ kein dy ſondern nur x und y.

Man multiplicire $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ mit dx, und integrire das Product dergeſtalt, daß nur x als ver-

änder-

änderlich angeſehn wird, füge auch keine andre Conſt. als o bey; So macht man mit $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eben das was in (V) mit $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ gemacht ward.

VII. Aber $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ (IV) Wenn man bey ein paar gleichen Dingen, mit einem eben das macht was man mit dem andern macht, ſo giebt das eine eben das was das andre giebt.

Alſo: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ nach (VI) behandelt giebt G; (V) und: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ auf erwähnte Art behandelt, und dann mit dy multiplicirt giebt G. dy.

VIII. Dieſe Behandlung und Multiplication iſt das was Zweytens vorſchreibt;

Und G. dy iſt das was Erſtens fodert (III)

Alſo geben die Verfahren: Erſteris und Zweytens einerley.

IX. Exempel. $P = a.y + x^2 + x.y$ alſo

$P.dx = a.y.dx + x^2.dx + y.x.dx$

$V = a.y.x + \frac{1}{3}.x^3 + \frac{1}{2}.y.x^2$ (I)

$dV = (a.y + x^2 + x.y).dx + (a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$

$= P.dx + G.dy$ (III)

So kömmt: Erſtens $(a.x + \frac{1}{2}.x^2).dy$

Ferner $\left(\frac{dP}{dy}\right) = a + x = \left(\frac{dG}{dx}\right)$

Nun werde Zweytens $a + x$ als $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ betrachtet, mit dx multiplicirt und ſo integrirt daß ſich nur x ändert, ſo kömmt $a.x + \frac{1}{2}x^2$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$.

Aber $a + x$ als $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ betrachtet mit dx multiplicirt und ſo integrirt daß ſich nur x ändert giebt auch $a.x + \frac{1}{2}.x^2 = G$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$

So: Erſtens, und Zweytens, einerley.

495. Willk. Satz. P ſey eine Function von x und y zugleich, wenn man Pdx ſo integrirt daß man y als unveränderlich, und nur x als veränderlich anſieht, ſo bezeichne ich dieſes folgendergeſtalt $\int(x)\,Pdx$ ſo iſt $\int(x)\,yx^3\,dx = \frac{1}{4}yx^4$.

496. Lehrſ. Z ſey eine Function von x und y. Ihr Differential, wie gewöhnlich beyde veränderlich geſetzt, $= Pdx + Qdy$.

Nun ſetze man Pdx ſo integrirt daß ſich nur x ändert, gebe V; dieſes V ſo differentiirt daß ſich beyde ändern, gebe $Pdx + Gdy$. So iſt $dZ = Pdx + Gdy + Hdy$ dergeſtalt $G + H = Q$. Ich ſage dieſes H werde kein x enthalten ſondern nur eine Function von y ſeyn.

Beweis.

Beweis. Aus (485) iſt $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und auch $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$; Folglich $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ Weil nun $Q = G + H$ ſo iſt $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right) + \left(\frac{dH}{dx}\right)$. Soll nun dieſes $= \left(\frac{dG}{dx}\right)$ ſeyn, ſo muß $\left(\frac{dH}{dx}\right) = 0$ ſeyn. Das iſt: H ſo differentiirt, daß nur x veränderlich geſezt wird, muß ein Differential geben, das mit dx dividirt $= 0$ iſt. Dieſes heiſſt ohnſtreitig ſoviel als H muß kein x enthalten. Eine Gröſſe die x enthält, ſo differentiirt daß man ihr x veränderlich ſezt, giebt ein Product aus einer endlichen Gröſſe in dx, und dieſes Product mit dx dividirt iſt alſo nicht $= 0$ wenigſtens nicht für jeden Werth. Allenfalls nur für gewiſſe beſtimmte Werthe dieſer Gröſſe, wie bey den Gröſſten und Kleinſten (155)

Ex. $Z = y^3 + xy^2 + x^3$ alſo $P = y^2 + 3x^2$; $Q = 3y^2 + 3xy$; $V = y^2x + x^3$; $dV = (y^2 + 3x^2)\,dx + 2xy\,dy$ alſo $G = 2xy$ folglich $Q - G$ oder $H = 3y^2$ eine Function nur von y.

497. Aufg. Das Integral Z; von $Pdx + Qdy$ zu finden, wenn P und Q ſich nach 486. verhalten.

Aufl. Man mache ſ (x) $Pdx = V$ (495) iſt nun $G = Q$; ſo iſt $V = Z +$ Conſt weil alsdenn $dV = dZ$; Iſt aber dieſes nicht, ſondern $Q = G + H$ alſo $dZ = dV + Hdy$ ſo wird $Q - G = H$ eine Function von y allein ſeyn, (496) daß alſo $Z = V + ſHdy$ wo das letzte Integral, weil dabey nur eine veränderliche Gröſſe vorkömmt, allemahl durch die Quadraturen gegeben iſt.

Ex. Wenn $3x^2y^2dx + 2yx^3dy = dZ$
$+ 4ay^3$
ſo iſt $P = 3x^3y^2$; $Q = 2yx^3 + 4ay^3$ alſo $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 6x^2y = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und $V = x^3y^2$ und $dV = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$ alſo $G = 2x^3y$; $Q - G$ oder $H = 4ay^3$ und $Z = x^3y^2 + ay^4$.

Von den Differentialgleichungen.

498. Aufg. Die Integralgleichung der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ zu finden, wenn ſich P; Q; nach 486 verhalten.

Aufl. I. Nach 497. findet man Z, welches hier einer beſtändigen Gröſſe C gleich ſeyn muß, (22) alſo iſt die Integralgleichung $V + ſHdy = $ Conſt

Im

Im Exempel 497; wenn $dZ = 0$; wäre $x^3 y^2 + ay^4 = C$.

II. Das Merkmahl welches anzeigt die Differentialgleichung laſſe ſich integriren iſt auf Differentiale vom erſten Grade eingeſchränkt. Ein allgemeiners, wenn höhere Differentiale vorkommen, hat Euler aus der Variationsrechnung hergeleitet, §. 92; der Abhandlung: de calculo variationum die ſich als Appendix, bey: Inſtitutionum calculi integralis Volumen III. befindet. Dieſer Band iſt zu St. Petersburg 1770 erſchienen, auch daſelbſt 1793 von neuem herausgegeben worden, da ihm 1794, volumen quartum beygefügt iſt, continens ſupplementa partim inedita, partim in operibus Ac. Imp. impreſſa.

Von And. Ioh. Lexell befindet ſich ein Aufſatz: de criteriis integrabilitatis formular. differential. in Noui Commentarii Ac. Sc. Imp. Petrop. T. XV. pro anno 1770; p. 127. Lexell leitet das euleriſche Kennzeichen aus den gewöhnlichen Lehren der Differentialrechnung her, und giebt viel andre wichtige Folgerungen Integrabilität betreffend.

499. Zuſ. Eine Differentialgleichung wo ſich P, Q, nach 486 verhalten, läſſt ſich wenn man jeden ihrer Theile mit einer veränderlichen Gröſſe multiplicirt, oder dividirt, ſo ändern, daß dieſes Verhalten nicht mehr ſtatt findet.

Die Möglichkeit hievon iſt zulänglich durch ein einziges Exempel dargethan. Bey

$n x y^{n-1} dy + y^n dx = 0$ findet dieſes Verhalten ſtatt, und die Integralgleichung iſt $x y^n = Const$; Wenn man aber die Differentialgleichung mit y^{n-1} dividirt ſo findet dieſes Verhalten nicht mehr bey $n x dy + y dx = 0$ ſtatt.

Die Gleichung $P dx + Q dy = 0$ unterſcheidet ſich nähmlich darinnen von dem Differential $P dx + Q dy = dZ$, daß man bey ihr alle Glieder mit welcher veränderlichen Gröſſe man will multipliciren oder dividiren darf, welches beym Differentiale nicht angeht. Man bedient ſich zuweilen ſolcher Multiplicationen, aus einer Differentialgleichung ihre Integralgleichung herzuleiten.

500. Lehrſ. Wenn bey einer Differentialgleichung, nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ iſt, ſo giebt es allemahl eine veränderliche Gröſſe L.; mit der man P und Q multipliciren kann ſo daß ſich die Gleichung in $L. P. dx + L. Q. dx = 0$ verwandelt, und $\left(\frac{d L. P}{dy}\right) = \left(\frac{d L. Q}{dx}\right)$

Beweis. Ich ſetze zum voraus, daß jede Differentialgleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen eine Integralgleichung hat, aus deren Differentiation ſie entſtanden ſeyn kann. Dieſes gründet ſich darauf, weil eigentlich Differentialgleichungen nichts anders anzeigen, als das Verhalten zwiſchen verſchwindenden Veränderungen, verän-

veränderlicher Gröſſen (13) Es giebt alſo keine ſolche Differentialgleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen ohne eine Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt.

Ich nehme das nur von zwo veränderlichen Gleichungen an. $P.dx + Q.dy + R.dz = 0$, beſtimmt nicht allemahl ein mögliches Verhalten zwiſchen x; y; z; Euler Inſtit. Calc. integr. Vol. III. (1770) §. 5.

Nun kann man eine Differentialgleichung zwiſchen ein Paar veränderlichen Gröſſen haben, ohne daß man weiß wie die Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt beſchaffen iſt; von dem Falle iſt hier die Rede.

Dieſe unbekannte Gleichung nun zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt, muß ſo beſchaffen ſeyn, daß eine gewiſſe Conſt = einer Function von x und y iſt.

Wenn man dieſe unbekannte Gleichung differentiirte, würde die Conſt aus dem Differentiale weggehen, und $0 = Mdx + Ndy$ heraus kommen, wo ich weder M noch N weiß.

Daraus aber folgte $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$ Und aus $Pdx + Qdy = 0$ folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ Beydes muß einerley ſeyn, wenn $Mdx + Ndy = 0$

die

die Differentialgleichung ſeyn ſoll, die aus der Integralgleichung von $Pdx + Qdy = 0$ folgt,

Alſo iſt $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$

Das heiſſt nicht etwa $P = M$; $Q = N$; denn man weiß daß ein paar Brüche gleich ſeyn können ohne daß ihre Zähler einerley, und ihre Nenner einerley ſind, wenn nur des einen Zähler und Nenner, Vielfache von des andern Zähler und Nenner ſind.

Alſo ſey $M = L.P$; $N = L.Q$;

Weil aber $Mdx + Ndy$ aus der wirklichen Differentiation einer Function von x und y entſtanden ſeyn ſoll, ſo iſt $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$ (486)

Folglich $\left(\frac{dL.P}{dy}\right) = \left(\frac{dL.Q}{dx}\right)$

501. Kann man den Factor L finden, ſo läſſt ſich die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ unter der Geſtalt $L.Pdx + L.Qdy = 0$, nach (498) integriren.

Aber dieſen Factor zu finden, iſt ſchwer und man hat dazu bisher noch keine allgemeine Methode. Clairaut in der (493) angef. Schrift lehrt 427. S. ein Verfahren das in manchen Fällen zutrifft; erweitert auch ſolches auf Gleichungen die drey oder mehr veränderliche Gröſſen enthalten.

502. Umſtändlich handelt hievon Eul. Inſt. Calc. Integr. Vol. I. §. 459. ſequ., wo er auch §. 458 anzeigt wie man ſich zu verhalten habe, wenn man bey den Vorſchriften die ich (498) gegeben habe, ſ (x) Pdx nicht wirklich darſtellen könnte.

Bisher hat dieſer Kunſtgriff einen ſolchen Factor zu finden, kaum bey andern Gleichungen Dienſte geleiſtet, als bey denen wo man (405) die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern kann. Eul. a. a. O. 447. §. Indeſſen iſt das Verfahren mit dieſem Factor, der Natur der Gleichungen gemäſſer, und hat andere Vorzüge, deßwegen es Hr. Euler ausführlich erklärt. Hier verſtattet mir der Raum nicht mehr davon beyzubringen.

503. Sur l'integration des équations à differences partielles du premier ordre, par M. de la Grange; Nouv. Mém. de l'Ac. R. des Sc. et B. L. Année 1772; Berlin 1774; p. 352. Wenn u einer Function von mehr veränderlichen Gröſſen, x; y; z, iſt, ſo heiſſen differences partielles von u, qui reſultent de la differentiation de u en y faiſant varier chacune des quantités x, y, z; . . . à part, ainſi ſupoſant que la valeur complette de du, ſoit repréſentée par p. dx + q. dy + r. dz + . . . les differens termes p. dx; q. dy; r. dz. — de cette differentielle ſeront les differences partielles du premier ordre de u.

Was

En y heiſſt: daſelbſt; nicht: in y. Uebrigens zeigt dieſe Stelle woher die Benennung genommen iſt; p. dx . . . ſind Theile des völligen Differentials und die Differentiale ſind von der erſten Ordnung.

Man bezeichnet fährt l. Gr. fort, die Coefficienten p, q, r, bey den Differentialen dx, dy, dz, durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$; $\frac{du}{dz}$; So wird der vollſtändige Werth von du ſo vorgeſtellt: $\frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} \cdot dz$. Hat man alſo eine Gleichung zwiſchen u, x, y, z; und $\frac{du}{dx}$; $\frac{du}{dy}$; $\frac{du}{dz}$ ſo iſt das eine équation à differences partielles du premier ordre von der Art ſolche Gleichungen zu integriren ſagt l. Gr. will ich neue Grundlehren geben.

Man ſieht daß ich im vorhergehenden Vortrage die Begriffe gegeben habe welche das Kunſtwort differences partielles bezeichnet, daß du ſo ſoll differentiirt werden, daß ſich nur x ändert, und was ſo herauskömmt, mit dx dividirt, daran hätte ich freylich durch das Zeichen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ erinnert.

Auch

Auch beſchäfftigt l. Gr. ſich mit dem Factor von dem ich (501) rede.

504. I. Die Integrale einer Differentialgleichung, enthält allemahl eine unveränderliche Gröſſe, die beym Differentiiren der Gleichung zwiſchen den endlichen veränderlichen Gröſſen aus der Rechnung ging, alſo in der Differentialgleichung nicht zu finden iſt.

Zuweilen aber findet ſich eine Gleichung zwiſchen den endlichen veränderlichen Gröſſen, welche differentiirt die Differentialgleichung giebt, ſelbſt aber die erwähnte unveränderliche Gröſſe nicht enthält. Eine ſolche Gleichung heiſſt Euler: Integrale particulare; Inſt. calc. int. Vol. I. §. 540. Das 4 Capitel welches da anfängt, handelt: de integratione particulari aequationum differentialium.

Die Benennung läſſt ſich ſo rechtfertigen: Wenn man aus der Differentialgleichung durch gewöhnliches Verfahren die Integrale findet, ſo kann man der unveränderlichen Gröſſe welche beygefügt wird, andre und andre Werthe geben, und ſo andre und andre einzelne Integrale finden.

II. Exempel $a^2 . dy + y^2 . dx = a^2 . dx + x . y . dy$ Hie ſieht man leicht daß $y = x$ geſetzt der Differentialgleichung genug thut, wo ſelbſt a aus der Rechnung geht alſo eine Integrale herauskömmt, die gewiß nicht die vollſtändige ſeyn kann.

III) Man ſetze in dieſer Differentialgleichung $y = x + z$ ſo kömmt

$$a^2.\, dz = - x.\, z.\, dx - z^2.\, dx$$

Dieſes vergleiche man mit (412) ſo iſt

dorten	y	x	a	p	b	n	q	$p.\, dx : a$	z
hie	z	x	a^2	$-- x$	$-- 1$	2	1	$-- x^2 : 2.a^2$	$e^{-- x^2 : 2.a^2}$

alſo die Integralgleichung

$$c - \frac{a^2.\, e^{-- x^2 : 2.a^2}}{z} = - \int e^{-- x^2 : 2a^2}.\, dx$$

Setzt man $c = 0$ und $z = \frac{a^2}{v}$ ſo kömmt $v =$ $e^{x^2 : 2.a^2}.\, \int e^{-- x^2 : 2a^2}.\, dx$

So druckt Euler die Integralgleichung aus, a. a. O. §. 544.

IV. In dieſer allgemeinen Integrale ſagt E. ſey die beſondre (II) enthalten, ſi conſtans integratione $\int e^{-- x^2 : 2a^2}.\, dx$ inuecta ſumatur infinita, fit v infinita et $z = 0$ vnde $y = x$.

Ich verſtehe ſeinen Ausdruck ſo; Er nimmt den erwähnten ſummatoriſchen Theil dergeſtalt daß er eine unendliche unveränderliche Gröſſe beyfügt.

Da er c nicht braucht wie ich gethan habe, ſteht ihm allerdings frey anderswo eine unveränderliche Gröſſe beyzufügen.

V. Ich geſtehe freylich daß eine unendliche unveränderliche Gröſſe mir kein recht deutlicher Begriff ſcheint. So ſchloß ich (211) ein hyperboliſcher

boliſcher Raum könne nicht mit $x = 0$ anfangen, weil Conſt eine unendliche Gröſſe ſeyn müſſte.

Da keine Gröſſe unendlich iſt nur wird (4) was wäre eine unendliche beſtändige?

Wenn man 0 als Conſt beyfügt, ſo heiſſt das keine beſtändige Gröſſe beyfügen, das iſt beſtimmt und deutlich Nichts beyfügen. Aber was Unendliches beyfügen iſt nichts beſtimmtes weil des Unendlichen Hälfte oder Doppeltes auch Unendlich heiſſen.

VI. Euler erinnert, nicht allemahl führe ein beſondres Integral auf das allgemeine ſo leicht als (II) auf (III) z. E. in $a^3 . dy + y^3 . dx = a^3 . dx + x^3 . dx$ thue $y = x$ genug. Wenn man nun $y = x + z$ ſetze, komme $a^3 . dz + 3 . x^2 . z . dx + 3 . x . z^2 . dx + z^3 . dx = 0$; wovon die Auflöſung nicht leichter ſcheine, als der vorigen Gleichung ihre.

VII. Manchmahl falle es ſchwerer das integrale particulare zu entdecken, immer ſey die Erforſchung davon nützlich. Euler giebt dazu Anleitung, auch einen brauchbaren Lehrſatz §. 572. Wenn die Differentialgleichung $P . dx + Q . dy = 0$ durch Multiplication mit dem Factor M integrabel gemacht wird (500) ſo wird $M = 0$ ein Particularintegral ſeyn, auſer wenn für dieſe Vorausſetzung, P oder Q unendlich werden. Auch §. 574; wenn $P . dx + Q . dy = 0$ durch M

dividirt, integrabel wird, ſo iſt M=o ein Particularintegral, auſer wenn dieſe Vorausſetzung P oder Q auf o bringen.

VIII. Sur les integrales particulières des equations differentielles par Mr. de la Grange. Mém. de l'Ac. des Sc. et des B. L. de Pruſſe année 1774; p. 192. Er glaubt da eine neue und vollſtändige Theorie davon zu geben, nachdem ſich auſer Eulern, d'Alembert, Condorcet, de la Place damit beſchäfftigt haben. In eben den Mém. 1779; p. 121; findet ſich de la Grange Abhandlung ſur differentes queſtions l'analyſe, relatives à la théorie des integrales particulières.

In Mém. de l'Ac. des Sc. de Turin Vol. V. 1790, 91; iſt unter den Mémoires préſentés der erſte: Sur les équations differentiélles du prémier degré par M. Jean Trembley, gründet ſich auf die beyden euleriſchen Lehrſätze (VII) und ſucht beſonders zu zeigen wie integralia partialia dienen den Multiplicator zu finden.

Tremblens Abh. ſur les intégrales particulières des équations differentielles findet ſich eben daſ. p. 53. Nimmt für das Particularintegral eine Reihe an, und ſucht derſelben Geſtalt und Coefficienten zu beſtimmen.

Fernere

Fernere Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die krummen Linien.

Quadraturen und Rectificationen, wenn die Ordinaten aus einem Puncte gehen.

Ergänzung zu 205.

505. Aufg. Wenn wie in (104) 22. F. eine Gleichung zwiſchen AP = x; CM = y; gegeben iſt, das Differential der Fläche der krummen Linie, oder den Ausſchnitt MCN unter der Vorausſetzung, daß N; M; ſich unendlich nähern, zu finden.

Aufl. I. Dieſer Ausſchnitt fällt zwiſchen zweene Ausſchnitte von Kreiſen, die CM; CN; zu Halbmeſſern hätten, und beyde dem Winkel MCN zugehörten; das iſt zwiſchen $\frac{1}{2}$ CM. MS und $\frac{1}{2}$. CN. $\frac{CN}{CM}$. MS; zwiſchen dieſen beyden Ausſchnitten iſt der Unterſchied $= \frac{CM^2 - CN^2}{2.\ CM}$. MS

 = CNS.

$= \frac{(NS. (2CM + NS)}{2CM}$. MS welcher ſich zu dem kleinſten Ausſchnitte wie NS. (2CM + NS): CM² verhält, und alſo in Vergleichung mit demſelben verſchwindet, wenn bey unendlicher Näherung der Puncte M; N; NS in Vergleichung mit 2CM verſchwindet. Alſo iſt das geſuchte Differential $= \frac{1}{2}$ CM. MS $= \frac{yy dx}{2r}$ (204) welches ſo integrirt, daß es für $x = 0$ verſchwindet, die Fläche der krummen Linie giebt die von des Winkels ACM Schenkeln, und dem Bogen der krummen Linie der zwiſchen dieſe Schenkel fällt, begränzt wird, was alſo hier zwiſchen den Bogen CM 22 F. und die gerade Linie CM fällt.

II. Dieſes hat keine Schwürigkeit, wenn man bey dem erſten Umlaufe einer ſolchen krummen Linie um den Mittelpunct C ſtehen bleibt. Aber wenn ſie ſich zu wiederhohlten mahlen um C windet, wie die archimediſche Spirallinie (Alg. 194.) muß man die Sache folgendergeſtalt betrachten.

III. Von einer ſolchen Linie ſey 24 F. CMBA der erſte Umlauf, A2M2B2A der zweyte; 2A 3M3B3A der dritte; 3A4M ein Bogen von dem vierten; die Puncte M liegen alle in einer Ordinate, und die Puncte m in einer andern ihr unendlich nahen. Wenn man ſich die Erzeugung der

der krummen Linie wie Alg. 592 vorſtellt, ſo heiſſe u der Bogen mit dem Halbmeſſer r, der des Winkels ACM Maaß iſt. Der Winkel AC2M iſt = ACM + 4R (Alg. 593.) alſo ſein Maaß der Bogen u + p; und ſo der Winkel AC3M = ACM + 2. 4R und ſein Maaß der Bogen u + 2p; u. ſ. w. Alſo wird für dieſe Winkel, x nach und nach = u; = u + p; = u + 2p u. ſ. w. und weil die Ordinate eine Function von x iſt, ſo iſt CM eine Function von u; und C2M eben die Function von u + p; und C3M eben die von u + 2p u. ſ. w.

IIII. Ferner heiſſe die veränderliche erſte Fläche, was von der geraden Linie CM; und der krummen CM begränzt, und nach I. gefunden wird. Wenn man in dem Integrale, das dieſe veränderliche erſte Fläche ausdruckt, x = p ſetzt, ſo bekömmt man die ganze erſte Fläche CMBAC; was nähmlich von der geraden Linie CA, und der krummen CMBA begränzt wird. An dieſer Gränze CA, fängt ſich die zweyte veränderliche Fläche ACM2M an, ſie iſt zwiſchen den geraden Linien CA; M2M; und den krummen CM; A2M; enthalten; Sie verändert ſich, wenn ſich A2M in A2m verändert, und ihr Differential iſt M2M2mm; was zwiſchen den geraden Linien M2M; m2m; und den Elementen der krummen, 2M2m; Mm enthalten iſt. Wenn das Integral dieſes Differentials eine Function von x iſt, und wenn es blos dieſe zweyte

veränderliche Fläche ausdrucken ſoll, ſo muß es eine ſolche Function von x ſeyn, die für $x = p$ verſchwindet, weil ſich dieſe zweyte veränderliche Fläche da anfängt, wo $x = p$; Hat man ſie nun durch ein ſolches Integral ausgedruckt, ſo ſetzt man darinnen $x = 2p$; die ganze zweyte Fläche CA2M 2B2A zu bekommen, die von den geraden Linien CA; A2A, und der krummen CMBA2M2B2A begränzt wird, und ſich um die ganze erſte Fläche herumwindet. An ihrer Gränze A2A fängt ſich die dritte veränderliche Fläche 2AA2M3M an; u. ſ. w.

V. Dieſes allgemein zu machen, ſey 2A3M 3B3A die $(n-1)$te Umwindung der Linie um C; ſo daß jede ihr zugehörige Ordinate C3M; eine Function von $x = u + (n-2)p$ iſt. Aus III nähmlich iſt für jede Umwindung, die Ordinate einer Function von x + einem Vielfachen von p durch eine Zahl, die eins weniger iſt, als die Zahl der Umwindung. So iſt alſo 3A4M, ein Bogen der nten Umwindung, deſſen Ordinate C4M eine Function von $x = u + (n-1)p$; und 2A3A4M3M die nte veränderliche Fläche, deren Differential 3M4M4m3m ſo muß integrirt werden, daß es für $x = (n-1)p$ verſchwindet.

VI. Es bedeute φx die Function von x, durch welche die Ordinate ausgedruckt wird. Weil nun $dx = du$; ſo iſt $4MC4m =$

(φ (u

$\frac{(\varphi (u + (n-1) p))^2 . du}{2r}$ und 3 MC 3 m = $\frac{(\varphi (u + (n-2) p))^2 . du}{2r}$ (I) alſo das Differential 3 M 4 M 4 m 3 m = $\frac{(\varphi (u + (n-1) p)^2)^2 - (\varphi (u + (n-2) p))^2}{2r}$. du das iſt: man muß in dem Ausdruck, der y durch x giebt, x erſtlich = u + (n — 1) p; denn = u + (n — 2) p ſetzen; beyde Werthe quadriren, und das letzte Quadrat vom erſten abziehen. Der Unterſchied mit $\frac{du}{2r}$ multiplicirt, giebt dieſes Differential, welches man ſo integriren muß, daß es für x = (n — 1) p verſchwindet. Weil nun in der veränderlichen Gröſſe, welche durch dieſes Integral ausgedruckt wird, x = u + (n — 1) p iſt, ſo folgt, daß u = 0 für x = (n — 1) p iſt, und daß man alſo das Integral ſo nehmen muß, daß es für u = 0 verſchwindet. Nachdem man es ſo genommen hat, ſetze man darinnen u = p ſo hat man die ganze nte Fläche.

VI. Die erſte Fläche aber muß man aus I finden, und kann V dabey nicht brauchen. Denn wollte man n = 1 ſetzen, ſo wäre zwar EM = φ u = φ (u + (n — 1) p) aber es gäbe keine Ordinate, die φ (u + (n — 2) p) das iſt hier φ (u — p) wäre.

Exempel.

506. Bey der archimediſchen Spirallinie (Alg. 580.) iſt $y = \frac{rx}{p}$. Folglich das Differential der erſten Fläche $= \frac{rrxxdx}{2rpp}$ welches die erſte veränderliche Fläche $= \frac{rx^3}{6pp}$, und alſo für $x = p$; die ganze erſte Fläche $= \frac{rp}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{rp}{2} = \frac{1}{3}$ des Kreiſes, in dem die Spirallinie beſchrieben iſt, giebt.

Ferner iſt $\varphi x = \frac{rx}{p}$ alſo das Differential (505; V) $= \frac{rr}{pp} \cdot ((u + (n-1)\,p)^2 - (u + (n-2)\,p)^2). \frac{du}{2r} = (2\,pudu + (2n-3)\,p^2 . du). \frac{r}{2pp}$; davon das Integral $= (u + (2n-3).p). \frac{ur}{2p}$; welches ſich für $u = p$ in $(n-1).\,rp$ verwandelt.

Die ganze zweyte Fläche iſt alſo $= rp =$ dem Sechsfachen der ganzen erſten, und jede ganze folgen-

folgende Fläche, iſt ein Vielfaches der zweyten durch eine Zahl, die um eins weniger iſt als die Zahl der Fläche. (Archimed von den Spirallinien 27. Satz.)

507. Bey unzähligen Spirallinien (Alg. 596.) iſt $y = \left(\frac{r}{p}\right)^{n:m} . x$. Dieſes giebt die erſte Fläche $= \frac{x^3}{6}\sqrt[m]{\left(r^{2n-m} : p^{2n}\right)}$, und die Verhältniß der erſten ganzen Fläche zur Fläche des Kreiſes wie $1 : 3\sqrt[m]{\left(\frac{r}{p}\right)^{2m-2n}}$

Für $m = 2$; $n = 1$ wird ſie $= 1 : \frac{3r}{p}$ Hier iſt $\varphi x = \frac{r}{p} x^{n:m} x$ woraus man nach 505; V; die folgenden Flächen finden könnte, nur daß man die Verwirrung zu vermeiden, ſtatt des einen n einen andern Buchſtaben brauchen müſſte.

508. Wenn die Abſciſſe x einer paraboliſchen Linie, der die Ordinate $(a^{\delta} . x^{\varepsilon})^{1:(\delta+\varepsilon)}$ zugehört, in einen Kreisbogen gekrümmt wird, ſo entſtehen unzählige paraboliſche Spirallinien, davon die (107) für $\delta = \varepsilon = 1$ ein Exempel iſt. Alſo iſt für ſie $y = r - \kappa x^{e}$ wo $\kappa = \sqrt[\delta+\varepsilon]{a^{\delta}}$ und $e = \delta : (\delta + \varepsilon)$.

Dieſes giebt die erſte Fläche $= \frac{rx}{2} - \frac{\varkappa x^{e+1}}{e+1} + \frac{\varkappa\varkappa x^{2e+1}}{2.(2e+1).r}$.

Für (107) iſt $e = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{a}$; Es ſey $a = rr : p$ ſo iſt die erſte Fläche $= rx.\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{x}{4p}\right) = \frac{1}{12}\,rp$ für $x = p$; Dieſe Fläche iſt alſo der ſechſte Theil der Kreisfläche.

509. Aufg. In (505) das Differential MN des Bogens der krummen Linie zu finden.

Aufl. Die Sehne MN nähert ſich unendlich ihrem Bogen; (68) das Quadrat der Sehne aber beſteht aus den Quadraten eines Perpendikels von M auf CN; und des Stückes der Linie CN, das zwiſchen dieſem Perpendikel und dem Puncte N liegt. Wenn ſich nun N; M; einander unendlich nähern, ſo nähert ſich das Perpendikel unendlich dem Kreisbogen MS (96) $= \frac{ydx}{r}$ und das Stück auf der Linie CN; dem Unterſchiede $CN - CM = dy$; alſo der Bogen MN dem Werthe $ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{yydx^2}{rr}\right)}$ welches inte-

grirt,

grirt, daß das Integral = o für x = o wird, die Länge des Bogens der krummen Linie giebt, der zwiſchen die Schenkel des Winkels ACM fällt.

Exempel.

Die logarithmiſche Spirallinie.

510. I. Wenn der Winkel CMT 22 F. den die Tangente einer krummen Linie mit ihrer Ordinate macht, durch die ganze krumme Linie unveränderlich iſt, ſo ſetze man ſeine Tangente (104) $\frac{y\,dx}{r\,dy} = m$ dieſes giebt $\frac{dx}{mr} = \frac{dy}{y}$ daß alſo die Kreisbogen die man hier für Abſciſſen annimmt, Logarithmen der Ordinaten ſind, daher dieſe Linie ihren Nahmen erhalten hat. Aus 105 kömmt für ſie $CT = my$.

II. Weil $\frac{x}{mr} = ly + \text{Conſt}$ und man r gewiß ſo nehmen kann, daß der Kreis die krumme Linie irgendwo ſchneidet, und folglich ſein Halbmeſſer eine Ordinate von ihr wird; ſo ſey CA dieſer Halbmeſſer in der Lage, da er zugleich eine Ordinate iſt; folglich iſt $x = o$ für $y = r$; und $o = lr + \text{Conſt}$ alſo $\frac{x}{mr} = l\,(y:r)$.

III. Mit dem bejahten x wächſt auch $l\,(y:r)$ und folglich y ohne Ende. Für verneinte x wird

y : r ein Bruch, der immer abnimmt, je gröſſer die verneinten x werden, aber nur verſchwindet, indem das verneinte x unendlich wird. (244) Sind nähmlich die bejahten x, Bogen, die von A nach der rechten Hand zu gerechnet werden, wie AP, ſo muß man die verneinten nach der linken Hand zu rechnen wie AQ; beyde aber können ohne Ende fort wachſen, und den Umkreis zu wiederhohlten mahlen enthalten. Weil nun y nicht eher verſchwindet, als wenn das verneinte x unendlich wird, ſo muß ſich die Ordinate, aus der Lage CA nach der linken Hand drehen, und auf dieſe Art unzählich vielmahl um C drehen, ehe M in C rückt, das iſt, die krumme Linie kömmt nach unzählich vielen Wendungen, die ſie nach der linken Hand von CA zu anfängt, und immer ſo um C fortſetzt, erſtlich in C.

IIII. Aus (509) wird $ds = dy.\sqrt{(1+mm)}$ folglich $s = y\sqrt{(1+mm)}$ wenn s den Bogen CM der krummen Linie von C an gerechnet bedeuten ſoll, weil alsdenn s und y zugleich verſchwinden müſſen. Dieſer Bogen alſo, der unzählig viele Wendungen um C macht (III) iſt doch nur einer beſtimmten geraden Linie gleich, nähmlich der Tangente MT wie daraus, daß ſie $= \sqrt{(CT^2 + CM^2)}$ vermöge (510. I.) folgt. Jacob Bernoulli hat dieſes entdeckt. Specimen alterum calc differentialis; Act. Er. Lipſ. Iun. 1691. Op. Iac. Bern. n. 42.

V. Das

V. Das Differential der Fläche wird aus 505; $\frac{1}{2}$ mydy alſo die Fläche $\frac{myy}{4} = \frac{1}{2} \triangle CMT$. Die Fläche fängt hier von C an, weil ſie = 0 für y = 0 iſt, und begreift die unzählichen Wendungen um C (II) in ſich.

Zur Conſtruction der Linie.

VI. Aus $\frac{x}{m.r} = \log \frac{y}{r}$ kömmt $\frac{x}{m.r} \cdot \log e = \log \frac{y}{r}$ und $e^{\frac{x}{m.r}} = \frac{y}{r}$. Das giebt y wenn x angenommen iſt.

VII. Nimmt man aber y an, ſo findet ſich aus $\log \frac{y}{r}$ das zugehörige x.

VIII. Da kann man nun fragen was $\frac{x}{m.r}$ für einem Winkel am Mittelpuncte des Kreiſes gehört.

Dieſer Winkel ſey = n Graden, ſo iſt $\pi : \frac{x}{m.r} = 180 : n$; alſo $n = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{x}{m.r}$

IX. Will man briggiſche Logarithmen brauchen n zu berechnen, ſo iſt $\log \frac{180^\circ}{\pi} = -\log 1^\circ = +1{,}7581226$ (Geom. 44 S. 7. Zuſ. IX.)

X. Exem:

X. Exempel. Es ſey $m = 1$; $y = 10.\, r$ ſo iſt (An. Un. 226) $\frac{x}{r} = 2{,}302585 \ldots$

Nun nehme ich

$$\begin{array}{rl} \log \text{brigg } 2{,}3026 = & 0{,}3622185 \\ & 1{,}7581226 \\ \hline \log n = & 2{,}1203411 \end{array}$$

giebt den Winkel $= 131^\circ, 92$
$= 131^\circ\, 55', 20 = 131^\circ\, 55'\, 12''$

XI. Exempel für (VI) $m = 1$ geſetzt.

Man ſetze der Bogen x meſſe einen Winkel von 50 Graden. So iſt

$$\begin{array}{l} \log 1 = 0{,}2418774 - 2 \text{ (Geom. 44. S. 7. Zuſ.)} \\ \log 50 = 1{,}6989700 \\ \hline \log \frac{x}{r} = 0{,}9408474 - 1 \end{array}$$

gehört zu 0,87272; alſo $\frac{y}{r} = e^{0{,}87272} = \sqrt[100000]{e^{87272}}$

XII. Will man briggiſche Logarithmen brauchen, ſo hat man

$$0{,}87272. \log \text{brigg } e = \log \text{brigg } \frac{y}{r}$$

Nun iſt aus 230; 231; 232; log brigg

$$e = \frac{1}{\log \text{nat } 10}$$
$$= 0{,}4342948 \ldots$$

Das

Das alſo müſſte man mit 0,87272 .... multipliciren.

XIII. Die Multiplication verrichte ich mit briggiſchen Logarithmen ſo:

$$\log \text{brigg}\ 0{,}43429 = 0{,}6377798 - 1$$

$$\log \text{brigg}\ \frac{x}{r} = 0{,}9408474 - 1$$

$$\log \text{brigg des} \left(\log \text{brigg}\ \frac{y}{r} \right) = 0{,}5786272 - 1$$

$$\log \text{brigg}\ \frac{y}{r} = 0{,}37899$$

So iſt $\frac{y}{r} = 2{,}3933$

XIV. Unmittelbar wäre $0{,}87272 = \log \text{nat}\ \frac{y}{r}$ Das zeigt an $\frac{y}{r}$ falle zwiſchen 2 und 3. Proportionaltheile gäben etwas genaueres.

XV. Man ſetze $y = 0{,}1 \cdot r$ So iſt (VI) $x = -\log \text{nat}\ 10$ oder $-x = \log \text{nat}\ 10$

$-x = 2{,}30258509299 \ldots$ Nun für $r = 1$

$131^\circ = 2{,}28638132011$

$0{,}01620377288$

$55' = 0{,}01599885147$

$0{,}00020492141$

$42'' = 0{,}00020362174$

$0{,}00000129967$

Alſo $x = -131^\circ\, 55'\, 42''$

So

So gehört zu y = 0, 1. r; ein Bogen rückwärts genommen = 131° 56′ 37″

Berechnung des Bogens der zu y = 0,000001. r gehört.

XVI. log nat 1000000 = 2. log nat 1000
log nat 1000 = 6,9077755278982
log nat 1000000 = 13.8155510557964

Dieſer Logarithme verneint iſt = $\frac{x}{r}$. Alſo

$$-\frac{x}{r} = 13{,}8155510357964$$

2. 360° =	12,566370614358
	1,2491804414 38
71° =	1,2391837689 15
	0,0099966725 23
34′ =	0,0098901990 94
	0,0001064734 29
22″ =	0,0001066590 09
	− 0,0000001855 80

So gehört zu dieſem y, ein Bogen rückwärts 2 ganze Umkreiſe, und dazu 71° 34′ faſt 22″

XVII. Die Ordinate aus dem Bogen nach (VI) zu berechnen, dient in Vega logarithmiſch-trigonometriſchen Tafeln (Leipzig 1797; 2. Quartbände) im II. B. die III. Tafel, 141 u. f. S. Potenzen der Grundzahl h = 2,718. . . des natürlichen logarithmiſchen Syſtems für alle Hundertheile von 0,01, bis 10,00 nebſt den briggiſchen

ſchen Logarithmen eben dieſer Potenzen; oder: Umgekehrte Tafel der natürlichen Logarithmen, welche für alle Hunderttheile der natürlichen Logarithmen, von 0,01 bis 10,00 die zugehörigen Zahlen nebſt ihren gemeinen Logarithmen enthält. Hr. Vega nennt b, was ich e nenne; Seine Tafel giebt in meiner Bezeichnung, e^n für n = jeder Menge von Hunderttheilen von 0,01 bis 10,00; auch den briggiſchen Logarithmen dieſer Potenz von e.

XVIII. Wenn ſich ein Punct der Spirale in CA befindet, ſo iſt $\frac{x}{r}$ ein vielfaches von 2. π, durch eine bejahte oder verneinte Zahl, nachdem der Punct auſerhalb oder innerhalb des Kreiſes (II) liegt.

XIX. Man frage wo eine Spirale innerhalb des Kreiſes zum erſten mahle in CA kömmt, wenn für ſie der Winkel CMT = 60 Grad.

So iſt in VI; bey e der Exponent = − cot 60°. 2. π.

Es ſind aber die briggiſchen Logarithmen von

$$\begin{aligned} \cot 60^\circ &= 9{,}7614394 - 10 \\ 2.\pi &= 0{,}7981799 \\ \hline \cot 60^\circ.\ 2\pi &= 0{,}5596193 \end{aligned}$$

Dieſer briggiſche Logarithme gehört zu 3,6276; auf eine Potenz dieſes Exponenten, ſoll man e

erheben, und mit derſelben den Halbmeſſer dividiren, ſo giebt der Quotient wie weit der Punct wo die Spirallinie CA ſchneidet vom Mittelpuncte iſt. Vegas Tafel giebt die Potenzen von e deren Exponenten 3,62; und 3,63 ſind, auch jeder briggiſchen Logarithmen. Der erſten ihrer iſt = 1,5721460; von 0 abgezogen giebt er = 0,4278540 − 2 welches zu 0,026782 gehört. Eben ſo behandelt giebt der zweyten Potenz briggiſcher Logarithme 0,026516. So liegt der Einſchnitt der Spirale näher beym Mittelpuncte als um 0,026782; weiter vom Mittelpuncte als um 0,26516 des Halbmeſſers.

XX. Zur Berechnung, wie ſich die Spirale dem Mittelpuncte nähert wenn ſie innerhalb des Kreiſes zum zweyten, dritten mahle in CA kömmt, ſetze man wenn ſie zum erſten mahle hinein kömmt, heiſſe ihr Abſtand vom Mittelpunct $= c(n)$ und $c(n+1)$ wenn ſie zum $(n+1)$ten mahle hinein kömmt. So iſt (XVIII) $r.\, e^{-n.2.\pi:m} = c(n)$ und $r.\, e^{-(n+1).2.\pi:m} = c(n+1)$ alſo

$$\frac{c(n+1)}{c(n)} = e^{-2.\pi:m}$$

Dieſe Abſtände werden alſo in einer geometriſchen Progreſſion kleiner.

XXI. Allgemein zeigt ſich geometriſche Progreſſion bey y, welche Vielfachen eines und deſſelben Bogens gehören (VI)

Von

Von der Krümmung.

Erkl. Zwo Tangenten einer krummen Linie bey M; N; 21; 22 F. ſchneiden einander in H. Wenn ſich die Berührungspuncte M, N, einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich der ſpitzige Winkel, den dieſe Tangenten mit einander machen MHD in den **Krümmungswinkel** an dieſer Stelle.

512. Zuſ. Man kann ſich vorſtellen, es ſey der Winkel, den ein paar nächſt auf einander folgende Elemente der krummen Linie mit einander machen (68).

513. Zuſ. Weil die Puncte M; N; ſich einander unendlich nähern, ſo kann man ſie allemahl ſo nahe annehmen, daß zwiſchen ſie in den Bogen MN kein Wendungspunct (112) fällt, wenn ſie nicht ſelbſt in einen Wendungspunct zuſammen gehen.

514. Zuſ. Wenn die Abſciſſe AP um das Stück Pp zunimmt, indem der Punct, welcher die krumme Linie beſchreibt, aus M in N kömmt, ſo muß MHN ein ſtumpfer Winkel ſeyn, der zween rechten unendlich nahe kömmt. Denn in dem Dreyecke, MHN, nehmen die beyden andern Winkel NMH; MNH; unendlich ab (68). Der Bogen MN fällt alſo allemahl in den ſtumpfen Winkel der Tangenten, und der Krümmungs-

winkel MHD als die Summe zweener unendlich abnehmenden Winkel wird unendlich klein.

515. Zuſ. Aber die krumme Linie kann auch eine ſolche Geſtalt haben, daß die Abſciſſe nicht beſtändig zunimmt, indem ein Punct in der krummen Linie aus M in N kömmt. Die 26 F. zeigt dieſes mit MEN; oder MeN; die Abſciſſe wird nähmlich wachſen, ſo lange der Punct aus M in E oder e geht, aber wieder abnehmen, wenn er aus E oder e nach N zu geht.

516. Erkl. Eine ſolche Stelle wie E oder e 26 F. heiſſt eine Spitze oder Rückkehrpunct (cuſpis ſ. punctum reflexus, *point de rebrouſſement*) weil daſelbſt die krumme Linie wieder nach der Gegend zugeht, wo ſie hergekommen iſt. Der Unterſchied zwiſchen E und e kömmt darauf an: MeE liegt unter ſeiner Tangente MH; aber NE über ſeiner NH; da ſind beyde Bogen gegen einander erhoben. (110) Ne liegt unter NH; iſt alſo gegen Me hohl, aber Me gegen ihn erhoben. Man kann dieſe Rückkehrpuncte E; e; von der erſten und zweyten Art nennen. An. endl. 474; iſt von der erſten Art.

Anm. Der Abt de Gua hatte wieder den Marquis de l'Hopital, geläugnet, daß es Rückkehrpuncte von der zweyten Art gebe, Euler aber hat den Streit für den Marquis entſchieden. Mem. de l'Ac. de Pruſſe 1749. p. 203.

517. Wenn (Alg. 474; III. Taf. 20. F.) die Abſciſſen auf AB genommen würden, ſo wüchſen ſie,

ſie, indem der beſchreibende Punct aus M in G geht, obgleich bey D ein Rückkehrpunct wäre. Das wiederſpricht aber der Erklärung nicht, denn für dieſelbe iſt genug, daß man Abſciſſen ſo annehmen kann, wie ſie zum vorausſetzt, und das lieſſe ſich gleich bewerkſtelligen, wenn man die Abſciſſen auf einer Linie nähme, die mit BD parallel iſt.

518. Aufg. **Den Krümmungswinkel an einer Stelle, wo kein Rückkehrpunct iſt, zu finden.**

Aufl. I. Man ſetze erſtlich der Bogen ſey gegen die Abſciſſe AO 21 F. oder den Mittelpunct C 22 F. hohl; das iſt, der Bogen MN falle zwiſchen die Tangenten und die Abſciſſe oder den Mittelpunct (70) die Sehne MN falle zwiſchen die Abſciſſe oder den Mittelpunct; und H.

II. Für parallele Ordinaten (77) THD = OTH — ODH; Wenn aber die Abſciſſen von P nach p zu wachſen, und M; N; einander unendlich nahe rücken, ſo iſt OTH — ODH dem Differentiale des Winkels entgegengeſetzt, den die Tangente mit der Abſciſſe macht. Denn dieſes Differential wäre OTM als ſein erſter Zuſtand, von den zweyten ODN abgezogen.

(13). Nun iſt tang MTO $= \frac{MP}{PT} = \frac{dy}{dx}$ (77)

alſo nach 299 das Differential von MTP; =

 dx.

$$\frac{dx.\,ddy - dy.\,ddx}{dx^2.\,(1 + dy^2 : dx^2)}$$ alſo (267)

$$THD = \frac{dy.\,ddx - dx.\,ddy}{ds^2} = - \frac{dp}{1 + pp}$$

wenn $p = \frac{dy}{dx}$.

Da $ds.\,dds = dy.\,ddy + dx.\,ddx$ ſo ſetze man ds unveränderlich; das giebt $ddy = - \frac{dx.\,ddx}{dy}$ und $ddx = - \frac{dy.\,ddy}{dx}$; daraus wenn ſich die Länge der krummen Linie immer gleichviel ändert $FttD = + \frac{ddx}{dy} = - \frac{ddy}{dx}$

III. Für Ordinaten aus einem Puncte (104) wo $CP = r$; $CM = u$; $MHN = 4R - CMH - CNH - MCN$ (G. 13 S. 6. Z.) aber $CMH = 2R - CMT$; $CNH = CND$; folglich $MHN = 4R - 2R + CMT - CND - MCN$; und $2R - MHN$ oder $THD = CND - CMT + MCN$; Wenn ſich nun die Puncte N; M; einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich $CND - CMT$ in $dCMT$; und MCN in $\frac{dx}{r}$; Es iſt aber alsdenn $\text{tang}\, CMT = \frac{CT}{u} = \frac{udx}{rdu} = \frac{u}{rp}$ wenn $du = pdx$; alſo $THD =$

r. (p

$\frac{r.(pdu - udp)}{r^2 p^2 + u^2} + \frac{dx}{r}$; wo $dp = \frac{dxddu - duddx}{dx^2}$

Man kann hier welches Differential man will, unveränderlich ſetzen.

Sollte der Winkel $MCN = \frac{dx}{r}$ unveränderlich ſeyn, ſo wäre $ddx = 0$; $dp = \frac{ddu}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ ſtatt p geſetzt, kömmt der Krümmungswinkel

$$THD = \frac{(r^2.(2du^2 - uddu) + u^2 dx^2)dx}{r.(r^2 du^2 + u^2 dx^2)}$$

IIII. Hier ſey $PM = y$; alſo $CM = r + y$ ſo iſt $dy = du$; $ddy = ddu$; $p = dy : dx$ u. ſ. w. und $THD = \frac{rpdy - r.(r + y)dp}{r^2 p^2 + (r + y)^2} + \frac{dx}{r}$. Wächſt hier r unendlich, ſo verwandelt ſich der Kreisbogen AP; in die Abſciſſenlinie 21 F. (G. 20. S. 20. Z.) auf welche die Ordinaten MP ſenkrecht ſtehen (96) daß alſo MCN oder $\frac{dx}{r}$ wegfällt, und es wird nach (9) $THD = -\frac{dp}{pp + 1}$ (wie in II.)

 V.

V. Der Krümmungswinkel iſt hier allein dTMC; obgleich derſelbe an ſich (S. 6 Erkl.) unendlich klein iſt, ſo verſchwindet doch in Vergleichung mit ihm der unendlich kleinere $\frac{dx}{r}$ welcher herauskömmt, wenn man was unendlich kleines mit was unendlich groſſem dividirt, und alſo ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung iſt (u)

VI. Einen erhabenen Bogen (I) ſtellt die 23 F. vor. Das Viereck CMHN hat in derſelben bey H einen Winkel, der auf der Seite, nach welcher C zu liegt, wo nähmlich der kleine Kreisbogen um ihn gezogen iſt, gemeſſen, über 2R beträgt (69). Wenn man dieſen Winkel unter MHN verſteht, ſo iſt wie in III. noch MHN = 4R — CMH — CNH — MCN = 2R + CMT — CND — MCN aber alsdenn iſt nicht THD = 2R — MHN ſondern = 2R — (4R — MHN) = MHN — 2R = CMT — CND — MCN welcher Ausdruck dem vorigen II entgegengeſetzt iſt. Alſo wird THD = $\frac{rudp - rpdu}{rrpp + uu} - \frac{dx}{r}$; der Ausdruck für parallele Ordinaten folgt hieraus (IIII).

VII. So findet man alſo, wie weit die Lage der Tangente an M, von der Lage der Tangente an N unterſchieden iſt, welches ohne Zweifel anzeigt, um wieviel der Weg eines Punctes, der

den

den Bogen MN beſchreibt, in N von ſeinem Wege in N unterſchieden iſt, d. i. wie viel ſich dieſer Weg gekrümmt hat. (S. 6. Erkl.) weil ſich aber dieſer Krümmungswinkel ſelbſt nicht angeben läſſt, wenn M; N; ſich einander unendlich nähern, ſo beſteht die Kenntniß, die uns Gegenwärtiges von der Krümmung giebt, darinnen, daß wir auf dieſe Art die Krümmungen an zwo Stellen einer krummen Linie, oder zwoer verſchiedenen krummen Linien mit einander vergleichen können, die Verhältniß dieſer Krümmungen nähmlich wird ſich durch endliche Gröſſen ausdrucken laſſen, wenn man in dem Ausdrucke des Krümmungswinkels alle Differentiale durch ein einziges ausdruckt, und dieſes Differential in den beyden Werthen, welche der Ausdruck des Krümmungswinkels für die erwähnten beyden Stellen bekömmt, einerley ſetzt, daß man damit dividiren kann.

VIII. Will man alſo, wie natürlich iſt, zweene gleichlange Bogen der krummen Linie mit einander vergleichen, und ſehen, wie vielmahl einer krümmer als der andere iſt, ſo muß man für dieſes Differential ds annehmen. Es iſt aber (aus 509; und 518; III.) $ds = \frac{dx\sqrt{(rrpp + uu)}}{r}$

alſo $\frac{dx}{r} = \frac{ds}{\sqrt{(rrpp + uu)}}$ und pdx oder

Pp 5 du =

$du = \frac{prds}{\sqrt{(rrpp + uu)}}$. Weil ferner p allemahl durch x; y; gegeben ſeyn muß, ohne daß ſich dy; dx; darinnen befinden, denn ſonſt beſtimmte es die Verhältniß dy: dx nicht, ſo iſt dp allemahl durch die erſten Differentiale der Coordinaten gegeben, ohne daß man höhere nöthig hat, und läſſt ſich alſo allemahl durch ds ausdrucken, daher THD ſich allemahl durch ds ausdrucken läſſt.

VIIII. Für parallele Ordinaten iſt (266)

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{(1 + pp)}};\ dy = \frac{pds}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

519. Die Tangenten bey M; N; (518) bleiben allezeit noch verſchieden, ſo nahe auch dieſe Puncte einander rücken. Daher wird ihr Winkel, wenn er ſich in den Krümmungswinkel verwandelt, auch ein unendlich kleines der erſten Ordnung; die Lagen der Tangenten kommen nähmlich einander näher, als die Lagen zwoer Linien, deren Unterſchied ſich angeben läſſt, einander kommen können. Aber in dem Rückkehrpuncte 26 F. müſſen die beyden Bogen völlig einerley Tangente haben, weil dieſer Punct beyden Bogen gemein und ein einziger Punct iſt. Wie nähmlich 25 F. E der Punct iſt, wo der Bogen MNE aufhört, und der Bogen $E\mu\nu$ anfängt, und wie es an dieſer gemeinſchaftlichen Gränze beyder Bogen, nur eine einzige Tangente giebt,

ſo

ſo giebt es auch nur eine bey deren Rückkehrpuncte E oder e 26 F. als der gemeinſchaftlichen Gränze der Bogen ME; EN; oder Me; eN; Stellt man ſich alſo an den beyden Bogen ME; NE; die Tangenten MH; NH; vor, und läſſt M; N; in E oder e zuſammenrücken, ſo muß ihr Winkel MHN nicht nur ein Unendlichkleines von der Art des Krümmungswinkels (518) ſondern in Vergleichung mit dieſem ſelbſt unendlich klein, oder = o werden. Giebt es an einem Puncte zwo oder mehr verſchiedene Tangenten, ſo gehören die Bogen daſelbſt zu verſchiedenen Schenkeln, wie bey C Alg. III. Taf. 22. F. S. Alg. (493.)

520. Aufg. Den Rückkehrpunct zu finden.

Aufl. I. Man ſuche einen Ausdruck für den Winkel MHN unter der Vorausſetzung, daß ſich M; N; beyde dem geſuchten Rückkehrpuncte E unendlich nähern, und ſetze dieſen Ausdruck = o (519).

II. Es iſt nähmlich NHM = NMT — MNH; NMT = CMN — CMT; CMN = 2R — CNM — MCN; ferner MNH = CNH — CNM; alſo NHM = 2R — MCN — CMT — CNH = CND — CMT — MCM; Weil nun ein Punct, der die krumme Linie beſchreibt, auf dem Wege MEN oder MeN aus M in N kommen kann, ſo laſſen ſich CM; CN; für zwo nach einander folgende Ordinaten, und MT; ND; für zwo nach einander folgende Tangenten,

genten, und CND; CMT; für zweene nach einander folgende Winkel der Ordinaten mit den Tangenten annehmen. Daher, wenn ſich die Puncte M; N; beyde dem Puncte E; und folglich einander ſelbſt unendlich nähern; ſo wird CND — CMT = dCMT; und MCN = $\frac{dx}{r}$; alſo kömmt MHN = $\frac{r.(pdu - udp)}{rrpp + uu}$ — $\frac{dx}{r}$ (518; III) welches = 0 geſetzt (519) rr. (pdu — udp) = (rrpp + uu) dx giebt, wo wegen der gegebenen Gleichung der krummen Linie; du und dp ſich durch dx ausdrucken laſſen, daß man alſo mit dx dividiren kann, und eine Gleichung zwiſchen lauter endlichen Gröſſen, wo alles veränderliche durch x oder u gegeben iſt, erhält. Dieſe Gleichung, mit der für die krumme Linie, welche auch nur x und u enthält, nach (Alg. 199) verglichen, giebt eine beſtimmte Gleichung für das x oder das u das zum Rückkehrpuncte gehört.

III. Für parallele Ordinaten wird MHN = $-\frac{dp}{1 + pp}$ wie in 518; IIII; weil die erſten Theile der Ausdruckungen für MHN (II) und THD (518); III) einerley ſind, alſo kann man für den Rückkehrpunct dp = 0 das iſt eigentlich $\frac{dp}{dx}$ = 0 ſetzen (519).

IIII.

IIII. Die Bedingung (519) daß MHN in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwinden ſoll, läſſt ſich hier auch erhalten, wenn nicht $dp = 0$ aber $p = \infty$ iſt; welches alſo auch den Rückkehrpunct zu finden kann gebraucht werden.

V. In II giebt die Vorausſetzung $p = \infty$ dieſes nicht, weil da noch der Theil $-\frac{dx}{r}$ des Winkels MNH bleibt.

VI. Aus 519. folgt nur ſoviel, daß dieſe Vorausſetzungen beym Rückkehrpuncte ſtatt haben, aber nicht, daß ſie an keiner andern Stelle einer krummen Linie ſtatt haben: Alſo darf man aus ihnen nicht allemahl ſicher auf einen Rückkehrpunct ſchlieſſen. Wenn man aber durch ſie nach (II) eine gewiſſe Abſciſſe beſtimmt hat, ſo darf man nur den Gang der krummen Linie nach (Alg. 329) ein wenig unterſuchen, um zu ſehen, ob dieſe Abſciſſe einem Rückkehrpuncte zugehört.

521. Aufg. Zu entſcheiden, ob die krumme Linie gegen die Axe 21 §. oder den Mittelpunct 23 §. hohl oder erhaben iſt.

Aufl. I. Weil THD in beyden Fällen 518; III; VI; herauskömmt, wenn man das kleinere von dem gröſſern abzieht, ſo iſt er beydemahl bejaht; Sein Ausdruck aber in 518; VI; iſt dem in 518 III; entgegengeſetzt. Jeder Ausdruck giebt alſo für ſeinen Fall etwas bejahtes, und für

den

den entgegengeſetzten etwas verneintes. Wenn man alſo überhaupt für den Ausdruck des Krümmungswinkels den aus 518; III; annimmt, ſo iſt die krumme Linie gegen C hohl oder erhaben, nachdem dieſer Ausdruck einen bejahten oder verneinten Werth giebt.

II. Bey parallelen Ordinaten 21 F. iſt MN gegen die Axe AP hohl, oder erhaben, nachdem $-dp:(1+pp)$ bejaht oder verneint, (518. IIII) das iſt, nachdem dp verneint oder bejaht iſt. Aber gegen die Axe $\alpha\Pi$ wird eben die krumme Linie erhaben ſeyn. Sind nun die Ordinaten PM; pN; bejaht, ſo ſind ΠM; πN verneint, weil der Bogen MN unter $\alpha\Pi$ liegt, wenn er über AP liegt; indem alſo die Abſciſſe $\alpha\Pi$ eben wie AP zunimmt, ſo nimmt die verneinte Ordinate ΠM ab; das iſt, p iſt für ΠM bejaht (23) wie für PM; und dp als das Differential von $\frac{NS}{MS}$ bleibt auch einerley für AP und für $\alpha\Pi$. Alſo iſt die krumme Linie gegen die Axe $\alpha\Pi$ erhaben oder hohl, nachdem dp verneint oder bejaht iſt. Hiebey nimmt man dx als bejaht an, weil man AP als die erſte Abſciſſe, und AP als die zweyte anſieht, oder bejahte Abſciſſen wachſen läſſt. Wäre dx verneint, ſo müſſte p für einerley dy mit dem, was dem bejahten dx zugehörte, einen entgegengeſetzten Werth bekommen, und eben ſo dp. Man kann ſich aber

die

die Mühe dieſe Mannichfaltigkeiten zu unterſcheiden erſparen. Denn wenn man die Frage der Aufgabe für verneinte x beantworten ſoll, darf man ſich nur vorſtellen, daß ſie abnehmen, oder das gröſſte verneinte als das erſte, und das kleinere als das zweyte anſehen, ſo bekömmt man allemahl bejahte dx. Iſt alſo für bejahte dx.

die Ordinate, und dp	ſo iſt die krumme Linie gegen die Axe
bejaht { verneint	hohl
bejaht { bejaht	erhaben
verneint { verneint	erhaben
verneint { bejaht	hohl

oder die krumme Linie iſt gegen die Axe hohl, oder erhaben, nachdem Ordinate und dp, entgegengeſetzte, oder nicht entgegengeſetzte Gröſſen ſind, oder nachdem $\frac{dp}{y}$ verneint oder bejaht iſt.

522. Wenn dx unveränderlich iſt, wie man hier ohngeachtet 518 VIII annehmen darf, weil die Abſicht nicht iſt, zweene Krümmungswinkel zu vergleichen, ſo iſt in 521 II; bey bejahten Ordinaten — ddy für die hohle krumme Linie bejaht, für die erhabene verneint; folglich ddy für jene verneint, für dieſe bejaht, das iſt, bey der hohlen krummen Linie 21 F. nehmen für zunehmende Abſciſſen, der Ordinaten Differentiale ab, wenn die Ordinaten ſelbſt zunehmen, oder zu,

wenn

wenn die Ordinaten abnehmen (23). Für die erhabene findet das Gegentheil ſtatt.

523. Anm. CT 19 F. ſey der krummen Linie DMF Aſymptote; die Weiten von der Aſymptote MQ, ER, FT als Ordinaten betrachtet, müſſen unendlich abnehmen; Sie können aber für gleiche Zunahmen der Abſciſſe QR = RT nicht gleich viel abnehmen, oder es kann nicht MQ − ER = ER − FT ſeyn, ſonſt müſſte, wenn dieſes beſtändig fortdauerte, die Ordinate MQ in einer endlichen Entfernung von Q, die ſich durch ein Vielfaches der Gröſſe QR ausdrucken lieſſe, bis auf Nichts abgenommen haben, oder gar verneint geworden ſeyn: Noch weniger dürfen die folgenden Ordinaten ſtärker abnehmen als die vorhergehenden, ſo daß ER − FT > MQ − ER wäre: Alſo bleibt nur das übrig, daß die folgenden Ordinaten weniger als die vorhergehenden abnehmen, oder MQ − ER > ER − FT; das heiſſt; wenn die Puncte M; E; F; ſich einander unendlich nähern; dx iſt beſtändig und die Differentiale abnehmender Ordinaten nehmen ſelbſt auch ab. Folglich iſt nach (516) jede krumme Linie, die eine Aſymptote hat, gegen die Aſymptote erhaben; wie ſchon (110) aus andern Gründen dargethan worden.

Exempel bey parallelen Ordinaten.

524. Für die Kegelſchnitte (Alg. 362; 389) iſt $p = \frac{b.(a \mp 2x)}{2ay}$ (85) folglich

$$dp = \frac{b}{2a}.\left(\frac{\mp 2ydx - (a \mp 2x).dy}{y^2}\right);$$ oder

weil $dy = \frac{b.(a \mp 2bx)}{2ya} dx$; $dp = \frac{b}{2a}$

[∓ 2y

$$\left\{\mp 2y - (a \mp 2x).\frac{b.(a \mp 2bx)}{2ay}\right\}.\frac{dx}{y^2} -$$

$$= \frac{bdx}{4a^2y^3}.(\mp 4ay^2 - (a \mp 2x).(ab \mp 2bx);$$

wo $-(a \mp 2x) = \pm 2x - a$ aber

$$\mp 4ay^2 = \mp 4a.bx \mp 4a. \mp \frac{bxx}{a}$$

$$= \mp 4abx + 4bxx$$

dazu $\mp 2abx - 4bxx - aab$

$\mp 2abx$

also $dp = -\frac{bbdx}{4y^3} = -\frac{bb}{4y^3}.\frac{ds}{\sqrt{(1+pp)}}$

alſo der Krümmungswinkel (518

III) $= \frac{+bbds}{4y^3.(1+pp)^{3:2}}$

525. Der Kreis iſt eine Ellipſe, wo $b = a$;

alſo $p = \frac{a-2x}{2y}$ und $1 + pp =$

$$\frac{4yy + aa - 4ax + 4xx}{4yy} = \frac{aa}{4yy}$$

alſo der Krümmungswinkel $= aads : 4y^3$.

$\frac{a^3}{8y^3} = \frac{2ds}{a} = \frac{ds}{\frac{1}{2}a} =$ dem Winkel am Mittelpuncte, deſſen Maas der Bogen von der Länge ds iſt, (G. 44. S. 11. Z.) wie in (96).

526. Die Normallinie jeder krummen Linie MO 1. F. heiſſe w ſo iſt $w = y\sqrt{(1 + pp)}$ (92) alſo der Krümmungswinkel jedes Kegelſchnittes $= \frac{bbds}{4w^3}$.

Bey der Parabel iſt $w = \frac{\sqrt{(4yy + bb)}}{2}$ alſo ihr Krümmungswinkel $\frac{2bbds}{(4bx + bb)^{3:2}}$

Für die Abſciſſen $\frac{1}{4}$ b; und b; ſind die Krümmungswinkel $\frac{2bbds}{2\sqrt{2}.b^3}$ und $\frac{2bbds}{5\sqrt{5}.b^3}$ alſo verhalten ſich die Krümmungen wie $5\sqrt{5} : 2\sqrt{2} = \sqrt{125} : \sqrt{8} =$ ohngefähr $\sqrt{15,62} : 1 = 3,9 : 1$ oder die Krümmung über dem Brennpuncte iſt ohngefähr 4 mahl gröſſer als über dem Ende der viermahl gröſſern Abſciſſe. Am Scheitel iſt der Krümmungswinkel $\frac{2ds}{b}$ und verhält ſich zu dem über dem Brennpuncte wie $2\sqrt{2}; 1 = \sqrt{8} : 1 = 2,8 : 1$. Der Krümmungswinkel für jedes endliche x verhält ſich zum Krümmungswinkel bey einer unendlichen Abſciſſe $=$

$$\frac{1}{(b.(4x + b))^{3:2}} :$$

$$\frac{1}{(b.\infty\alpha)^{3:2}} = 8.\infty^{3:2} : (4x + b)^{3:2}$$

oder

oder die Krümmung der Parabel nimmt unendlich ab, indem die Abſciſſe unendlich zunimmt; der Krümmungswinkel nimmt nähmlich beſtändig ab, indem die Abſciſſe wächſt, und gleiche Bogen der Parabel, ſind deſto weniger krumm, je weiter ſie vom Scheitel liegen; daher wird der Schenkel der Parabel immer weniger und weniger krumm, je weiter er ſich hinaus erſtreckt.

525. Bey jedem Kegelſchnitte iſt $\frac{dp}{y} = -\frac{bb\,dx}{4y^4}$ allemahl für bejahte dx verneint, oder der Kegelſchnitt allemahl gegen die Axe hohl (521. II.)

526. Bey der neiliſchen Parabel (268) iſt

$$p = \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}.\, y^{-\frac{1}{2}};\ dp = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3}.\, y^{-\frac{3}{2}}\, dy = -\frac{p\sqrt{a}}{3\sqrt{(y^3.(1+pp))}}.\, ds;$$

alſo

$$-\frac{dp}{1+pp} = \frac{+p\sqrt{a}.\, ds}{3(y.(1+pp))^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{a}.\, ds}{\sqrt{(y.(9y+4a)^3)}}$$

$$= \frac{6a^{\frac{1}{3}}\, ds}{x^{\frac{1}{3}}.[4a^{\frac{2}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{2}{3}}}$$

527. $p = \frac{2ax}{3yy} = \frac{2axx}{3yyx} = \frac{2y}{3x}$;

alſo $dp = \frac{2}{3}. \frac{xdy - xdy}{xx} = \frac{2}{3xx}$.

$\left(\frac{2y}{3} = y\right) dx = - \frac{2ydx}{9xx}$; alſo

$\frac{dp}{y} = - \frac{2dx}{9xx}$ und die krumme Linie beſtändig gegen die Axe hohl (521. II.) Wenn man p und dp aus 526 brauchen wollte, ſo würden die zweydeutigen Wurzelgröſſen Ungewißheiten verurſachen, die man wenigſtens mit mehr Mühe entſcheiden müſſte, daher ich ſie hier zu vermeiden geſucht habe.

528. Weil $\frac{y}{x} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$; ſo wird $\frac{y}{x}$ unendlich, wenn x unendlich abnimmt, alsdenn aber ſcheinet der Krümmungswinkel unendlich groß zu werden. Man muß aber bedenken, daß ds und x unendlichklein vom erſten Grade und $\sqrt[3]{x}$ vom Grade $\frac{1}{3}$ ſind, folglich der Krümmungswinkel ein Unendlichkleines vom Grade $\frac{2}{3}$ wird. Es ſey $ds = \frac{m}{\infty}$; $x = \frac{n}{\infty}$ ſo iſt der Krümmungswinkel

$6\sqrt[3]{a}. \frac{m}{\infty} : \frac{\sqrt[3]{n}}{\infty^{1:3}} . 8a =$

$\frac{1}{4}. m$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{\sqrt[3]{a\,a\,n.\,\infty^{2:3}}}$

529. Wo ſich ein ſolcher Krümmungswinkel wie 528 findet, da ſagt man, die Krümmung ſey unendlich groß. Der Krümmungswinkel iſt in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln unendlich groß, und doch in Vergleichung mit endlichen Winkeln unendlich klein, wie das Geſetz der Stetigkeit (G. 6. Erkl.) erfodert. Dieſes kann beyſammen beſtehen, wenn er ein Unendlichkleines einer niedrigern Ordnung als der erſten iſt (11).

Exempel zu 518. bey Ordinaten aus einem Puncte.

530. Bey der archimediſchen Spirallinie ſey die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe $= 1 : \pi$ und in (Alg. 580.) $y = u$; ſo iſt ihre Gleichung $u = \frac{x}{2\pi}$ alſo in 518; III. $p = \frac{1}{2\pi}$; $dp = 0$; und $THD = \frac{2r\pi du}{rr + xx} + \frac{dx}{r}$ $= \frac{2rr + xx}{r.(rr + xx)} \cdot dx = \frac{(2rr + xx).\, 2\pi ds}{(rr + x2)^{3:2}}$
(518; VIII.)
Alſo verhalten ſich die Krümmungen für $x = 0$ und $x = 2r\pi$ oder beym Anfange der Spirale

 und

und am Ende ihrer erſten Umwindung, wie $\frac{2rr}{r3}$: $\frac{2rr + 4rr\pi\pi}{(rr + 4\pi\pi)^{3:2}} = (1 + 4\pi\pi)^{3:2}$: $(1 + 2\pi\pi)$

531. Bey der paraboliſchen Spirale (107) iſt $r - u = \sqrt{ax}$; alſo $p = -\frac{1}{2} a^{1:2}. x^{-\frac{1}{2}}$; $dp = \frac{+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}} dx$. Wenn man alles durch u ausdruckt, weil ſich die Linie u mit den Linien r; a; leichter vergleichen läſſt als der Bogen x, ſo findet man den Krümmungswinkel

$$\left(\frac{r^2 a.(r - 2u)}{(r - u).(rraa + 4uu.(r - u)^2)} + 1\right).$$

$\frac{dx}{r}$ wo man ſtatt $\frac{dx}{r}$ ſeinen Werth

$\frac{2ds.(r - u)}{\sqrt{(rraa + 4(r - u)^2.uu)}}$ ſetzen kann.

Soll hier der Krümmungswinkel, bey einem bejahten dx bejaht oder die krumme Linie gegen C höhl ſeyn, ſo iſt (571) für $r > u$; $rraa.(r - 2u) + (r - u).(rraa + 4uu(r - u)^2)$ bejaht, oder wenn $r = 1$ geſetzt wird $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - uu + \frac{3}{4}aau - \frac{1}{2}aa > 0$.

Von

Von dem Wendungspuncte. (112)

532. Aufg. Den Wendungspunct einer krummen Linie zu finden.

Aufl. I. Wenn MN 25 F. hohl, und $\mu\nu$ erhaben iſt, ſo liegt der Durchſchnitt der Tangenten, H, über der Sehne MN; und η unter $\mu\nu$. Wenn alſo die Berührungspuncte an dem hohlen Theile M; N; dem erhabenen immer näher und näher rücken, und der Durchſchnitt H alſo nach und nach fortrücken ſoll, bis er auf die andere Seite der Sehne fällt, ſo muß er entweder von der Sehne ſich immer weiter und bis in das Unendliche entfernen, oder ihr immer näher und näher kommen. (G. 12 S. 12 Z.) In jenem Falle würde der Winkel MHN immer weniger und weniger ſtumpf und nähme bis auf nichts ab, alſo wüchſe ſein Nebenwinkel MHD bis auf 2 R. Dieſes läſſt das Geſetz der ſtetigen Krümmung nicht zu (G. 6. Erkl.) und alſo findet der zweyte Fall allein ſtatt. Da nimmt nun der Winkel MHD immer mehr und mehr ab, und wie er allezeit als ein Krümmungswinkel, in Vergleichung mit andern endlichen Winkeln verſchwindet, ſo muß dieſer Krümmungswinkel hier ſo weit abnehmen, daß er in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwindet. Alſo muß (nach 518; III) für die Stelle des Wendungspunctes, $rr.(pdu - udp) + rr.(pp + uu).dx = 0$ ſeyn. Beynahe wie (520. II.)

 II. Für

II. Für parallele Ordinaten (518. III.) iſt entweder $\frac{dp}{dx} = 0$ oder $p = \infty$; wie (520; III; IIII.)

III. Alſo giebt einerley Verfahren Wendungspuncte, oder Rückkehrpuncte, weil die Vorausſetzung zwar allemahl bey einem Wendungspuncte, aber nicht allein bey ihm ſtatt findet, wie 520 VI; wo man auch ſieht, was man zu Entſcheidung dieſer Zweydeutigkeit zu thun hat. Denn wenn die Stelle kein Rückkehrpunct iſt, ſo iſt ſie eine Wendung, zuweilen auch beydes zugleich wie E 26 F.

Exempel für parallele Ordinaten.

533. Bey den paraboliſchen Linien (163) iſt $\frac{dp}{dx} = m.(m-1)x^{m-2} + (m-1).(m-2)$ $px^{m-3} + (m-2).(m-3)\,qx^{m-4} \ldots +$ $2\,\mathfrak{f} = x$. Alſo hat eine ſolche Linie vom Grade m; m — 2 Beugungspuncte, die durch die Auflöſung dieſer Gleichung gefunden werden.

Wenn $m = 3$ ſo iſt $6x + 2p = 0$ oder der Beugungspunct befindet ſich bey der Abſciſſe $-\frac{1}{3}p$.

534. Bey der krummen Linie Alg. 474; wird $p = -\frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{a}{a-x}}$; welches $= \infty$ für $x = a$ wird. Für den daſigen Rückkehrpunct (520. II.)

535. I. Es ſey $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (Eul. Introd. L. II. §. 333.). Hier kann man $\sqrt{x}$ nicht mit dem Zeichen -- nehmen, ſonſt würde der andere Theil des Werthes von y; welcher $= \sqrt{(x \sqrt{x})}$ iſt, unmöglich. Alſo findet die Zweydeutigkeit der Zeichen nur vor der Wurzelgröſſe, die dieſen andern Theil ausmacht, ſtatt, und weil x nicht verneint werden kann ohne die Wurzelgröſſen unmöglich zu machen, auch die Biquadratwurzel aus x^3 nur zweene mögliche Werthe hat; ſo gehören jedem x nur zwey y zu, deren Unterſchied auf die Zweydeutigkeit der Zeichen vor der Biquadratwurzel ankömmt.

II. Man ſetze $\sqrt[4]{x} = u$ und $x = u$ auch

$$du = \frac{dx}{4\,x^{3:4}} = \frac{dx}{4u^3}$$ ſo iſt $y = u^2 \pm u^3$

und $dy = (2 \pm 3u).\,udu$ alſo $\frac{dy}{dx}$ oder

$$p = \frac{1}{2uu} + \frac{3}{4u};$$ und $$dp = -- \frac{du}{u^2}.$$

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{3}{4}\right)$$ oder $$\frac{dp}{dx} = - \frac{(4 \pm 3u)}{16u^6}$$

III; Jedes u giebt nur ein x; Man kann alſo zuerſt die u nach Gefallen annehmen, ſo giebt ſich für jedes u das zugehörige x; und das dieſem zugehörige y.

 IIII;

IIII; Weil in dem Werthe von y (II) nur der Würfel von u ſein Zeichen ändert, wenn u verneint wird, ſo findet man die beyden Werthe, welche y für jedes u oder x bekömmt, aus der Gleichung für y (II) durch den Gebrauch des doppelten Zeichens, ſo daß man u allemahl als bejaht annimmt.

V. Ich will das erſte y nennen, das $= uu\,(1 + u)$ und das zweyte, das $= uu\,(1 - u)$ iſt. Dergleichen ſollen CE; CD; 27 F. ſeyn.

So iſt für	$u = 0$;	$\frac{2}{3}$;	1;	$\frac{4}{3}$;	2;
	$x = 0$;	$\frac{16}{81}$;	1;	$\frac{256}{81}$;	16;
erſtes	$y = 0$;	$\frac{20}{27}$;	2;	$\frac{112}{27}$;	12;
zweytes	$y = 0$;	$\frac{4}{27}$;	0;	$-\frac{10}{27}$;	-4;

VI. Das erſte y wächſt mit u oder x ohne Ende. Das zweyte muß für einen Werth von u, der zwiſchen 0 und 1 fällt, ein gröſſtes werden. Es iſt nähmlich für die Reihe der zweyten y; die Gröſſe $p = \frac{1}{2u} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{3}{2}\right)$ alſo nach (155) $p = 0$ wenn $u = \frac{2}{3} =$ AC 27 F.

VII. Für $u < 1$ oder $x < 1$ ſind beyde Ordinaten bejaht. Für $x > 1$ bleibt es die erſte, aber die zweyte wird verneint, und dieſe verneinten Ordinaten wachſen mit u, oder x; ohne Ende.

VIII. Für die erſte Ordinate iſt $\frac{dp}{dx}$ $= -\frac{(4 + 3u)}{16u^6}$ allemahl verneint; und y be-

jaht;

jahʒt; alſo der Schenkel AEF den ſie giebt, gegen die Axe beſtändig hohl (521. II;) Für die andere iſt $\frac{dp}{dx} = -\frac{(4-3u)}{16u^6}$ verneint, ſo lange $u < \frac{4}{3}$ oder $x < \frac{256}{81}$ iſt, für gröſſere u und x aber bejaht; aber die Ordinate CD für jede Abſciſſe von o bis AB = 1 bejaht, und alſo der Schenkel, den ſie giebt, zwiſchen dieſer beyden Abſciſſen Gränzen A und C hohl; ferner die Ordinate von der Abſciſſe = 1 ohne Ende fort verneint, wie GH und weil von dieſer Abſciſſe an bis an $\frac{256}{81}$ noch dp verneint iſt, ſo iſt der Theil BH dieſes Schenkels, der ſich mit der Abſciſſe 1 oder bey B anfängt, und bis an die $\frac{256}{81}$ = AG geht, erhoben: Weil aber von da dp bejaht wird, da die Ordinate verneint bleibt, ſo iſt alles Folgende dieſes Schenkels HK hohl, alſo in K ein Wendungspunct, wo $\frac{dp}{dx} = o$ (532)

VIIII. Dieſe krumme Linie FEADBHK hat bey A einen Rückkehrpunct ohne Wendungspunct eine Spitze von der zweyten Art (516). 27 F.

Exempel für Ordinaten aus einem Puncte.

536. In der paraboliſchen Spirallinie (531) iſt der Wendungspunct da, wo die Gröſſe = o wird, die an dem Ende von 531; > o geſetzt wurde.

wurde. Wenn man mit Jacob Bernoulli am (90) angef. O. den Umfang des Kreiſes oder $2r\pi = \frac{rr}{a}$ ſetzt, damit für $x = 2r\pi$; die Ordinate $= 0$ wird, ſo iſt $a = \frac{1}{2} r. \frac{1}{\pi}$ wo man für $r = 1$; aus (G. 44 S. 5 Z.) $a = 0,159154943..$ und $aa = 0,02532...$ alſo $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - u^2 + 0,01899u - 0,01266 = 0$ bekömmt. Setzt man in (531) $r = 1$; $u = 1 - y$; und was herauskömmt $= 0$; ſo bekömmt man $y^5 - 2y^4 + y^3 + \frac{3}{4} a^2 y - \frac{1}{4} a^2$, wenn nun hier $y = \frac{1}{6}$ ſo ſind die drey erſten Glieder dieſes Ausdruckes $\frac{25}{6^5} = 0,00322...$ Die beyden letzten $\frac{1}{4} aa. - \frac{1}{2}$ welches ſich für $a = \frac{r}{2\pi}$ in $- 0,00316...$ verwandelt. Alle fünf Glieder zuſammen geben alſo $+ 0,00006$ und da dieſes etwas ſehr geringes iſt, ſo iſt (nach Alg. 319) für den Wendungspunct beynahe $u = \frac{5}{6}$; folglich der Bogen AP 22 F. oder $x = \frac{(r-u)^2}{a}$ — beynahe $= \frac{1}{36} : \frac{1}{2\pi} = \frac{2\pi}{36}$ und weil 2π der ganze Umfang iſt, ſo iſt ACM $= 10$ Gr.

537. Aufg. Bey parallelen Ordinaten zu finden, unter was für Umſtänden ein Wendungspunct vorhanden iſt, wenn $dy = 0$.

Aufl. Man ſetze dx unveränderlich, und $= r$ (419) ſo iſt der Wendungspunct der Hauptlinie, (127) bey der Abſciſſe, bey welcher $dp = 0$ (532) alſo die Ordinate p der erſten Differentiallinie ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird (155). Wird nun allemahl $dy = 0$ angenommen, und es iſt $ddy = 0$; ſo findet dieſes ſtatt, und der Hauptlinie Ordinate iſt kein Gröſſtes oder Kleinſtes, (155; III) aber es giebt einen Wendungspunct.

Iſt auch $d^3 y = 0$; aber nicht $d^4 y$ ſo iſt der erſten Differentiallinie Ordinate kein Gröſſtes oder Kleinſtes (155. V.) alſo hat die Hauptlinie keinen Wendungspunct; aber ein Gröſſtes oder Kleinſtes (155; VIII.)

Iſt auch $d^4 y = 0$ aber nicht $d^5 y$ ſo hat die erſte Differentiallinie ein Gröſſtes oder Kleinſtes (155; VIII.) alſo die Hauptlinie einen Wendungspunct, aber kein Gröſſtes oder Kleinſtes.

So erhellt überhaupt, daß für $dy = 0$; die Hauptlinie entweder einen Wendungspunct, oder ein Gröſſtes hat, nachdem die Anzahl der nächſt folgenden höhern Differentiale von y die für eben die Abſciſſe verſchwinden, 1; 3; ... ungerade, oder 0; 2... gerade iſt. Mac Laurin Treat on Flux. Book I. art. 261. wo man auch gleich darauf Betrachtungen über die Spitzen (516) antrifft.

Vom

Vom Krümmungskreiſe.

538. Erkl. NV = MN 28 F. ſind Sehnen einer krummen Linie, und K iſt der Mittelpunct eines Kreiſes durch M; N; V; Wenn ſich V; M dem Puncte N unendlich nähern, ſo heiſſt dieſer Kreis der Krümmungskreis (circulus curuaturae ſ. oſculator;) und ſein Halbmeſſer der Halbmeſſer der Krümmung (radius oſculi).

539. Sind NH; MH; Tangenten der krummen Linie wie 22 F. ſo iſt HNW gewiß eine Tangente des Krümmungskreiſes; weil die Puncte M; V; beyde auf einer Seite dieſer geraden Linie liegen. (Alg. 449.)

540. Alſo wenn MKN = $\varkappa$ heiſſt; MNH = R — MNK und MNK = R — $\frac{1}{2}\varkappa$ folglich MNH = $\frac{1}{2}\varkappa$.

541. HMN; WNV; ſind zweene nächſt nach einander folgende Winkel der Tangenten mit den Sehnen. Wenn die Sehnen anfangs endlich ſind, ſind dieſe Winkel endlich; Es ſey WNV = HMN + δHMN; wo δHMN bedeutet, was zu HMN kömmt, damit WNV daraus wird. Weil ſich nun dieſe Winkel wie alle übrige Gröſſen nach dem Geſetze der Stetigkeit verändern müſſen; ſo nimmt der Quotient $\frac{\delta HMN}{HMN}$ unendlich ab, indem V; N; M; ſich einander unendlich nähern.

542. Man

542. Man ſetze die Sehnen MN = NV. Nun iſt HNM = 2R − WNV − MNV; aber MNV = 2. MNK = 2. (R − $\frac{1}{2}$ κ) = 2R − κ alſo HNM = κ − WNV = κ − HMN − δHMN folglich

$$\frac{HNM + HMN}{HMN} + \frac{\delta HMN}{HMN} = \frac{\varkappa}{HMN};$$ Aber HNM + HMN = THD; alſo nähert ſich (542) der Quotient $\frac{THD}{HMN}$ unendlich dem Quotienten $\frac{\varkappa}{HMN}$ oder es wird THD = κ.

543. Aufg. Den Halbmeſſer der Krümmung zu finden.

Aufl. I. Aus Trig. 8. S. iſt $MK = \frac{\frac{1}{2} MN}{\sin \frac{1}{2} \varkappa}$; Wenn ſich nun M; N; einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich MN; in ds; und sin $\frac{1}{2}$ κ in $\frac{1}{2}$ κ (286) = $\frac{1}{2}$ THD (542) alſo wird MK $= \frac{ds}{THD}$ wo der Diviſor aus 518. bekannt iſt.

II. Es iſt nähmlich der Halbmeſſer der Krümmung = z, für parallele Ordinaten, wo ds = dx √ (1 + pp) aus 518; IIII;

$$= -(1 + pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$$
(542. II.)

III. Alſo

III. Alſo wenn dx unveränderlich iſt

$$z = -\frac{ds^3}{dxddy}$$

IIII. Wenn ds unveränderlich iſt; alſo dyddy $+ dxddx = 0$; $z = \frac{dyds}{ddx} = -\frac{dxds}{ddy}$

V. Für Ordinaten aus einem Puncte, iſt r. $ds = dx. \sqrt{(rrpp + uu)}$ (509) wenn dorten $y = u$; dy oder $du = pdx$ geſetzt wird, alſo

$$z = \frac{(rrpp + uu).\ dsdx}{r.\ (pdu - udp)\ dx + rds^2}$$

VI. Wenn man hierinn aus 518 IIII; den Werth von dp; und aus hier V; den von $ds = \frac{\sqrt{(r^2 du^2 + u^2 dx^2)}}{r}$ ſetzt, ſo findet man

$$z = \frac{rds^3}{dxds^2 + du^2 dx + ududdx - udxddu}$$

VI. Iſt hier du unveränderlich, ſo iſt

$$z = \frac{rds^3}{dx(ds^2 + du^2) + ududdx}$$

VII. Iſt ds unveränderlich, ſo kömmt

$$z = \frac{rdsdy}{2dydx + yddx}$$

VIII. Iſt dx unveränderlich, ſo kömmt

$$z = \frac{rds^3}{dx.\ (ds^2 + du^2) - udxddu}$$

Wenn

Wenn man daraus $ddu = \frac{r^2 dsdds - ududx^2}{r^2 du}$ wegſchafft, ſo erhält man

$$z = \frac{rds^2 du}{dx.(2dsdu - udds)}$$

VIIII. Setzt man $u = r + y$ und alsdenn $r = \infty$ ſo verwandelt ſich V in II. wie bey 518 IIII.

X. Die krumme Linie iſt hohl oder erhaben, nachdem dieſe Ausdrückungen für den Halbmeſſer der Krümmung bejahte oder verneinte Werthe geben. (hier I und 521.) Der Mittelpunct der Krümmung liegt nähmlich auf der hohlen Seite der krummen Linie. Wenn alſo eine krumme Linie nach einer Gegend hohl, und die andere nach eben der Gegend erhaben iſt, ſo haben die Halbmeſſer der Krümmung entgegengeſetzte Lagen.

XI. Die Formel (V) hat Cramer in den Anmerk. über Jac. Bernoullis Werke. T. I. n. 58. p. 579. not. n. ſynthetiſch erwieſen. In meinem Lehrbegriffe der Optik 2. B. II. Th. 5. C. habe ich eine Analyſis davon unter den gewöhnlichen Vorausſetzungen der Rechnung des Unendlichen gegeben.

XII. Die Normallinie wie MO 1. F. heiſſe $w = \sqrt{\left(yy + \frac{yydy^2}{dx^2}\right)}$ (92) $= y\sqrt{(1 + pp)}$; ſo iſt $z = -\left(\frac{w}{y}\right)^3 \frac{dx}{dp}$

XIII. Am Scheitel, wie bey C 1 F. iſt der Krümmungskreis ein Kreis durch C der mit der krummen Linie die verſchwindende Ordinate PM gemein hat, alſo ſein Durchmeſſer $CO = CP + PO = CP + \frac{PM^2}{CP} = \frac{PM^2}{CP}$ für verſchwindende PM und CP, wenn er endlich ſeyn ſoll, denn da muß $\frac{PM^2}{CP}$ ein endlicher Quotient ſeyn, weil CP verſchwindet. Von dieſem Verfahren den Krümmungskreis zu finden, handeln umſtändlicher Iac. Bernoulli Op. n. 103. art. 22. Io. Bernoulli Lect. Hoſpital. 17; 18; Op. T. III.

XIIII. Wenn p ſich durch x allein ohne y, oder durch y allein ohne x ausdrucken läſſt, wird ſich aus 543; II; z am bequemſten finden laſſen, wenn man nähmlich die gegebene Ordinate oder Abſciſſe ſtatt y oder x ſetzt.

Wäre aber p durch y und x zugleich gegeben, und man hätte eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y; ſo lieſſe ſich aus dieſer Gleichung, mit der, zwiſchen p, x, y, zuſammen genommen, entweder x oder y wegſchaffen, und alſo eine dritte zwiſchen p und x, oder zwiſchen p und y, welches von beyden man wollte erhalten.

Bey jeder algebraiſchen krummen Linie alſo giebt es eine algebraiſche Gleichung zwiſchen p und x.

Man

Man ſetze $\frac{dp}{dx} = q$, ſo iſt bey jeder algebrai- ſchen Linie, q durch x und p gegeben. Wenn man alſo die Gleichung zwiſchen x und y; und die zwiſchen q, x, p, verbindet, ſo erhält man eine zwiſchen q und x;

544. Weil HNK = R (539) ſo iſt HMK = 3R — MHN — $\varkappa$ (G. 13 S. 6. Z.) = 3R — (2R — $\varkappa$) — $\varkappa$ (542) = R, alſo TMH auch eine Tangente des Kreiſes. Folglich fallen beyde Bogen durch M und N; der krummen Linie ihrer und des Krümmungskreiſes ſeiner, inner- halb des Dreyecks MHN (68) und weil dieſes Dreyeck ſich einer geraden Linie MN, unendlich nähert, (532) ſo nähern ſich beyde Bogen ein- ander unendlich. Alſo kann kein Bogen eines andern Kreiſes zwiſchen dem Krümmungskreiſe und der krummen Linie durch M oder N gehen. In dieſer Bedeutung zeigt der Kreis die Krüm- mung der krummen Linie an, wie die Tangente ihre Richtung (G. 41. S. Anm.) Auch ſtimmt damit überein, daß MHD zugleich der Krüm- mungswinkel des Kreiſes und der krummen Linie iſt, wenn beyder gemeinſchaftliche Tangenten MH; NH; ſind, woraus weiter folgt, was ſchon vorhin dargethan worden: daß MHD = $\varkappa$ (96).

545. Der Winkel, den zwo Tangenten an beyden Endpuncten eines Kreisbogens mit einan- der machen, iſt allemahl dem Winkel des Aus-

ſchnittes gleich, wie man leicht überſieht, wenn man MN 27. F. für einen endlichen Kreisbogen annimmt, der K zum Mittelpuncte hätte. Sind alſo zweener Kreiſe Halbmeſſer C; c; und man nimmt auf ihnen Bogen, deren Längen V; v; ſind, ſo verhalten ſich die Winkel der Tangenten an beyden Kreiſen, wie $\frac{V}{C} : \frac{v}{c}$ (G. 44. S. 11. Z.) $= c : C$ wenn $V = v$. Wenn ſich alſo dieſe Winkel in Krümmungswinkel verwandeln, ſo verhalten ſich die Krümmungswinkel bey zwo krummen Linien, oder an zwo Stellen einer krummen Linie, verkehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung; wobey zum voraus geſetzt wird, daß die beyden Elemente, deren Krümmung man ſolchergeſtalt vergleicht, gleich lang ſind.

546. Anm. Man nehme nichts an, als daß MK; NK; Perpendikel auf die Tangenten NH; MH; ſind; ſo iſt $MK = \surd(HK^2 - MH^2)$ alſo $\frac{MK}{HK}$

$$= \surd\left(1 - \frac{MH^2}{HK^2}\right) = 1 - \frac{MH^2}{2HK^2}$$

$$+ \frac{3.MH^4}{8.HK^4} \ldots$$ (46. wenn $m = \frac{1}{2}$) folglich

$$\frac{HK - MK}{HK} = \frac{MH^2}{2HK^2} - \frac{3.MH^4}{8.HK^4} \ldots$$

Wenn nun MH unendlich abnimmt, ſo nähert ſich MHK unendlich einem rechten Winkel, und alſo wird $\frac{MK}{MH}$ unendlich (Trig. 4. Erkl. 2. Zuſ. alſo iſt MK end-

lich,

lich, und folglich auch KH, daher verſchwindet $\frac{MH}{HK}$ oder der Unterſchied zwiſchen HK und MK verſchwindet in Vergleichung mit MK, folglich auch in Vergleichung mit dx; dy; ds; zu denen MH endliche Verhältniſſe hat. Alſo können KH; KM; als zweene Halbmeſſer eines Kreiſes angeſehen werden. Dazu iſt nähmlich bey ein paar Linien nicht genug, daß ihr Unterſchied in Vergleichung mit ihnen verſchwindet, ſonſt wären CM; CN; 22 F. dergleichen, ſondern eine Linie, die in einer andern Lage, wie KM in der Lage, KH, noch ein Halbmeſſer eines Kreiſes ſeyn ſoll, muß ſich nicht verändern, indem ſich ſonſt jede dem Puncte M zugehörige Linie, in eine unterſchiedene dem andern Puncte zugehörige verändert. Linien können alſo als Halbmeſſer eines Kreiſes angeſehen werden, wenn beyder Unterſchied, wie hier HK - MK, ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, wie hier $\frac{MH^2}{2HK}$ iſt. Eben die Schlüſſe laſſen ſich von NK und HK machen, alſo ſind KM; KH; KN; drey Halbmeſſer eines Kreiſes, der der Krümmungskreis ſeyn wird.

Exempel für parallele Ordinaten.

547. Für die Kegelſchnitte iſt aus 524.

$$1 + pp = \frac{\pm 4abx^2 + 4aabx + aabb + 4bb + 4abb}{4.(aabx \pm abxx)}$$

daraus folgt (543. II;) $-(1 + pp)^{3:2} \frac{dx}{dp}$

 $= +$

$$= + \frac{\left(\begin{matrix} \pm 4abxx + 4aabx + aabb \\ + 4bb \quad \pm 4abb \end{matrix}\right)^{3:2}}{2a^3\, bb} = z$$

Die obern Zeichen für die Hyperbel, die untern für die Ellipſe.

Für die Parabel, da a unendlich wird;

$$z = \frac{(aa.(4bx + bb))^{3:2}}{2a^3\, bb} = \frac{(4x + b)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{b}}$$

Für alle Kegelſchnitte iſt $dp = - \frac{b^2\, dx}{4y}$ (524) alſo $z = \frac{4w^3}{bb}$ (543; XIII.)

Für den Scheitel iſt nach 543 XIII; $\frac{yy}{x}$ oder $b + \frac{bx}{a} = b$ alſo $z = \frac{1}{2} b$ oder der Halbmeſſer der Krümmung am Scheitel jedes Kegelſchnittes iſt dem halben Parameter gleich, wie auch der allgemeine Ausdruck für z; wenn $x = 0$, giebt. An dem Mittelpuncte iſt bey der Ellipſe $x = \frac{1}{2} a$ und $z = ((4bb - 4ab).\frac{1}{4} aa + 4ab.(a - b).\frac{1}{2} a + aabb)^{3:2} : 2a^3\, bb$ oder $= a\sqrt{ab} : 2b$

An dem Mittelpuncte der Hyperbel iſt $x = - \frac{1}{2} a$ und der Zähler des Halbmeſſers der Krümmung

mung $= (-2a^3 b)^{3:2}$ unmöglich, weil da nichts von der krummen Linie iſt.

Die Krümmungen der Ellipſe am Scheitel und über dem Mittelpuncte verhalten ſich (545) wie $\frac{a\sqrt{ab}}{2b} : \frac{1}{2} b = a\sqrt{a} : b\sqrt{b} = a^3 : c^3$ (Alg. 366)

548. MB 29 F. ſey eine Tangente an der krummen Linie ML Puncte M; MI aber eine nach Gefallen gezogene gerade Linie, mit der BLEF parallel gehe, und die krumme Linie in L; einen Kreis aber der MG zur Sehne und MB ebenfalls zur Tangente hat, in E und F ſchneide. Nun iſt im Kreiſe $BM^2 = BE.BF$ (Trig. 16. S.) Wenn aber BF mit einer parallelen Bewegung, der MI unendlich nahe rückt, ſo nähert ſich BF unendlich der Gröſſe MG; und da allemahl $\frac{BM^2}{BE} = BF$; ſo wird dieſer Quotient in dem nur erwähnten Falle $=$ MG. Man ſetze, aus der Natur der krummen Linie ſey $\frac{BM^2}{BL} = w$ und w ſey eine ſolche Gröſſe, die ſich in MG verwandele, wenn BLEF der MI unendlich nahe rückt, oder man ſuche den Werth $\frac{BM^2}{BL}$ wenn MB verſchwindet, und nehme MG demſelben gleich. Nach dieſer Vorausſetzung werden die Puncte L und

E ſich einander unendlich nähern, wenn L; E; unendlich nahe an M rücken; das iſt, ein Kreis, der MG zur Sehne hat, wird die krumme Linie ML in M wo er mit ihr einerley Tangente MB hat, dergeſtalt berühren, daß kein anderer Bogen eines andern Kreiſes, durch M, zwiſchen ſeinem Bogen ME und dem Bogen der krummen Linie ML durchgehen kann. Denn thäte dieſes ein Bogen eines andern Kreiſes, ſo ſonderte er die genannten beyden Bogen dergeſtalt ab, daß die Puncte, L in dem einen und E in dem andern, einander nicht ſo nahe als man will, oder unendlich nahe rücken könnten, weil ſie auf verſchiedenen Seiten des Punctes liegen müſſen, in welchem BLEF zwiſchen L und E den andern Kreis ſchneidet; und dieſer Durchſchnittspunct des andern Kreiſes mit BF; kann dem Puncte L nicht unendlich nahe rücken, wo der andere Kreis nicht aus MB; ML; ſo wie der erſte beſtimmt wird, d. i. mit ihm einerley iſt.

Dieſer Kreis alſo, der MB zur Tangente und MG zur Sehne hat, iſt der Krümmungskreis. Er iſt gegeben, denn ſein Mittelpunct K muß ſich in zwo gegebenen Linien befinden; in einem Perpendikel auf die Tangente durch M; und in einem andern, das die Sehne in V halbirt. Weil nun KMV = R − BMG; ſo iſt MK = $\frac{\frac{1}{2}MG}{\sin BMG} = \frac{e}{2m}$ wenn MG = e und ſin BMG

BMG = m. So betrachtet Mac Laurin den Krümmungskreis; Treat on Flux. Chap. XI. Man ſieht leicht, wieviel ähnliches dieſes mit 543 XIII. hat.

Exempel.

549. Dieſes auf die Parabel anzuwenden ſuche man erſtlich die Gleichung für die Parabel, wenn die Abſciſſen auf einen Durchmeſſer (Alg. 462.) genommen werden, und die Ordinaten mit der Tangente am Scheitel des Durchmeſſers, oder dem Orte, wo er die Parabel ſchneidet, parallel gehen. CMN 1 F. ſey eine ſolche Parabel; CO die Axe, b der Parameter für die Axe; MS ein Durchmeſſer, deſſen Weite von der Axe MP = f gegeben iſt. So iſt PT = 2. CP (84) = $\frac{2ff}{b}$ und $MT = \sqrt{(PT^2 + MP^2)} = \frac{f\sqrt{(4ff + bb)}}{b} = \frac{fg}{b}$. Nun ſey N ein willkührlicher Punct der Parabel; durch N gehe eine Linie mit der Tangente MV parallel und ſchneide den Durchmeſſer MS in H; ſo iſt $SH = \frac{NS.PT}{MP} = \frac{NS.2f}{b}$; $NH = \frac{NS.MT}{MP} = \frac{NS\,g}{b}$; ferner $(NS + f)^2 = b.(CP + PQ = b.(CP + MS)$ alſo $\frac{NS^2 + 2f.NS}{b} = MS$; Nun ſey

 MH

$MH = m$; $NH = n$; ſo iſt $m = MS - SH$ $= \frac{NS^2}{b}$; $n = \frac{NSg}{b}$; alſo NS^2 oder $bm = \frac{bbnn}{gg}$ oder $\frac{gg}{b} m = nn$ daß alſo der Parameter für dieſen Durchmeſſer $= \frac{4ff}{b} + b$ iſt.

Nun iſt alſo in (548) MI der Durchmeſſer, $MB = n$; $BL = m$; und $e = \frac{gg}{b} =$ dem Parameter des Durchmeſſers. Ferner ſin $BMG = \frac{MP}{MT}$ der 1. F. $= \frac{b}{g}$ und der Krümmungshalbmeſſer $= \frac{gg}{b} : \frac{2b}{g} = \frac{g^3}{2bb} : \frac{(4b.\ CP + bb)^{\frac{3}{2}}}{2bb}$ wie 547

550. MI ſey die Axe der neiliſchen Parabel, weil für ſie $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ ſo verſchwindet dieſer Quotient, wenn x verſchwindet, und die krumme Linie ſteht im Anfange der Abſciſſen, welches hier M iſt, auf die Axe ſenkrecht. Alſo iſt $m = o$ und MK müſſte in die Axe fallen. Ferner iſt $\frac{MB^2}{BL} = \frac{y^2}{x} = \frac{ax}{y} = a\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ welches für $x = o$

verſchwin-

verſchwindet. Die Sehne MG oder der ihr gleiche Halbmeſſer der Krümmung verſchwinden alſo; das iſt: ſo klein auch der Halbmeſſer eines Kreiſes iſt, den man aus einem in der Axe angenommenen Mittelpuncte durch den Anfang der Abſciſſen M beſchrieben hat, ſo geht doch zwiſchen dieſem Kreiſe und der krummen Linie noch jeder anderer durch, den man aus einem Mittelpuncte in der Axe, mit einem kleinern Halbmeſſer durch M beſchreibt; Es giebt alſo hier eigentlich keinen Krümmungskreis, oder man muß ſagen, ſein Halbmeſſer ſey o oder unendlich klein, wie die unendliche Krümmung daſelbſt erfodert. (529. 545.)

551. Bey der cubiſchen Parabel, wo $y^3 = aax$ iſt; hat man $\frac{y}{x} = \frac{aa}{yy}$ welches für die verſchwindenden Coordinaten unendlich wird, daß alſo wiederum die krumme Linie am Scheitel auf ihre Axe ſenkrecht ſteht. Iſt alſo MB ihre Tangente am Scheitel, ſo iſt $m = 1$ und $\frac{MB^2}{BL} = \frac{yy}{x} = \frac{aa}{y}$ welches für das verſchwindende y unendlich wird. Der unendliche Halbmeſſer der Krümmung zeigt hier eine Krümmung an, die in Vergleichung mit andern Krümmungen unendlich klein iſt. (545)

Für

Für dieſe krumme Linie iſt nach (521); $p = \frac{aa}{3yy}$ und $dp = -\frac{2aady}{3y^3} = -\frac{2a^4dx}{9y^5}$ alſo $\frac{dp}{y} = -\frac{2a^4dx}{9y^6}$ folglich die krumme Linie allemahl gegen die Axe hohl. Da ſie nun für bejahte Abſciſſen nur bejahte, und für verneinte Abſciſſen nur verneinte Ordinaten hat, alſo die Axe im Anfange der Abſciſſen, und zwar erwieſener Maaſſen ſenkrecht ſchneidet, ſo muß ſie, um gegen die Abſciſſe auf beyden Seiten hohl zu ſeyn, im Scheitel einen Wendungspunct haben, wo der Krümmungswinkel in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verſchwindet (532).

Fragen, die mit dem Krümmungskreiſe zuſammenhängen.

552. Die Stelle zu finden, wo eine gegebene krumme Linie die Krümmung eines gegebenen Kreiſes hat, ſetze man z (543) einer gegebenen Gröſſe f, gleich.

Bey der Parabel (547) giebt $\frac{(4x+b)^{3:2}}{2\sqrt{b}} = f$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}bff} - \frac{1}{4}b$. So iſt für die Stelle, wo der Halbmeſſer der Krümmung $= 4b$ iſt, die Abſciſſe $= \frac{3}{4}b$.

553. Die gröſſte oder kleinſte Krümmung findet man, wenn man mit dem Halbmeſſer z; nach

nach 155 verfährt, daß jetzo z heiſſt, was dorten y war. Es ſey für eine Parabel $aay = x^3$; alſo $p = \frac{3xx}{aa}$; $dp = \frac{6xdx}{aa}$; und aus (543; II.) $z = -\frac{(a^4 + 9x^4)^{3:2}}{6a^4x}$. Weil nun das Zeichen — blos die Lage des Halbmeſſers der Krümmung, und daß die krumme Linie gegen die Axe erhoben iſt, angezeigt, (543. X.) ſo ſieht man z als bejaht an, wenn nur von der Gröſſe, nicht von der Lage die Rede iſt, und da iſt folglich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(45x^4 - a^4).\sqrt{(a^4 + 9x^4)}}{6a^4 xx}$$

welches für $x = a : \sqrt[4]{45}$ verſchwindet. Ferner giebt dieſer Ausdruck $\frac{6a^4dz}{dx} = (45x^2 - a^4 x^{-2}).(a + 9x^4)^{\frac{1}{2}}$ weiter differentiirt $\frac{6a^4ddz}{dx^2} = (2a^8x^{-3} + 180a^4x + 1620x^5) : \sqrt{(a^4 + 9x^4)}$ welches bejaht iſt, daß alſo für $x = a : \sqrt[4]{45}$ der Halbmeſſer der Krümmung ein Kleinſtes, und folglich die Krümmung daſelbſt die gröſſte iſt. (155. III) Hätte man den Halbmeſſer verneint behalten, ſo wären ſeine Differentiale verneint geworden, welches zu dem entgegengeſetzten unrichtigen Schluſſe hätte verleiten können.

können. Wiewohl eine kleine Aufmerkſamkeit auch da (nach 153) würde gezeigt haben, daß die Zeichen der Differentiale, welche nach 543 bejahte Kleinſte oder Gröſſte anzeigen, umgekehrt verneinte Gröſſte oder Kleinſte zu erkennen geben.

554. Anm. Aus $y^5 = aax^3$ wird $p = \frac{3}{5} \sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ und $dp = -- \frac{6}{25} dx. \sqrt[5]{\frac{aa}{x^7}}$ alſo $z = \frac{(25 x^{4:5} + 9 a^{4:5})^{3:2}}{30 a^{2:5}}$ und $\frac{dp}{y} = -- \frac{6dx}{25xx}$ alſo die krumme Linie beſtändig gegen die Axe hohl. (521) Weil nun $\frac{y}{x} = \sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ für $x = 0$ unendlich wird, ſo ſchneidet die krumme Linie im Anfange der Abſciſſen die Axe ſenkrecht, und muß alſo da einen Wendungspunct haben, wo alſo der Halbmeſſer der Krümmung nicht $= 0$ ſondern unendlich ſeyn ſollte. (551) Dieſe Schwürigkeit hat Jac. Bernoulli gehoben Act. Er. Lipſ. 1697. Sept. oder Op. n. 76.

Exempel zu 543 bey Ordinaten aus einem Puncte.

555. Für die archimediſche Spirale iſt (543. I. und 530) $z = \frac{(rr + xx)^{3:2}}{(2rr + xx). 2\pi}$

556. Für die logarithmiſche Spirale, (510) iſt $\frac{ydx}{r} = mdy$; alſo $ds = dy. \sqrt{(1 + mm)}$. folglich nach 543 VIII. $z = \frac{y\sqrt{(mm + 1)}}{m}$

Halb-

Halbmeſſer der Krümmung für die Radlinie.

557. I. Weil für ſie 7. F. der Bogen FL = LP (Alg. 610.) ſo muß man ſuchen dieſe Eigenſchaft durch eine Differentialgleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten auszudrucken, da es keine algebraiſche geben kann. Es ſey FM = x; MP = y; ſo iſt y − ML = FL alſo dy = dFL + dML; Dieſe letzten beyden Differentiale aber finden ſich durch x aus der Natur des Kreiſes. Wenn FE = 2r; ſo iſt $LM^2 = 2rx - xx$

alſo $dLM = \frac{(r-x)\,dx}{LM}$ und $\sqrt{(dx^2 + dLM^2)}$

oder $dFL = \frac{r\,dx}{LM}$; alſo iſt die Gleichung für die

Cycloide $dy = \frac{(2r - x)\,dx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$; daraus giebt ſich

alſo $\frac{dy}{dx}$ oder p; und ferner $1 + pp = \frac{4rr - 2rx}{2rx - xx}$

und $dp = \frac{r.(x - 2r)}{(2rx - xx)^{3:2}}$ und z =

$\frac{(4rr - 2rx)^{3:2}}{r.(2r - x)} = 2\sqrt{(4rr - 2rx)}$ = der

doppelten Sehne LE.

II. Für x = 0 oder bey F iſt z = 4r; Aber für x = 2r; oder bey A verſchwinden zugleich Zähler und Nenner dieſes Ausdruckes: Alſo nach

(374)

(374) der Werth von z für dieſes x; — $3 . \surd (4rr - 2rx) = 0$; und die Krümmung bey A unendlich.

$$558. \tan Pqm = \frac{Mm}{dPM} = \frac{dx}{dFL - dML}$$

Die Tangente des Winkels Ppm den die Radlinie in p mit der Ordinate pm macht, iſt $\frac{dx}{dy}$ $= \frac{\surd (2rx - xx)}{2r - x}$. Für $x = 2r$ giebt dieſes $\frac{0}{0}$; wo auch noch zweifelhaft ſeyn könnte, ob ſich dieſer Ausdruck für $\frac{dx}{dy}$ daſelbſt anbringen lieſſe, weil LM da verſchwindet: Ich betrachte daher die Sache ſo: Es iſt überhaupt $\tan Ppm = \frac{Mm}{Ll + lm - LM}$. Nun ſey $x = 2r - e$ wo e unendlich abnehmen mag. So iſt für jedes e; $LM^2 = 2re - ee$. Wenn nun e unendlich abnimmt, ſo wird $pm = AE$; und $lm = 0$ und PM ſtellt die nächſte Ordinate der Ordinate der Radlinie über AE vor; wie LM die verſchwindende Ordinate des Kreiſes, die zunächſt über dem Puncte E befindlich iſt, wo die Ordinate des Kreiſes $= 0$ iſt; alſo verwandelt ſich Mm in e; und $lm - LM$ in $- LM$ und da überhaupt $Ll^2 = Mm^2 + (lm - LM)^2$ iſt,

ſo

ſo wird hier $Ll^2 = ee + LM^2 = 2re$ Ferner

$LM = \sqrt{2re} - \frac{ee}{2\sqrt{2re}} \ldots$ wo die folgenden Glieder höhere Potenzen von e enthalten; alſo der Nenner der tang Ppm oder $Ll - LM$

$= \frac{ee}{2\sqrt{2re}} \ldots$ und folglich tang $Ppm = e :$

$\left(\frac{e\sqrt{e}}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$ ſo daß die folgenden Glieder des Diviſors immer höhere Potenzen von e enthalten; alſo tang $Ppm = 1 : \left(\frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$

das iſt unendlich, wenn e verſchwindet. Alſo macht die Radlinie mit AE einen Winkel, der unendlich wenig von einem rechten unterſchieden iſt. Eben ſolche Winkel machen auch alle Kreiſe, die aus Mittelpuncten in AE durch A beſchrieben werden. Aber jeder von dieſen Kreiſen, ſo nahe man auch ſeinen Mittelpunct bey A nimmt, iſt weniger krumm als die Radlinie. (557) Alſo gehen alle dieſe Kreiſe, ſo klein man auch ihre Halbmeſſer annimmt, zwiſchen ihrer gemeinſchaftlichen Tangente und der Radlinie durch, oder die Radlinie iſt da krümmer als jeder Kreis, und macht mit der daſigen Tangente einen gröſſern Berührungswinkel als irgend ein Kreis mit der ſeinigen machen kann, obgleich auch ihr Berüh-

rungswinkel unendlich klein iſt. Man ſ. von dergleichen Berührungswinkeln Newton Method of Flux. Prob. V. art. 39.

Rectification der Radlinie, Gleichung zwiſchen ihrer Abſciſſe und ihrem Bogen; und Quadratur eben dieſer Linie.

559. I. Aus dem Werthe von dy (557) folgt $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ oder $ds = \sqrt{2r} . x^{-\frac{1}{2}} . dx$; alſo $s = 2\sqrt{2rx}$ oder $ss = 8rx$; Wo s den Bogen FP bedeutet, der für $x = 0$ verſchwindet, oder ſich gerade über dem Puncte E der die Grundlinie (Alg. 602.) halbirt, in dem Puncte F anfängt, der um des beſchreibenden Kreiſes (Alg. 602.) Durchmeſſer $FE = 2r$ über der Grundlinie erhoben iſt.

Chriſtoph Wrenn, hat zuerſt die Vergleichung der Bogen der Radlinie mit einer geraden Linie gefunden. Phil. Tranſ. n. 98; Nou. 17; 1763.

Es war die erſte gegebene Linie, die rectificirt ward. Neil (269) ſuchte eine Linie die ſich rectificiren ließ Ph. Tr. a. a. O.

II. Für $x = 2r$ iſt der Bogen der halben Cycloide, $FA = 4r =$ dem vierfachen Halbmeſſer des beſchreibenden Kreiſes.

III. PMmp als das Differential der Fläche iſt $= (FL + LM) dx$; Nun iſt FL: Bogen $\sin \frac{LM}{r} = r : 1$ (Trig. 19. S. Anm. u. 1. S.)

alſo

alſo FL $= r.$ 𝔅 ſin $\frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{r}$ welches ich $= rq$ ſetzen will. So iſt das Element der Fläche $= rqdx + LMdx$. Das Integral des letzten Theiles oder $\int LMdx$ iſt $FLM = \frac{1}{2} r. FL \frac{(r-x). LM}{2} = \frac{1}{2}. r. r.$ 𝔅 ſin $(LM : r) - \frac{1}{2} (r - x). LM$ das Integral des erſten Theiles oder $\int rqdx$ ſey $= rqx + rt$ ſo iſt, wenn man auf beyden Seiten differentiirt $dt = - xdq = - \frac{xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ (281) $= \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx - xx)}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ alſo $t = LM - r.$ 𝔅 ſin $(LM : r)$; folglich das völlige Integral, ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwindet, oder die Fläche $FMP = \int rqdx + \int LMdx = rq. (x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2} LM. (r + x) = FL. (x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2}. LM. (r + x)$.

IIII. Dieſes giebt für $x = 2r$; die Fläche $FEA = FLE. \frac{3}{2} r =$ dem Dreyfachen des Halbkreiſes FLE. Die ganze Fläche der Radlinie iſt alſo dreymahl ſo groß als die Fläche des Kreiſes, der ſie beſchreibt.

V. Man ziehe durch F; P; Parallelen mit EA; EF; die einander in G begegnen; ſo iſt $FMPG = xy$ wo y aus 557. bekannt iſt; davon FMP (III) abgezogen läſſt den Raum $FGP = \frac{1}{2}.$

(r. FL — (r — x). LM) = dem Abſchnitte FLM. Wenn alſo FG verlängert wird, bis ſie einer Parallele durch A mit EF begegnet, ſo ſchlieſſen dieſe beyden Parallelen mit APE einen Raum ein, der der Fläche des Halbkreiſes FLE gleich iſt.

VI. Wenn $x = \frac{1}{2} r$ iſt $LM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ und der Bogen FL = 60 Gr; und der Raum FMP $= \frac{3rr\sqrt{3}}{8}$. Man ziehe die Sehne FL ſo iſt $\Delta FLM = \frac{rr\sqrt{3}}{8}$ das Dreyeck aber, das ein paar Linien aus des Kreiſes FLE Mittelpuncte, mit der Sehne FL machen, hat zu ſeiner Höhe (die Sehne für die Grundlinie angenommen,) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$; und alſo zum Innhalte $\frac{rr\sqrt{3}}{4}$ $= 2\Delta FLM$. Folglich iſt dieſes Dreyeck zwiſchen den beyden Halbmeſſern und der Sehne, ſo groß als der Raum FMP — ΔFML oder als der Raum zwiſchen der Sehne, der geraden Linie FL, und der krummen FP.

VII. Wenn man von FMP den Abſchnitt FML abzieht, ſo bleibt für den Raum zwiſchen den Bogen FL und FP; und der geraden Linie PL, der Werth, $FL.(x - r) + LM.r$. Dieſer Raum wird alſo $= rr$ für $x = r$.

VIII.

VIII. Wie alſo die Räume der Cycloide überhaupt betrachtet durch die Quadratur des Kreiſes müſſen gefunden werden, ſo giebt es unter jeden der beyden Arten (IIII; VII) einen, der algebraiſch gegeben iſt.

VIIII Anm. Von ſolchen krummen Linien, wo die unbeſtimmte Quadratur überhaupt tranſcendentiſch iſt, für eine gewiſſe Stelle aber einen algebraiſchen Raum giebt, handelt umſtändlicher Joh. Bern. Lect. Hoſp. 4; 5; 6; das hier Gelehrte, welches Hugen bey der Cycloide bemerkt hat, iſt eben daſelbſt Lect. 25. allgemeiner von krummen Linien, deren die gemeine Cycloide eine einzige Art iſt erwieſen.

X. Anm. Die Geometern heiſſen **Monden** (lunulas) einen Raum, der zwiſchen zween Bogen krummer Linien enthalten iſt, da eine ihre erhabene Seite der Höhlung der andern zukehrt, wie hier der Raum zwiſchen den Bogen FPA und FLE wäre, den man mit Kraſten Comm. Ac. Petrop. T. VI. p. 156. einen offenen Mond und wenn die krummen Linien einander zweymahl über einer gemeinſchaftlichen Sehne ſchnitten, einen geſchloſſenen nennen könnte. Hippocrates aus Chios hat einen ſolchen Mond zwiſchen Kreisbogen quadrirt, es hilft aber dieſe Erfindung nichts zur beſtimmten oder unbeſtimmten Quadratur des Kreiſes. Krumme Linien zu finden, deren Monden ſich quadriren laſſen, hat Kraft a. a. O. allgemein gelehrt. Von Monden zwiſchen Kreisbogen, meine geometriſchen Abhandlungen, II. Sammlung 16 Abh.

Wie die Veränderung der Krümmung gemeſſen wird.

560. Wenn man die Differentiale zweener Halbmeſſer der Krümmung an zwo von einander

entfernten Stellen der krummen Linie mit einander vergleicht, ſo ſieht man, wie vielmahl ſchneller ſich die Krümmung an einer Stelle als an der andern ändere. Es wird aber jeder Halbmeſſer von dem ihm nächſten, mehr oder weniger unterſchieden ſeyn, nachdem die Puncte der krummen Linie, zu denen dieſe beyden nächſten Halbmeſſer gehören, weiter von einander oder näher beyſammen ſind; und alſo beſtimmt die Entfernung dieſer Puncte, d. i. ds oder dx oder dy, das Differential des Halbmeſſers von jeder Stelle. Um alſo die Vergleichung gehörig anzuſtellen, ſo könnte man ds oder dx oder dy veränderlich ſetzen. Man kann aber die Vergleichung ſo anſtellen, daß man den Quotienten $\frac{dz}{ds}$ für zwo Stellen der krummen Linie ſucht. Dieſer zeigt an, wie ſich die Veränderung des Halbmeſſers der Krümmung an jeder Stelle, zu der Veränderung des Bogens der krummen Linie verhält, und dient alſo die Verhältniſſe der Veränderung der Krümmung zur Veränderung des Bogens an zwo Stellen mit einander zu vergleichen, und zu ſehen, ob ſie ſich gleichförmig oder ungleichförmig, ſchnell oder langſam ändert. Newton Meth. of flux. Prob. VI. nennt dieſes die Beſchaffenheit der Krümmung (qualitatem curuaturae).

Exem-

Exempel.

561. Bey der Parabel iſt aus 547; $dz = 3\sqrt{\frac{4x+b}{b}} \cdot dx$; $ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+b}{x}}$ folglich $\frac{dz}{ds} = 6\sqrt{\frac{x}{b}}$. Die beyden Werthe dieſes Quotienten für Abſciſſen die ſich wie $\frac{1}{2}$ und 2; verhalten, verhalten ſich wie die Wurzeln aus $\frac{1}{2}$ und 2 das iſt, wie 1 : 2 alſo verändert ſich die Krümmung bey der erſten Abſciſſe halb ſo ſchnell als bey der zweyten, die viermahl ſo groß iſt.

562. Bey der logarithmiſchen Spirale (556) kömmt $\frac{dz}{ds} = \frac{1}{m}$ alſo verändert ſich ihre Krümmung überall gleichviel, oder wie Newton ſagt, ihre Krümmung iſt gleichförmig ungleichförmig (aequabiliter inaequabilis); eben wie die Bewegung fallender Körper gleichförmig ungleichförmig iſt.

Von der Evolution.

563. **Erkl.** Ein vollkommener biegſamer Faden, ſey um die erhabene Seite der krummen Linie ACQ 30F. gewunden, wobey ich annehme, daß dieſer Bogen der krummen Linie beſtändig nach einer Seite zu hohl, nach der andern erhaben iſt, und keinen Wendungs- oder Rückkehr-

 punct

punct hat; Nun winde man den Faden dergeſtalt ab, daß das Theil von ihm, das nicht mehr um die krumme Linie liegt, wie CE; in eine gerade Linie ausgeſpannt iſt. So beſchreibt der Endpunct des Fadens eine krumme Linie AEM; welche man aus der Abwickelung der Linie ACQ erzeugt (ex euolutione genitam) wie ACQ die abgewickelte oder Evolute (euolutam) nennt.

564. Zuſ. Der Faden berührt in jeder Lage CE die Evolute ACQ; und die gerade Linie CE iſt dem Bogen AC der Evolute gleich.

565. Lehrſ. Der Linie AEM Tangente an E, ſteht auf CE (564) ſenkrecht.

Bew. E; M; ſollen zwo Stellen der Linie AEM ſeyn, welchen die Lagen des Fadens CE; QM zugehören, die einander in N ſchneiden. Weil der Faden in beyden Lagen die Evolute berührt, (564) und die Evolute beſtändig nach einer Seite hohl iſt, (563) ſo iſt der Bogen CQ gegen die geraden Linien CN; QN; erhoben, und fällt zwiſchen ſie und ſeine Sehne (70). Man ziehe des Bogens EM Sehne, und ſuche den Winkel NEM; dieſer Winkel, für den Fall, da ſich E und M, folglich auch C und Q einander unendlich nähern, iſt der Winkel der Tangente bey E; mit CE; (68).

Alſo ſey der Bogen AC oder die gerade Linie EC = u; der Bogen AQ oder die gerade Linie QM = u + e; Ferner CN = f; QN = g;
und

und die Sehne EM = k; ſo iſt EN = u + f; MN = u + e − g; und (Trig. 20. S.) Coſ

$$NEM = \frac{(u+f)^2 + kk - (u+e-g)^2}{2(u+f).k}.$$

Der Zähler hievon wird 2u. (f + g − e) − $(e-g)^2$ + ff + kk. Wenn ſich nun Q und C einander unendlich nähern, ſo nähert ſich die Summe f + g unendlich der Sehne CQ (532) das iſt, dem Bogen CQ oder e; alſo f unendlich dem Werthe e − g; und der Zähler unendlich dem Werthe kk und 2 (u + f). k unendlich dem Werthe 2uk und der Coſinus unendlich dem Werthe $\frac{k}{2u}$, das iſt, einem verſchwindenden Werthe, alſo CEM einem rechten Winkel.

566. Wenn man aus jedem gegebenen Puncte E; der Linie AEM eine Tangente ihrer Evolute, EC; ziehen kann, ſo darf man nur auf CE in E ein Perpendikel ſetzen, um die Tangente der Linie AEM in E zu haben.

567. Wenn E und M ſich einander unendlich nähern, ſo wird N der Mittelpunct der Krümmung für EM; (546) aber N fällt in den Bogen CQ (565) alſo iſt die Evolute der geometriſche Ort (Alg. 697) aller Mittelpuncte der Krümmung für AEM.

568. Wenn ME; CQ; auch endliche Bogen und CK; QK; Perpendikel auf die Lagen

 des

des Fadens ſind, ſo iſt K = 2R — CNQ (S. 13. S. 6. Z.) = ENM; oder zwo Normallinien, an zwo willkührlichen Stellen E; M; der Linie AEM; machen eben den Winkel, den zwo Normallinien an den beyden jenen zugehörigen Stellen C; Q; der Evolute ACQ machen. Das heiſſt, die zuſammengehörigen Bogen der Evolute und der Linie AEM; haben einerley Weite (amplitudinem).

569. Wenn die Puncte M; E; und folglich auch Q; C; unendlich nahe zuſammen rücken, ſo verwandeln ſich, EM in ds; EN oder EC in den Halbmeſſer der Krümmung für E (546) den ich wie (543) z nenne; CQ oder MQ — EC in dz; (567) CK in den Halbmeſſer der Krümmung der Evolute bey C der w heiſſen mag. Alſo iſt $\frac{ds}{z} = \frac{dz}{w}$ (568) oder $\frac{w}{z} = \frac{dz}{ds}$ = dem Maaſſe der Veränderung der Krümmung (560) die Veränderung der Krümmung jeder Linie AME, bey E; verhält ſich alſo wie die Tangente des Winkels CEK wenn C der zu E gehörige Punct ihrer Evolute, und K der Mittelpunct der Krümmung der Evolute bey C iſt.

569. Der Faden kann beym Anfange der Abwickelung, in A, ſchon eine beſtimmte Länge haben, wie AF 31 F. wo er doch AC berühren muß; Alsdenn iſt CE = dem Bogen AC + AF. In der 30 F. iſt AF = o.

570.

570. Aufg. Aus der Gleichung für die Linie FE 31 F. die für ihre Evolute zu finden.

Aufl. Man ziehe beyder gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie DL und nehme rechtwinklichte Coordinaten der Linie FE; DB = x; BE = y; zwiſchen denen die Gleichung gegeben iſt: der Evolute AC; DL = v; LC = t; zwiſchen denen die Gleichung geſucht wird. Ferner ſey EC = z; EO = w. Nun iſt EO: EB = EC; EB + LC alſo $y + t = \frac{zy}{w}$ und $t = \frac{z - w}{w} \cdot y$ (A) Ferner EO: OB = EC: BL oder $v - x = \frac{z. py}{w}$ (B) Aus der Gleichung für αE nun, ſind w; p; z; durch x und y gegeben; alſo läſſt ſich (B) auf eine Geſtalt (C) bringen, wo ſie nichts veränderliches als x; y; v; t; enthält. Aus (C) mit der Gleichung für αE verglichen, läſſt ſich y wegſchaffen, und eine Gleichung (D) machen, die nichts veränderliches als x; v; t; enthält. Eben ſo läſſt ſich aus (A) mit der Gleichung für αE verglichen, y wegſchaffen, und eine Gleichung (E) finden, die nur v; t; x; enthält, aus E mit D verglichen, läſſt ſich endlich x wegſchaffen, und eine Gleichung F zwiſchen v und t finden.

570. Jeder algebraiſchen Linie Evolute iſt algebraiſch.

571. Weil die Länge des Bogens der Evolute AC = z + c iſt, und z ſich bey jeder algebraiſchen

braiſchen Linie algebraiſch finden läſſt, (543) ſo läſſt ſich die Evolute jeder algebraiſchen Linie, unbeſtimmt rectificiren; und man kann alſo unzählich viel algebraiſche Linien finden, die ſich rectificiren laſſen.

572. Aber umgekehrt wird FE nicht algebraiſch ſeyn, wenn ſich die Evolute nicht algebraiſch rectificiren läſſt, ob ſie gleich algebraiſch iſt. Denn jeder algebraiſchen Linie Tangente iſt der Lage nach algebraiſch gegeben. Iſt alſo CE eine ſolche Tangente, und gäbe es eine algebraiſche Gleichung zwiſchen DB und BE ſo iſt der Punct E, folglich die Länge CE; folglich der ihr gleiche Bogen AC; algebraiſch gegeben.

Exempel zu 570; 571;

573. Die Evolute der Parabel zu finden, D ſey der Scheitel der Parabel, oder F 31 F. ſo iſt nach 547; $z = \frac{(4x + b)^{3:2}}{2\sqrt{b}}$; $py = \frac{1}{2}b$; $w = \frac{1}{2}\sqrt{b}.\sqrt{(b + 4x)}$ alſo (D) $v - x = \frac{4x + b}{2}$ oder $v - \frac{1}{2}b = 3x$; (E) $t = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{b}}$ alſo $16x^3$ oder $btt = \frac{16.(v - \frac{1}{2}b)^3}{27}$ und für $FA = \frac{1}{2}b$ iſt $t = 0$; Nennt man alſo die Abſciſſen $AL = r$ ſo iſt $r = v - \frac{1}{2}b$ und $\frac{27}{16}btt = r^3$ oder die Evolute der apolloniſchen Para-

Parabel, iſt eine neiliſche (268) rectificirte; deren Parameter $\frac{27}{16}$ des Parameters der apolloniſchen iſt. Wegen $t = \pm \frac{2}{3} r \sqrt{(r : 3b)}$ hat ſie ähnliche Hälften eine unter die andere über der Axe AL; deren jede abgewickelt eine Hälfte der Parabel über und unter der Axe giebt. Daß $FA = \frac{1}{2} b$ rührt daher, weil der apolloniſchen Parabel Krümmungshalbmeſſer am Scheitel ſo groß iſt (547).

574. Suchte man die Evolute eines Kreiſes vom Halbmeſſer r, ſo wäre $z = r = w$; alſo (570) $t = 0$; und $py = r - x$; alſo $v - x = r - x$ oder $v = r$; die Evolute verwandelt ſich nähmlich hier in des Kreiſes Mittelpunct.

575. Aufg. **Wenn die Evolute AC 31 F. gegeben wird und die Länge des Fadens CE allemahl CA + AF (569) iſt, die krumme Linie FE zu finden.**

Aufl. Es ſey $AF = c$; $AL = r$; $LC = t$; $FB = x$; $BE = y$; $CE = s + c$; So iſt OL $= \frac{tdr}{dt}$ (564; 77) und $OC = \sqrt{(OL^2 + LC^2)}$ $= \frac{tds}{dt}$; und $\frac{CE.\ LC}{OC}$ oder $EH = \frac{(s + c)\,dt}{ds}$ Folglich EB oder (M) $y = \frac{(s + c)\,dt}{ds} - t$ und BL oder $CH = \frac{EC.\ OL}{OC} = \frac{(s + c).\,dr}{ds}$ folglich

FA

FA + AL − BL oder FL − BL oder (N) $x = c + r - \frac{(s+c)\,dr}{ds}$. Iſt nun die Glei⸗chung für die Evolute gegeben, ſo iſt $\frac{dr}{ds}$ durch r und t; gegeben; und läſſt ſich die Evolute recti⸗ficiren, ſo iſt s auch durch r und t gegeben: In jeder der beyden Gleichungen (M); (N) bleiben alſo vier veränderliche endliche Gröſſen x; y; r; t; aus (M) mit der Gleichung für die Evolute verbunden läſſt ſich t wegſchaffen und eine Glei⸗chung (O) machen, die nur y; x; r; enthält: Eben eine ſolche Gleichung (P) läſſt ſich aus (N) mit der Gleichung für die Evolute verbunden ma⸗chen; und aus (O) und (P) verbunden, läſſt ſich r wegſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen x y finden. Dieſes aber geht nicht an, wenn nicht s ſich durch r; t; ausdrucken läſſt. (572)

576. Ex. Die Linie FE zu finden, die aus Abwickelung der neiliſchen Parabel entſteht, wo $ftt = r^3$;

Hier iſt $t = \frac{r^{3:2}}{f^{1:2}}$ alſo $\frac{dt}{dr} = \frac{3\,r^{1:2}}{2\,f^{1:2}}$ und $ds = dr.\sqrt{\left(1 + \frac{9r}{4f}\right)}$ alſo wie in 268; $s = \frac{1}{27}.(4f + 9r).\sqrt{\left(4 + \frac{9r}{f}\right)} - \frac{8}{27}\,f$ und (M)

y =

$y = (s + c) . 3 \surd \frac{r.}{4f + 9r} - t$; (N); $x = c$ $+ r - \frac{(s + c) . 2 \surd f}{\surd (4f + 9r)}$, wo man noch den Werth von s an ſeine Stelle ſetzen muß. Es erhellet alſo, daß verſchiedene krumme Linien herauskommen, nachdem c von anderer und anderer Gröſſe angenommen wird. Iſt $c = \frac{8}{27} f$ ſo kömmt y $= \frac{1}{27} . \frac{(4f + 9r)^{3:2}}{\surd f.} . \frac{3 \surd r}{\surd (4f + 9r)} - t = \frac{1}{9}$. $(4f + 9r) . \surd \frac{r}{f} - t = \frac{4}{9} \surd fr$; und $x = \frac{1}{3}$ r woraus man die Gleichung für die apolloniſche Parabel (573) erhält, daß $b = \frac{16}{27} f$. In andern Fällen kommen mehr zuſammengeſetzte Linien heraus.

577. I. AC ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= e$; und $2er - rr = tt$. Die Linie, welche durch Abwickelung des Kreiſes entſtehet, läſſt ſich folgendergeſtalt leicht verzeichnen: An den Punct C des Kreiſes, deſſen Bogen AC iſt, ziehe man eine Tangente CE; und nehme CE = c + dem Bogen AC; ſo iſt E in dieſer Linie. Weil nun $\frac{e - r}{t} dr = dt$; und $\frac{edr}{t} = ds$ ſo iſt (M)

$$y = \frac{(s + c) . (e - r)}{e} - \surd (2er - rr); \text{ (N)}$$

$x = c$

$x = e + r - (s + c) . \frac{\sqrt{(2er - rr)}}{e}$ Gäbe es nun eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y; ſo lieſſe ſich aus derſelben mit (M) vereinigt eine zwiſchen x; s; r; und aus dieſer leztern mit (N) vereinigt eine zwiſchen s und r machen, wieder (Alg. 616.)

II. ACQ 30 F. ſey ein Kreisbogen um den Mittelpunct K; aus deſſen Abwickelung AEM entſtehe, wo $c = o$; der Bogen AC ſey $= w$; und $CQ = dw$; ſo kann man nach (567) EM als einen Kreisbogen anſehen, der C zum Mittelpuncte hätte, und das Maas des Winkels N $= CKQ$ (568) wäre. Alſo iſt $\frac{EM}{w} = \frac{dw}{e}$. Daraus folgt $AM = \frac{ww}{2e}$; auch iſt das unendlich kleine Dreyeck $MNE = \frac{1}{2} w . \frac{wdw}{e}$ folglich die Fläche zwiſchen der geraden Linie QM, und den Bogen, AM der abgewickelten Linie, und AQ des Kreiſes, $= \frac{w^3}{6e}$ Für $w = 2e\pi$ wo $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange iſt; giebt ſich die Länge der durch die Abwickelung des ganzen Kreiſes entſtandenen krummen

Linie

Linie $= \frac{4ee\pi\pi}{2e} = 2e\pi\pi$ oder ſie iſt die dritte Proportionallinie zum Durchmeſſer und zum Umfange des Kreiſes, von dem ſie entſteht, oder auch, ſie iſt $2e\pi.\pi$, dem halben Umfange eines Kreiſes gleich, deſſen Halbmeſſer $2e\pi$, der Umfang des vorigen Kreiſes, als der letzte Krümmungshalbmeſſer der Linie AEM wäre. Dieſes neuen Kreiſes Fläche wäre $2e\pi.\ 2e\pi\pi = 4ee\pi^3$, dreymahl ſo groß als $\frac{8e^3\pi^3}{6e}$ die Fläche zwiſchen der ganzen aus der Abwickelung entſtandenen Linie, ihren letzten Krümmungshalbmeſſer, und dem abgewickelten Kreiſe.

III. Weil ein unendlicher Faden unzählich vielmahl um den Kreis könnte seyn gewickelt geweſen, ſo läſſt ſich dieſe Abwickelung unzählich vielmahl wiederhohlen, daß jedesmahl ein neues Stück der abgewickelten Linie herauskömmt. Sie windet ſich alſo nach Art einer Spirallinie unzählich vielmahl um den Kreis herum, woraus ebenfalls erhellt, daß ſie tranſcendentiſch iſt. (Alg. 577.)

IIII. Ich habe dieſes Exempel angeführt zu zeigen, wie leicht ſich oftmahls Quadraturen und Rectificationen durch die Abwickelung finden laſſen, die ſonſt viel ſchwerer zu entdecken wären. Ein anderes hieher gehöriges Exempel nächſt dieſem giebt Joh. Bernoulli Lect. Hoſp. 20.

Methode die krummen Linien zu finden, die ihren Evoluten ähnlich ſind.

578. **Erkl.** Wenn F; A; und E; C; 31 F. zwey Paare zuſammengehöriger Puncte ſind, daß nähmlich F; E; die Endpuncte der Tangenten AF; und CE = FA + AC ſind; und wenn ſich alsdenn die Halbmeſſer der Krümmung bey F; A; beſtändig wie die bey E; C; oder allemahl wie 1 : n verhalten, ſo heiſſt die krumme Linie FE; ihrer Evolute AC; ordentlich ähnlich (directe ſimilis) und 1 : n die Verhältniß der Aehnlichkeit.

579. Der Halbmeſſer der Krümmung bey E ſey = r; ſo iſt der bey C = nr; des Bogens FE Element ſey = ds; alſo der Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreiſes $= \frac{ds}{r} =$ dem Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreiſes bey C (568) alſo iſt der Kreisbogen, welcher dieſen letzten Winkel miſſt, oder des Bogens AC Element $= \frac{ds}{r} \cdot nr = nds$ und der Bogen AC = ns + Conſt.

580. Lehnſatz. Alle ähnliche krumme Linien laſſen ſich als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten anſehen, weil ſich ihre Bogen

Bogen Elementen, die proportionirt ſeyn und gleiche Winkel machen müſſen, unendlich nähern. (68) Alſo ſind bey allen ähnlichen krummen Linien, gerade Linien proportionirt, die auf ähnliche Art wie Alg. 387. beſtimmt, oder nach ähnlich liegenden Puncten (G. 39 S.) gezogen werden; und ähnlich beſtimmte Paare von Linien, machen gleiche Winkel.

581. Erkl. Der Linie AMB 32. F. Evolute ſey bma; ſo daß A; M; B; und b; m; a; zuſammengehörige Puncte ſind. Verhalten ſich nun die Halbmeſſer der Krümmung bey A und B; wie die bey a und b; das iſt, verkehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung an den zugehörigen Puncten der Evolute, ſo heiſſt AB ihrer Evolute verkehrt ähnlich. Die Theile nähmlich, die einander ähnlich ſind, liegen in der Linie, die aus der Abwickelung entſtanden iſt, von A nach B; und in der Evolute von a nach b; das iſt, von dem Puncte, der A zugehört, nach demjenigen welcher B zugehöret.

582. Zuſ. Wenn AC; BC; bc; ac; die Normallinien an den zuſammengehörigen Puncten ſind, ſo iſt ACB = bca (568) und AC; BC = ac; bc (580).

584. Wenn M; m; ein paar andere zuſammengehörige Puncte ſind, und die Normallinie bey m; ac in n ſchneidet, ſo wird ſie verlängert, bc unter einem Winkel = ANM ſchneiden (568).

Aber an dem Dreyecke das ſie ſolchergeſtalt mit nc und der Verlängerung von bc macht, iſt ben ein äuſerer Winkel, und der Winkel dieſes Dreyecks bey n iſt ſeinem Scheitelwinkel, anm gleich: Folglich iſt der Winkel unter dem ſie bc ſchneidet = bca — anm welches alſo = ANM ſeyn muß; Da nun bca = BCA (582) ſo iſt ANM + anm = BCA.

584. Mit dem Puncte M in AMB, habe μ in aμb eine ähnliche Lage, oder es verhalten ſich die Bogen AM : AB = aμ : ab : $\mu\nu$ ſey die Normallinie bey μ; ſo iſt, weil die beyden Normallinien $\mu\nu$; aν; auf ähnliche Art mit den beyden MN; AN; beſtimmt werden, wegen der Aehnlichkeit der Bogen aμ; AM; a$\nu\mu$ = ANM (580) alſo a$\nu\mu$ + anm = ACB (582).

585. Weil ab beſtändig nach einer Seite hohl iſt; (563) ſo machen die Normallinien aufangs nahe bey a ganz kleine Winkel mit ac; die nachgehends bis an die Gröſſe acb wachſen: da ſich nun dieſe Winkel wie alles übrige nach dem Geſetze der Stetigkeit ändern, ſo giebt es einen efa = $\frac{1}{2}$ acb wo E; e; zuſammengehörige Puncte ſind. Wenn man ſich alſo vorſtellt, daß die Normallinie mn in dieſe Lage ef komme, ſo wird mna = $\frac{1}{2}$ acb = $\mu\nu$a (584) alſo muß $\mu\nu$ entweder ihr parallel, oder mit ihr einerley ſeyn: das erſte findet nicht ſtatt; denn weil die Normallinien bey a und b in c zuſammenſtoſſen, ſo

ſind

ſind die Tangenten bey a und b nicht parallel, und weil der Bogen a b ſtets nach einer Seite hohl iſt, ſo können zwiſchen a und b keine parallelen Tangenten, alſo auch keine parallelen Normallinien vorkommen; Alſo fallen μ und m zuſammen; oder die Puncte E; e welche bey der Abwickelung zuſammengehören, haben in ihren Bogen auch ähnliche Lagen, und es iſt $AE : AB = ac : ab$. Alle andere Puncte aber als die beyden E; e; werden ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie nicht zugleich zuſammengehörig und ähnlich liegend ſind. So ſind M und m zuſammengehörig, aber M und μ ähnlich liegend.

586. Wenn e f von den Normallinien an m und μ, in r und ϱ geſchnitten wird, ſo iſt $frn = efa - mna = \frac{1}{2} acb - mna$ $\nu\varrho f = \mu\nu a - efa = \mu\nu a - \frac{1}{2} acb$ alſo $frn - \nu\varrho f = acb - (\mu\nu a - mna) = 0$ oder $erm = e\varrho\mu$; oder die Bogen $e\mu$; em haben gleiche Weite.

587. $AFE + afe = ACB$ (583) $afe = \frac{1}{2} acb$ (585) $= \frac{1}{2} ACB$ (582) alſo $AFE = \frac{1}{2} ACB = afe$.

588. Lehnſatz. Aufg. Wenn ein Bogen, deſſen Halbmeſſer = 1; die Länge $\int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}}$ iſt; zum Sinus z; zum Coſinus ζ hat, die Integrale von $z\,ds$ und $\zeta\,ds$ zu finden.

Aufl. I. Weil $\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$ (281) ſo iſt $zds = -\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}.\, d\sqrt{(1-zz)}$ Man ſetze $\int zds = -\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}.\sqrt{(1-zz)}+q$; ſo kömmt, wenn man auf beyden Seiten differentiirt, und was ſich aufhebet wegläſſt;

$$dq = \frac{\beta sds.\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}} = \beta sdz \text{ folglich } q =$$

$\beta sz + r$ wo nach einem ähnlichen Verfahren, $dr = -\beta zds$ herauskömmt. Alſo iſt $\int zds = -\zeta.\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}+\beta sz = \int\beta zds$ oder

$$\int zds = \frac{\beta sz - \zeta\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta}$$

II. $\zeta ds = dz\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}$ alſo $\int\zeta ds = z\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}+q$ und $dq = -\frac{\beta sds.\, z}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$ $-\frac{\beta zsdz}{\zeta} = +\beta sd\zeta$ alſo $q = \beta s\zeta + r$ und $dr = -\beta\zeta ds$ alſo

$$\int\zeta ds = \frac{z\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}+\beta s\zeta}{1+\beta}$$

III. Dieſe Formeln ſind in dem einzigen Falle nicht brauchbar, wenn $\beta = -1$; Alsdenn aber iſt $\frac{ds:\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(1-ss:\alpha)}}$ das Element eines Kreisbogens,

deſſen

deſſen Sinus $z = s : \sqrt{\alpha}$ (281); alſo $\zeta = \sqrt{(1 - ss : \alpha)}$ und $zds = \frac{sds}{\sqrt{\alpha}}$ davon das Integral $= \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$;

Ferner ſey Cp 17 F. $= s : \sqrt{\alpha}$ für CD $= 1$; ſo iſt $pP = ds : \sqrt{\alpha}$; $pn = \zeta$ und des Kreisſtückes CDMP Differential $= \frac{\zeta ds}{\sqrt{\alpha}}$ alſo $\int \zeta ds = \sqrt{\alpha}$. CDMP $= \sqrt{\alpha} . (\frac{1}{2}$ Bog. coſ PM $+ \frac{1}{2}$ CP. PM$) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} .$ B ſin $\frac{s}{\sqrt{\alpha}} + \frac{s\sqrt{1 - ss : \alpha}}{2}$

589. Aufg. Die krumme Linie FE zu finden, die ihrer Evolute AC ordentlich ähnlich iſt.

Aufl. I. Der Bogen FE 31 F. heiſſe σ und ſein Krümmungshalbmeſſer bey E ſey $= r$; welcher von F nach E wachſe; dieſes ſchränkt die Aufgabe nicht ein, weil man den Bogen σ von jedem willkührlich angenommenen Puncte nach der Seite nehmen kann, nach welcher der Krümmungshalbmeſſer wächſt. Der Krümmungshalbmeſſer in F; oder FA ſey $= a$; ſo iſt der Bogen AC $= n . \sigma$ und $a + n\sigma = r$ alſo $n = \frac{dr}{d\sigma}$ oder $nr = \frac{rdr}{d\sigma}$; weil $\sigma = \frac{r - a}{n}$. Man ſetze $\sigma + \frac{a}{n} = s$;

ſo iſt $s = \frac{r}{n} = GE$ 31 §. Wenn $FG = \frac{a}{n}$. So iſt FE ihrer Evolute dergeſtalt ähnlich, daß ſich ähnlich beſtimmte Linien in beyden wie 1 : n verhalten.

II. Man ſuche hieraus für FE eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten. Wenn $dx = q\,ds$ alſo $dy = ds.\sqrt{(1 - qq)}$. So iſt (543) $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{q}$ und $p = \frac{\sqrt{(1 - qq)}}{q}$ und $dp = -\frac{dq}{qq\sqrt{(1 - qq)}}$ alſo aus 543; III; $r = \frac{ds.\sqrt{(1 - qq)}}{dq} = n.\,s$ (I) oder $\frac{ds}{s} = \frac{n\,dq}{\sqrt{(1 - qq)}}$ alſo n. Bog ſin $q = l\frac{s}{a}$ oder q iſt der Sinus eines Bogens, deſſen Länge $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ iſt; alſo $\sqrt{(1 - qq)} = $ coſ Bog $\frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$; alſo $dx = ds.$ ſin B $\frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$; $dy = ds.$ coſ Bog $\frac{1}{n}\, l\,\frac{s}{a}$.

III. Weil

III. Weil $\frac{1}{n} \, l \, \frac{s}{a} = \int \frac{ds}{ns}$ ſo iſt in (588)
$x = \int z ds : y = \int \zeta ds ; \alpha = 0 ; \beta = nn ; z =$
$\sin \mathfrak{B} \frac{1}{n} l (s : a) ; \zeta = \cos \mathfrak{B} \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ alſo

$$x = \frac{nn.s.z - n.s.\zeta}{1 + nn} ; y = \frac{n.sz + nns\zeta}{1 + nn}$$

wo x und y für $s = 0$ verſchwinden. Alſo in 31 F. $GM = x ; ME = y$ (I).

IIII. Daraus wird $\frac{(1 + nn).x}{ns} = nz - \zeta$
und $\frac{(1 + nn) y}{ns} = z - n\zeta$ folglich

$$\frac{(1 + nn)^2 xx}{nnss} = nnzz - 2nz\zeta + 1 - z^2$$

$$\frac{(1 + nn)^2 yy}{nnss} = z - 2nz\zeta + nn - nnzz$$

alſo $\frac{(1 + nn)^2.(xx + yy)}{nnss} = 1 + nn$ oder

$$xx + yy = \frac{nn}{1 + nn}.ss$$

V. Eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten allein erhält man ſo: $z = \frac{dx}{ds}$ und $\zeta = \frac{dy}{ds}$ (II)

alſo kömmt in (III); $\frac{(1+nn).x}{ns} = ndx - dy$

$\frac{(1+nn).y}{ns} = ndy + dx$ Das obere mit dem unteren dividirt, giebt $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$; daraus findet man $n(ydx - xdy) = ydy + xdx$; Weil was rechter Hand ſteht, das halbe Differential von $xx + yy$ iſt, ſo dividire man damit auf beyden Seiten. Dieſes giebt $\frac{n.(ydx - xdy)}{xx+yy} = \frac{ydy + xdx}{xx+yy}$ Nun iſt $ydx - xdy = yy.\,d(x:y)$ alſo was linker Hand ſteht $= \frac{n.\,d(x:y)}{\frac{xx}{yy}+1} = n\,d\,$B. tang $\frac{x}{y}$

(299) folglich n. Bog. tang $\frac{x}{y} = l(\sqrt{(xx + yy)} : a)$

VII. Es ſey $\sqrt{(1+nn)} = m$; die Sehne GE 31 F. $= u$; ſo iſt (IIII) $u = \frac{n}{m}s$ folglich $\frac{n}{m} = \frac{du}{ds} = \frac{EI}{Ee}$ 31 F. wenn e dem Puncte E unendlich nahe iſt; = ſin EeI; alſo iſt coſ EeI oder ſin eEI $= \frac{1}{m}$ und tang eEI $= \frac{1}{n}$; das

Ele-

Element, oder die Tangente der krummen Linie GE, macht alſo mit der geraden Linie GE einen unveränderlichen Winkel, deſſen Tangente $\frac{1}{n}$ iſt. Folglich iſt GE eine logarithmiſche Spirallinie (510)

VIII. Der Bogen der Evolute AC von A rechter Hand, in 31 F. gerechnet iſt $= r - a$ (I) folglich $= -a$ für $r = 0$; d. i. für den Punct G der Linie GE wo $s = 0$; (I) und die Evolute geht auch durch G; weil ſich EC oder r; für den Punct G der krummen Linie GE in o verwandelt. Alſo iſt der Bogen AG der Evolute $= a =$ AF; daß ſein Werth verneint wird, zeigt nur an, er werde von A linker Hand genommen. Und ſo iſt der Bogen GAC der Evolute $= a + n.\sigma = ns$ (I). Folglich verhalten ſich die veränderlichen Bogen GE; GC; von einem Puncte G an gerechnet, beſtändig wie 1 : n; daher denn auch die Sehnen GE; GC; als ähnlich beſtimmte Linien in dieſer Verhältniß ſtehen werden. (I) Alſo iſt die Sehne GC $= nu = \frac{n}{m} \cdot ns = \frac{nw}{m}$ wenn der Bogen GC der Evolute, w heiſſt; der Winkel alſo, welchen die Evolute bey C mit GC macht, hat zur Tangente $\sqrt{\left(dw^2 - \frac{nndw^2}{mm}\right)}$: $\frac{n}{m} dw$ oder $\frac{1}{n}$ wie der Winkel GEe (VII).

VIIII.

VIIII. Wenn $n = 1$ oder wenn die Winkel (VIII; VII) 45 Grad ſind, ſo verwandelt ſich die Aehnlichkeit (I) in die völlige Gleichheit, oder aus Abwickelung einer ſolchen logarithmiſchen Spirale GAC welche mit GC allemahl einen Winkel von 45 Gr. macht, entſteht völlig eben dieſe Spirale GFE.

590. Aufg. **Die krumme Linie AMB zu finden, die ihrer Evolute amb verkehrt ähnlich iſt 32 F.**

Aufl. I. Von dem Puncte E (585) wo der Halbmeſſer der Krümmung $Ee = a$; iſt, rechne man den Bogen $EM = \sigma$; der Halbmeſſer der Krümmung bey M ſey $Mm = r$; ſo iſt der Bogen $em = r - a$ Nun nehme man μ (584) und die Verhältniß der Aehnlichkeit (578) ſey $= 1 : n$; ſo iſt der Bogen $e\mu = n.\sigma$ und bey μ der Halbmeſſer der Krümmung $= n.r$. Die Tangente an μ begegne der krummen Linie AMB in R, daß μ; R; zuſammengehörige Puncte ſind; der Bogen ER heiſſe S; und R ſey $= R\mu$; ſo iſt $e\mu = a - R$;

II. Der ſpitzige Winkel unter dem $R\mu$ und Ee einander ſchneiden, iſt $= \varrho$ (568) $=$ erm (596). Der ſpitzige Winkel unter dem $R\mu$ und AC einander ſchneiden, ſey φ; ſo iſt, wegen des Dreyecks, das die Verlängerungen von $R\varphi$; EF; unter AC; mit φF machen, 180 Gr. $- \varphi =$

180

180 — EFA + erm oder φ = EFA — erm = efa — erm (587) = fnr = mna;

III. An dem Puncte in ab, der mit R eine ähnliche Lage hat, muß die Normallinie mit ac einen Winkel = φ machen; weil nähmlich die beyden Normallinien, die an dieſem Puncte, und die bey R; imgleichen die beyden andern, die bey a, und die bey A; auf ähnliche Art beſtimmt werden, und alſo gleiche Winkel machen müſſen (580); alſo muß dieſe Normallinie mit mn (II) parallel oder einerley ſeyn; und nur das letzte findet ſtatt (585) alſo iſt m der mit R ähnlichliegende Punct.

IIII. Folglich em = n.S und der Krümmungshalbmeſſer bey m; = n. R (I)

V. Alſo r — a = em (I) = n. S. (IIII) oder $S = \frac{r - a}{n}$ und auch aus (I) a — eμ oder R = a — n. σ. Die Weite des Bogens EM iſt = erm (568) = ϱ (II) = der Weite des Bogens ER (568). Soll dieſes in allen Puncten beyder Bogen ſtatt finden, ſo ſind die Differentiale der Winkel gleich, welche EF mit MN und Rφ macht, oder es iſt $\frac{d\sigma}{r} = \frac{dS}{R}$; aber $\frac{dS}{R} =$ $\frac{dr}{n(a - n\sigma)}$ welches alſo na dσ = nns dσ =

rdr

rdr giebt, woraus man durch die Integration $rr = 2na\sigma - nn\sigma\sigma + aa$ erhält, wenn $r = a$ für $\sigma = 0$ werden ſoll (I).

VI. Aus der Gleichung $\sigma\sigma - \frac{2a}{n}\sigma + \frac{rr - aa}{nn} = 0$ (V) das zweyte Glied wegzuſchaffen (Alg. 282.) ſetze man $s = \sigma - \frac{a}{n}$, dieſes giebt $r = \sqrt{(2aa - nnss)}$ und wenn der Bogen $AE = \frac{a}{n}$ ſo iſt $AM = s$.

VII. Hat man vermittelſt dieſer Gleichung die krumme Linie beſtimmt, ſo findet man den Punct E, um den gleich weite Bogen müſſen abgeſchnitten werden, damit die krumme Linie ihrer Evolute verkehrt ähnlich wird, wenn man $s = \frac{a}{n}$ nimmt, da denn $r = a$ wird.

VIII. Eine Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ zu finden, iſt wie in (589; II) $r = \frac{ds.\sqrt{(1 - qq)}}{dq}$ alſo $\frac{ds}{r}$ oder $\frac{dq}{\sqrt{(1 - qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ (V)

$= 1$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{n}{a\sqrt{2}} \cdot ds}{\sqrt{\left(1 - \frac{nnss}{2aa}\right)}}$$ davon die Integrale

Bog ſin q =. Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ wo, wenn die beſtändige Gröſſe, die man addiren ſollte = 0 geſetzt wird, q oder $\frac{dx}{ds}$ für s = 0 auch = 0, folglich die krumme Linie in A auf die Axe ſenkrecht ſeyn muß.

VIIII. Man ſetze zuerſt n = 1 da die geſuchte Linie ihrer Evolute nicht nur verkehrt ähnlich, ſondern auch gleich iſt. So kömmt Bog ſin q = Bog ſin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ oder $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ und $\sqrt{(1-qq)}$ $= \frac{\sqrt{(2aa - ss)}}{a\sqrt{2}}$ alſo q d s oder $dx = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ und $2ax\sqrt{2} = ss$ weil x und s zugleich verſchwinden. Folglich iſt die geſuchte krumme Linie eine Cycloide, (559) die in A den gröſſten Krümmungshalbmeſſer $a\sqrt{2}$ (VI) oder die kleinſte Krümmung hat. Für den Punct E iſt s = AE = (VI) a alſo $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

X. Der

X. Der Halbmeſſer des beſchreibenden Kreiſes oder was in 559; r hieſſe, und um Verwirrung mit (VIII) zu vermeiden, k heiſſen ſoll, iſt ſo beſchaffen, daß $8k = 2a \sqrt{2}$ oder $a = 2k \sqrt{2}$ oder $k = a : 2\sqrt{2}$. Wenn ACB oder acb = 90 Gr. ſo iſt aus 559; mit Alg. 600 u. f. und der hieſigen 7 F. verglichen

31 F; A; P; M; B; C,
7 F; F; M; P; A; E,

oder was zwiſchen AC und CB 32 F. enthalten iſt; wird mit der 7 F. einerley ſeyn, wenn man dieſe Figur hinten durch das Blatt anſieht, und ſie ſo hält, daß ihre FE mit AC 32 F. parallel iſt. Da nun die halben Cycloiden AMB, $a\mu b$; (Alg. 609) einander gleich und ähnlich ſind, (I) ſo ſind, wenn amb mit FPA 7 F. verglichen wird

31 F; a; μ; b; c;
7 F; F; P; A; E;

oder die 7 F. auf der Seite des Blattes, wo ſie ſteht, ſo angeſehen, daß ihre AE mit bc 32 F. parallel iſt, ſtellt acb der 32 F. vor.

Ferner iſt bey Vorausſetzung eines rechten Winkels bey C 32 F. BC einerley mit AE der 7 F; folglich in gegenwärtiger 32 F; BC = bc = der halben Grundlinie (Alg. 602) = πk (Alg. 605). Und die Länge der halben Cycloide AB oder ab; 4k (559). Auch Ab oder $a\sqrt{2}$ (VIII) = 4k; folglich die ganze Länge des Fadens ab + bA oder aB = 8k.

XI.

XI. Wenn eine halbe Cycloide, die der ab gleich und ähnlich iſt, an ab ſo gelegt wird, daß beyde einander in a berühren und ihre erhabenen Seiten gegen einander kehren, ſolchergeſtalt eine Figur wie CDG Alg. 20 F herauskömmt, und ein Faden aμbA an der erſten anliegt, ſo wird ſich ſolcher, nachdem er ſich von der halben Cycloide bμa ganz in die Lage aB abgewickelt hat, wieder in verkehrter Ordnung auf die andere halbe Cycloide aufwickeln; und da er nothwendig hiebey eben die Linie, nur rückwärts beſchreibet, die er beſchriebe, wenn er auf derſelben ſo wie um abA läge und ſich davon abwickelte; ſo entſteht durch dieſe Aufwickelung die an AB gehörige halbe Cycloide, welche mit AB zuſammen eine ganze Cycloide ausmacht. Dieſe ganze Cycloide beſteht nähmlich aus zwey Stücken wie F2A und 2AF Alg. 35 F. in 2A an einander gefügt, daß ſie da eine gemeinſchaftliche Tangente hätten; dieſe beyden Stücken aber machen zuſammen eine ganze Cycloide wie AF2A Alg. 35 F. aus, weil die Stücken F2A; AF; einander gleich und ähnlich ſind. (Alg. 609.)

XII. Soll die Abwickelung ſo verrichtet werden, daß die Puncte A und b zuſammen fallen; ſo muß der Halbmeſſer der Krümmung bey A; = 0 ſeyn, (567) alſo muß A 32 F. mit A 7 F. einerley ſeyn, damit Ab = 0 iſt (557). Alſo müſſte nun B 32 F. ſeyn, was F 7 F. iſt. Um zu verſuchen, ob dieſes angeht, nehme man wie-

der ACB $=$ 90 Gr. an und ziehe MQ mit AC parallel; nenne ferner BQ $= x$; MQ $= v$; BM $= s$; So muß man in VI; erſtlich $n = 1$ (VIII) denn $\sigma = a - s$ ſetzen, und EB $= a$ nehmen. Dieſes giebt wie in VI; $r = \sqrt{(2aa - ss)}$ wo $r = 0$ für $s = a\sqrt{2}$. Nun findet man wie in VIII; $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ welches zeigt, daß für $s = 0$ oder in B, die krumme Linie auf CB ſenkrecht; aber für $s = a\sqrt{2}$; mit CB parallel iſt, weil daſelbſt $dx = ds$. Folglich muß die Normallinie am Ende des Bogens $a\sqrt{2}$ von B an gerechnet, auf CB ſenkrecht ſtehen. Aber CA ſteht auf CB ſenkrecht, wie angenommen wird; und es giebt innerhalb des Bogens BA nicht zwo parallele Normallinien (585) folglich iſt BA $= a\sqrt{2}$, alſo Ab $= 0$; daß aber BA und folglich ba ein Bogen einer Cycloide wie FA 7 F. iſt, erhellt wie VIIII. Hier alſo iſt die Länge des Fadens $=$ BA $=$ ab $= 4k$ (X) der wie in XI eine ganze Cycloide beſchreiben kann.

XIII. Wenn nicht $n = 1$; ſo iſt die Integralgleichung (VIII) zumahl auſſer den Fällen, da $\frac{1}{n}$ eine ganze Zahl iſt, unbequem, weil man da Winkel vervielfältigen muß. Man bediene ſich alsdenn der Gleichung $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ oder

oder q = ſin des Bogens $\int \frac{ds}{\surd(2aa - nnss)} = z$

(588) wenn dorten $\alpha = 2aa$; $\beta = - nn$; Folglich $dx = zds$; $dy = \zeta ds$ und $x =$

$$\frac{nnsz + \zeta\surd(2aa - nnss)}{nn - 1}$$

$$y = \frac{nns\zeta - z\surd(2aa - nns)}{nn - 1}$$

Weil nun $\int \frac{ds}{\surd(2aa - nnss)} = \frac{1}{n}$ Bog ſin $\frac{ns}{a\surd 2}$

(VII) ſo ſind für ein gegebenes s; und folglich einen gegebenen ſin $\frac{ns}{a\surd 2}$; z und ζ algebraiſch gegeben, ſo oft n eine ganze Zahl iſt. Weil man nur in Alg. 175; z und ζ als Sinus und Coſinus des einfachen Bogens, ſin $\frac{ns}{a\surd 2}$ aber als den Sinus ſeines vielfachen anſehen darf, alſo zwiſchen dieſen Sinus und z; ζ; allemahl eine algebraiſche Gleichung erhält, in der die geſuchten z; ζ; auf den Grad n ſteigen. Hieraus erhellt, daß ſo oft n eine ganze von 1 unterſchiedene Zahl iſt, x und y algebraiſch gegeben, folglich dieſe krummen Linien algebraiſch ſind. Ihre Unterſuchung läſſt ſich aber hier nicht weiter treiben, weil von den krummen Linien überhaupt im vorherge-

hergehenden zu wenig hat können abgehandelt werden.

591. Anm. Was 578. . . 590 enthalten, iſt aus Eulers inueſtigatione curuar. quae euolutae ſui ſimiles producunt; Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. genommen; wo dieſe Unterſuchung weiter ausgeführt, und auch auf die ferneren Evoluten der Evoluten angewandt wird. Ich habe nur hie und da Anfängern nöthige Erläuterungen beygefügt. Euler erinnert ſelbſt, daß man die beyden Linien, die ihren Evoluten, eine ordentlich, die andere verkehrt, ähnlich und gleich ſind, leichter finden könne; wie ſolches Kraft Comm. Ac. Imp. Petrop. T. II. p. 216. gewieſen hat. Auſerdem aber daß dieſer Unterſchied der Leichtigkeit eben nicht ſo gar viel beträgt, ſo hat es mir aus eben dem Grunde dienlich geſchienen Eulers Vortrag hier zu erläutern, aus welchem er denſelben erwählt hat, weil man dadurch nähmlich veranlaſſt wird verſchiedene Kunſtgriffe beym Integriren, kennen zu lernen und zu gebrauchen.

592. Anm. Huygens hat zuerſt eine krumme Linie, die ihrer Evolute gleich und ähnlich iſt, nähmlich die Cycloide (590; VIII) entdeckt; S. ſein zu Paris 1673 herausgekommenes Horologium oſcillatorium Part III; wo überhaupt die Lehre von der Evolution ſynthetiſch, nach Art der Alten, und ohne die Rechnung des Unendlichen, welche damahls noch nicht im Gebrauche war, abgehandelt wird. Dieſe Eigenſchaft der Cycloide befindet ſich daſelbſt Prop. VI. Hugen hat ſie bey den Pendeluhren gebraucht. Die zweyte Linie, die ihrer Evolute ähnlich, aber nicht gleich iſt, hat Tſchirnhauſen; Act. Erud. Lipſ. Nou. 1682. bekannt gemacht. Die dritte, von welcher dieſes entdeckt worden, iſt die logarithmiſche Spirale (589; VII;) Jacob Bernoulli hat dieſe ſeine Erfindung ebenfalls Act. Erud. Lipſ. Mai. 1692. (Op. Iac.

Iac. Bern. n. 49) mitgetheilet. Weil dieſe Linie auf ſehr viele andere Arten, durch welche ſonſt aus einer krummen Linie andere entſtehen, immer ſich ſelbſt wieder darſtellet, hat er ſie zugleich als ein Denkmahl ſeiner Entdeckungen und als ein Sinnbild der Auferſtehung, mit der Ueberſchrift: Eadem mutata reſurgo, auf ſeinen Grabſtein ſetzen laſſen. S. Battiers Leichenrede auf Jac. Bern. Op. Iac Bern. T. I. p. 30. Dieſe Erfinder haben nur gewieſen, daß bey den krummen Linien, die ſie betrachteten, die Aehnlichkeit zwiſchen den Evoluten, und den durch die Abwickelung entſtandenen Linien ſtatt finde: Die Abſicht vorhergehender Unterſuchung aber war überhaupt alle krummen Linien zu entdecken, wo dieſe Aehnlichkeit ſtatt findet, und ſich ſolchergeſtalt, wie der Erfolg weiſet, zu überzeugen, daß ſie nur bey denen, wo man ſie zuerſt entdeckt hat, ſtatt finde, wovon noch Johann Bernoulli das Gegentheil gemuthmaſſt hatte, Lect. Hoſp. 25. Op. T. I. p. 460.

Gleichungen zwiſchen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikeln auf die Tangenten.

593. Aufg. Für die krumme Linie BME 33 F. hat man eine Gleichung zwiſchen CM = y und einen Kreisbogen = u der um C mit dem Halbmeſſer e beſchrieben iſt, und den Winkel BCM miſſt. Dieſe Gleichung heiſſt (F). Man ſucht eine Gleichung, die (L) heiſſen ſoll, zwiſchen CM, und CQ = t, dem Perpendikel auf die Tangente.

Aufl. Hier ſind e; u; mit r; x (104) einerley. Wenn alſo dy = pdx und TCM 33 F. wie

wie 8 F. = R iſt, ſo iſt $MT = y\sqrt{(eepp + y^2)} : ep$; und $\frac{MC.CT}{MT}$ das iſt CQ oder $t = \frac{y^2}{\sqrt{(e^2p^2 + y^2)}}$. Iſt p unmittelbar durch y allein gegeben, ſo iſt die nur gefundene Gleichung alſobald (L). Iſt aber p als eine Function von beyden veränderlichen Gröſſen vermengt gegeben, ſo hat man doch ſolchergeſtalt eine Gleichung zwiſchen p; u; y; die ſich mit der zwiſchen u und y verbinden läſſt, daß man aus beyden zuſammengenommen p wegſchaffen, und eine Gleichung zwiſchen y; u; t; finden kann; Weil nun die vorhin gefundene auch y; u; t; enthält, ſo kann man wieder aus beyden zuſammengenommen u wegſchaffen und eine zwiſchen y und t finden.

Exempel.

594. Für die archimediſche Spirale iſt u; x in 530 hier y; u; und $t = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + ee : 4\pi\pi)}}$

595. Für die logarithmiſche (510) $\frac{ydu}{edy} = m$ alſo $p = \frac{y}{me}$ und $t = \frac{my}{\sqrt{(1 + mm)}}$ woraus $\frac{t}{y}$ = dem Sinus des Winkels CMT deſſen Tangente m iſt, folgt.

596.

596. Aufg. Den Halbmeſſer der Krümmung durch CM und CQ auszudrucken.

Aufl. I. Er heiſſe = r; MN 34 F. ſey ein Bogen der krummen Linie, an deſſen beyden Endpuncten MQ; NV Tangenten, und CQ; CV; auch MK; NK Perpendikel darauf ſind; welche ſich in Halbmeſſer des Krümmungskreiſes für MN verwandeln, wenn MN verſchwindet und H der Krümmungswinkel wird. CV ſchneide HQ in L. Nun iſt allemahl QHV = MKN auch = QCL; alſo $\frac{QL}{CQ}$ = tang MHV; welches alſo verſchwindet, wenn H der Krümmungswinkel wird. Ferner iſt LV : LQ = VH : QC; wo die leztere Verhältniß endlich bleibt, wenn M; H; N; zuſammen fallen, da ſich HV der MQ. und die Verhältniß HV : QC der MQ : QC unendlich nähert, die Verhältniß aber MQ : QC; iſt allemahl endlich, auſer in dem einzigen beſondern Falle, wenn CM auf die Tangente ſenkrecht iſt. Dieſen Fall ſo ausgenommen iſt allemahl der Quotient $\frac{LV}{LQ}$ endlich. Aber CL =

$$\sqrt{(CQ^2 + QL^2)} = CQ + \frac{QL^2}{2CQ} \ldots .$$

alſo $\frac{CL - CQ}{QL} = \frac{QL}{2CQ}$ folglich verſchwindet

 CL —

$\frac{CL - CQ}{QL}$ wenn H der Krümmungswinkel wird.

Weil nun $CV = CL + LV$; ſo iſt $\frac{CV - CQ}{LQ}$ $= \frac{CL - CQ}{LQ} + \frac{LV}{LQ} = \frac{LV}{LQ}$ wenn H der Krümmungswinkel wird und der erſte Theil des Werthes von dieſen Quotienten, aber nicht der andere, verſchwindet. Alſo iſt für den Krümmungswinkel $LV = CV - CQ = dt$. Ferner $\frac{LV}{HV} =$ tang $H =$ tang $K = K$ wenn die Winkel verſchwinden, und HV ſich unendlich dem Werthe $MQ = \sqrt{(yy - tt)}$ nähert. Alſo iſt K oder $\frac{ds}{r} = \frac{dt}{\sqrt{(yy - tt)}}$ das iſt $r = \sqrt{(yy - tt)}. \frac{ds}{dt}$

II. Wenn MS ein Kreisbogen aus dem Mittelpuncte C iſt, ſo iſt (505) der Ausſchnitt MCN oder $\frac{1}{2} y \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$ hier auch $= \frac{1}{2} tds$ alſo $(yy - tt) ds^2 = yydy^2$. Daraus folgt $r = \frac{ydy}{dt}$

Ex. Wenn für die logarithmiſche Spirale (595) $t = ny$ ſo iſt $r = \frac{y}{n}$ wie (556)

597.

597. Um K ſey ein Kreis mit dem Halbmeſſer r beſchrieben. Wenn man nun nach Gefallen einen Punct C nähme, daß $KC = k$; und eine Gleichung zwiſchen CM und CT für jeden willkührlichen Punct dieſes Kreiſes ſuchte, ſo wäre r unveränderlich und $rdt = ydy$ alſo $rt =$ Conſt $+ \frac{1}{2} yy$. Weil nun KC auf des Kreiſes Tangente an der Stelle, wo er KC ſchneidet, ſenkrecht ſteht, ſo iſt für dieſe Stelle $y = t$. Aber es iſt auch für dieſelbe $y = k - r$; alſo $r.(k - r) =$ Conſt $\frac{+(k-r)^2}{2}$ woraus $2rt = yy + 4kr - 3rr - kk$ folgt. Wenn $k = r$, oder C im Umfange des Kreiſes liegt, und CM eine Sehne wird, ſo kömmt $t = yy : 2r$ wie auch wenn $k = 3r$; weil dieſe beyden Werthe von k die Wurzeln der Gleichung $kk = 4kr - 3rr$ ſind. Für $k = 0$ iſt $2rt = yy - 3rr$; Hier muß man $y = - r$ ſetzen, weil bey der Integration überhaupt das y das in die Linie CK fiele $= k - r$ geſetzt worden; dieſes wird hier $= - r$; und jedes y das durch C geht, d. i. jeder gegenwärtige Halbmeſſer fällt nun in CK; da man nun auch y das auf CK fiele, $= t$ ſetzt, ſo iſt hier $t = - r$ und dieſes giebt $- 2rr = rr - 3rr$ wie ſich gebührt: Dieſe unerwartete Nothwendigkeit hier $y = - t$ beruhet nähmlich darauf, weil man bey der Integration $CK > r$ angenommen.

Ein Punct kann als ein Kreis angeſehen werden, deſſen Halbmeſſer = o wäre. Für ihn alſo kömmt $o = yy - kk$ das iſt $y = k$. Wenn nähmlich alle Puncte M des Kreiſes in K zuſammengehn, ſo giebt es keine andere CM als die einzige CK. Jede Linie durch K kann eine Tangente dieſes in einen Punct verwandelten Kreiſes heiſſen: alſo giebt es für das einzige $y = k$; unzählige t. Daher iſt t in der Gleichung nicht zu finden, durch die es ſich nicht beſtimmen lieſſe.

598. Aufg. **Wenn eine Gleichung zwiſchen CM und CQ 34 §. gegeben iſt, daraus eine zwiſchen CM und u (593) zu finden.**

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt die umgekehrte von 593; und ſucht (F) aus (L). Es iſt aber $tds = yydu : e$ (596; II) daraus findet man, wenn ſtatt ds ſein Werth geſetzt wird, nach gehöriger Rechnung $\frac{tdy}{y\sqrt{(yy - tt)}} = \frac{du}{e}$. Hier kann man nun wegen der gegebenen Gleichung zwiſchen y und t, annehmen, auf der linken Seite ſey alles durch y gegeben; folglich wird die geſuchte Gleichung $\int \frac{tdy}{y\sqrt{(yy - tt)}} = \frac{u}{e}$ ſeyn, wo die Integrale linker Hand einer Function von y; und alſo y durch u gegeben iſt, ſo daß man für jedes angenommene u, den zugehörigen Werth von

von y finden kann. Das angenommene u aber giebt die Lage, und der Werth von y die Länge der Linie CM, daß man alſo ſolchergeſtalt alle Puncte M finden, d. i. die krumme Linie verzeichnen kann.

Exempel.

599. I. Es ſey $t = ahy : \surd((aa - hh) y^2 + aahh)$. Man nehme an, der Anfang des Bogens u werde ſo genommen, daß u zunimmt, wenn y abnimmt, alſo beyder Differentiale entgegengeſetzte Zeichen haben; ſo iſt nach gehöriger Rechnung $\frac{du}{e} = -\frac{mdy}{y^2}$ wo $m = \frac{ah}{\surd(aa - hh)}$ folglich $\frac{u}{e} = \text{Conſt} + \frac{m}{y}$; Es ſey $y = a$ für $u = 0$ ſo iſt $u = \frac{em.(a - y)}{ay}$ oder $y = \frac{ema}{au + em}$

II. Für $y = a$ iſt $t = h$; alſo $\frac{CQ}{MQ}$ oder die Tangente des Winkels CMQ für $u = 0$; $= \frac{h}{\surd(aa - hh)}$ heiſſt ſie ϑ ſo iſt $m = a\vartheta$ und dieſes giebt, wenn nach $e = 1$ geſetzt wird $y = \frac{a\vartheta}{u + \vartheta}$

III. Ge-

III. Geſetzt, der Winkel, den die krumme Linie da, wo u = o iſt, mit der Ordinate macht, ſey = 45 Gr. ſo iſt $\vartheta = 1$ und $y = a : (u + 1)$.

IIII. Die Verzeichnung in (III) geſchieht folgendergeſtalt. Man ziehe 33 F. CA = a nach Gefallen, und beſchreibe mit CG = 1 den Kreisbogen NG = u; Iſt u in Graden gegeben, ſo hat man unmittelbar den Winkel ACC; und muß alsdenn die Länge des Bogens u in Theilen des Halbmeſſers ſuchen, um den Quotienten $a : (u + 1)$ oder $y =$ CM zu haben. Iſt aber u in Theilen des Halbmeſſers gegeben, ſo hat man unmittelbar die Länge CM, und ſucht nun u in Graden, den Winkel ACH zu finden.

Wäre u = 60 Gr. gegeben, ſo fände man die Länge dieſes Bogens = 1, 047. . . alſo
CM = a: 2, 047 = 0, 48. a

Wäre $u = \frac{1}{2}$ gegeben, ſo müſſte man CM = $a : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}\,a$ in einem Winkel ACM = 28 Gr. 38 M. ziehen (311)

V. Joh Bernoulli Act. Er. Lipſ. 1713. Op. T. I. n. 90. § 65; hat die Linie (II) die hyperboliſche Spirallinie genannt, wegen der Aehnlichkeit, die ihre Gleichung mit der aſymptotiſchen Gleichung der Hyperbel (Alg. 412) hat. Ihre Ordinaten verhalten ſich verkehrt wie die Abſciſſen $u + \vartheta$ denn es iſt klar, daß man den Bogen ND = ϑ nehmen, und die Bogen DG ſtatt NG brauchen kann. Daher heiſſt Bernoulli

ſie

ſie auch die verkehrte archimediſche Spirale. (Alg. 580.) Euler Mech. L. I. §. 671; II. Meine Aufgr. d. höhern Mechanik I. Abſch. 264.

600. Es ſey $t = y \sqrt{\frac{(a-y)}{a}}$; alſo $y^2 - t^2 = y^3 : a$, und wenn $e = 1$ geſetzt wird, $du = \frac{dy}{y} \cdot \sqrt{\frac{a-y}{y}}$. Man ſetze $\sqrt{\frac{a-y}{y}} = w$ alſo $\frac{a}{ww+1} = y$; ſo kömmt $du = - \frac{2wwdw}{ww+1} = -2dw + \frac{2dw}{ww+1}$; Folglich $u = 2\,\mathfrak{B}\tan w - 2w$ wenn $u = 0$ wo $y = a$ oder $w = 0$.

Hieraus flieſſt folgende Verzeichnung der krummen Linie: Man nehme ein y nach Gefallen an, dadurch iſt eine Zahl w; folglich auch $\mathfrak{B}$ tang w; und daher u als eine Zahl für den Halbmeſſer = 1 gegeben. Daraus findet ſich der Winkel ACM 35 F. in dem man das angenommene y = CM legen muß.

Wenigſtens im erſten Quadranten, wo jeder Bogen kleiner als ſeine Tangente iſt, wird der gefundene Werth von u, allemahl verneint ſeyn. Dieſes bedeutet weiter nichts, als daß man die Bogen von G aus nicht nach N ſondern nach B nehmen

nehmen müſſte. Es rührt aber daher: Aus der Differentialgleichung zwiſchen u und w erhellt, daß u wächſt, wenn w abnimmt; aber $w = \surd \left(\frac{a}{y} - 1\right)$ iſt nur möglich, wenn y nicht gröſſer als a iſt, und nimmt ab, wenn y wächſt; Alſo wachſen zwar u und y zugleich, oder ihre Differentiale haben einerley Zeichen, aber für das gröſſte $y = a$ muß angenommener Maſſen $u = 0$ folglich für kleinere verneint ſeyn, daß dieſes verneinte u als eine verneinte Gröſſe betrachtet abnimmt, das iſt, bejahte Differentiale hat, und folglich als wachſend angeſehen wird, wenn die bejahte Ordinate wächſt. Will man alſo für u einen bejahten Ausdruck haben, ſo darf man nur ſetzen, es ſoll ſich mit der gröſſten Ordinate $= a$ anfangen, und folglich wachſen, indem die Ordinaten abnehmen, das iſt, man darf nur $- du = \frac{dy}{y} \cdot \surd \left(\frac{a}{y} - 1\right)$ ſetzen, ſo erhält man nach eben der Rechnung $u = 2.(w - \mathfrak{B}\ \text{tang}\ w)$ Es ſey $a = 1$ und $y = \frac{1}{2}$ alſo $\mathfrak{B}$ tang $w = 45$ Gr.

$$\text{So iſt } 2w = 2, \quad \frac{2\,\mathfrak{B}\ \text{tang}\ w = 1,57079}{u = 0,42921 = GN}$$

Den Winkel ACG zu finden, ſchlieſſt man 3,141 . . . 0,42921 = 180 Gr: ACG; alſo beynahe $ACG = 180\ \text{Gr.}\ \frac{43}{314} = 24$ Gr; da man denn auf der ſolchergeſtalt gezogenen CN; eine Länge

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ für den Punct der krummen Linie nimmt. Ihr erſter Punct für u = o wäre G.

B tang w wächſt mit w bis an 90 Gr. wenn w = ∞ für y = o wird. Da wird auch u = ∞ alſo windet ſich die krumme Linie unzählich vielmahl um C herum.

Aus $t = \left(y^2 - \frac{y^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ folgt $dt = \frac{1}{2}$.

$\frac{2a - 3y}{\sqrt{(aa - ay)}} dy$ und (596) $r = \frac{2n\sqrt{(aa - ay)}}{2a - 3y}$

welcher in C verſchwindet. Eul. Mech. L. II. §. 429.

601. Aufg. Aus der Gleichung zwiſchen y und u wo e = 1 eine zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten CP = x; PM = z zu finden 33 F.

Aufl. I. Wenn u als ein Bogen angegeben wird, deſſen Sinus, oder Tangente u. ſ. w. wie man will, algebraiſch durch y gegeben iſt; ſo iſt folglich allemahl coſ u durch y gegeben. Aber $\frac{x}{y}$ = coſ u. Alſo iſt eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y, das iſt, weil zz = yy − xx; zwiſchen x und z gegeben.

II. Iſt aber u auf jede andere Art durch y gegeben, z. E. wie bey den Spirallinien, ſo läſſt ſich u aus dieſer Gleichung mit der $\frac{x}{y}$ = coſ u

ver-

verglichen nicht wegſchaffen, weil zwiſchen dem Bogen und ſeinem Coſinus keine algebraiſche Gleichung ſtatt findet (Alg. 613)

III. Dieſe Sätze laſſen ſich ſo ausdrucken: $B \cos \frac{x}{y} = \int \frac{dy}{p}$ (593) wo ich annehme, p ſey durch y gegeben. Iſt nun die Integrale ein Kreisbogen, deſſen Coſinus algebraiſch durch y gegeben iſt, ſo kann man allemahl die Bogen auf beyden Seiten wegſchaffen, und eine algebraiſche Gleichung zwiſchen x und y erhalten, ſonſt aber nicht.

602. Wenn zwiſchen CM und CV eine Gleichung gegeben iſt, ſo findet man vermöge 598 folgende $B \cos \frac{x}{y} = \int \frac{t\,dy}{y\sqrt{(yy - tt)}}$ die algebraiſch wird, ſo oft das Integral ein Kreisbogen iſt, deſſen Coſinus ſich durch y ausdrucken läſſt.

Exempel.

603. Es ſey $u = B \tan y : a$; So iſt $\cos u = a : \sqrt{(aa + yy)}$ welches $= x : y$ geſetzt die Gleichung $z = xx : \sqrt{(aa - xx)}$ giebt.

604. Für die archimediſche Spirale (530) $\int \frac{dy}{p} = 2\pi y = B \cos \frac{x}{y}$ wo keine algebraiſche Gleichung ſtatt findet.

605.

605. Es ſey $\frac{du}{e} = \frac{ecdy}{y\sqrt{(eby^2 + eegy - eecc)}}$ das Differential rechter Hand auf einen Ausdruck wie $ds : \sqrt{(1 - SS)}$ zu bringen, wo S einen Sinus oder Coſinus bedeutet; muß zuerſt, was unter des Nenners Wurzelzeichen vorhanden iſt, verneint werden. Alſo drucke man den Nenner ſo aus: $y^2 . \sqrt{(eb + eeg : y - eecc : y^2)}$. Man ſetze $ee : y = P$ ſo kömmt das ganze Differential $= - cdP : e\sqrt{(eb + gP - cc. PP : ee)}$ oder $= - cdP : \sqrt{(e^3 b : cc + eegP : cc - PP)}$ Man ſetze $P = \frac{eeg}{2cc} - w$; da ſich das Differential in $+ \frac{dw}{\sqrt{(hh-ww)}}$ verwandelt, wo $hh = \frac{ee}{4c^4} . (4ebcc + eegg)$. Alſo iſt $\frac{u}{e} = \frac{dw : h}{\sqrt{(1 - ww : hh)}}$ weil nun $\frac{u}{e} = \mathfrak{B} \sin \sqrt{(1 - x^2 : y^2)}$ (601. III) ſo iſt (281) $\frac{h. \sqrt{(y^2 - x^2)}}{y} = w = \frac{eeg}{2cc} - P$; daraus folgt $2cch \sqrt{(y^2 - x^2)} = e^2 gy - 2ccee$ oder $2cc. (hz + ee) = ee. g (\sqrt{zz + x^2})$ Nachdem man die Rechnung gehörig verführt und $4e^3 bcc$ ſtatt $4c^4 hh - e^4 gg$

 geſetzt

geſetzt hat, kömmt $zz + \frac{2cche}{eb}z + \frac{cce}{b} =$ $\frac{egg}{4bcc}xx$ oder weil man gleich aus der Aehnlichkeit dieſer Gleichung mit der für die Kegelſchnitte ſieht, daß es bequemer iſt z für die Abſciſſen und x für die Ordinaten zu nehmen; $xx = \frac{4bcc}{egg}zz + \frac{8c^4h}{egg}z + \frac{4c^4}{gg}$. Da iſt nun

Alg. 419 $x;\ y;\ \delta;\ \varepsilon;\ \zeta$

hier $z;\ x;\ \frac{4bcc}{egg};\ 0;\ -1$

und alſo iſt die krumme Linie eine Hyperbel oder Ellipſe, nachdem $\frac{b}{e} \cdot \frac{4cc}{gg}$, das iſt, weil e allemahl eine bejahte wirkliche Gröſſe ſeyn muß, nachdem b verneint oder bejaht iſt, (Alg. 465. VIII wo die Worte einerley und verſchieden müſſen in der I Auflage verwechſelt werden.) Iſt $b = 0$ ſo kömmt die Parabel.

Dieſe krummen Linien ſind die, in welchen ein Körper geht, der von einem Mittelpuncte C verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen angezogen wird Joh. Bern. Op. T. I. n. 86. p. 476. Ich halte aber nicht für nöthig, hier weitläuftiger davon zu handeln, weil Euler die Art, wie

wie ſie zu finden ſind, viel vollkommener vorgetragen hat. Mech. L I. §. 601. Meine Anſgr. d. höhern Mechanik I. Abſchn. 215.

Anwendung der Integralrechnung auf die Ausrechnung runder Körper und ihrer Flächen.

606. Aufg. Indem ſich die krumme Linie AM 35 F. um die Axe AC dreht, entſteht ein runder Körper (Alg. 545). Man verlangt ſeine Fläche zu finden.

Aufl. Wenn AP = x; PM = y; ſo ſey pm eine andere Ordinate. Zwiſchen den Kreiſen die beyde Ordinaten bey der Umdrehung beſchreiben, iſt ein Stück der geſuchten krummen Fläche enthalten, das von dem Bogen Mm beſchrieben wird. Dieſes Bogens Sehne = e beſchreibt zugleich ein Stück der Fläche eines ſenkrechten Kegels, das = πe (PM + pm) iſt (Geom. 64. S. 4. 3) und wenn der Bogen unendlich abnimmt, nähert ſich e unendlich dem Elemente der krummen Linie, ds; und PM + pm unendlich dem Werthe 2 PM; und die Kegelfläche unendlich dem Stücke der geſuchten krummen Fläche, deſſen Element alſo $2\pi y\,ds$ iſt.

Exempel.

607. I. Für jeden Kegelſchnitt, wo $y^2 = bx \mp \frac{b}{a}x^2$ iſt $2\pi y ds = \frac{\pi}{a}\surd(aabb + 4ab.(a \mp b)x + 4b.(b \mp a)x^2)dx$.

II) Die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen iſt $= 4b.(a \pm b).\left(\frac{aab}{4.(a \pm b)} + ax - x^2\right)$ Der letzte Factor mag $ee + ax - x^2$ heiſſen, ſo iſt $2\pi y ds = \frac{4b.(a \mp b)\pi}{a}\surd(ee + ax - x^2).dx$.

III. Dieſes Differential rational zu machen, ſetze man $\surd(ee + ax - x^2) = e + qx$; Dieſes giebt $\frac{a - 2eq}{(1 + q^2)} = x$ und $(e + qx).dx = -\frac{2.(e + aq - eq^2)^2}{(1 + q^2)^3}dq$ welches alſo nach 385. integrirt die geſuchte Fläche giebt.

IIII. Wenn AM ein Kreis, alſo der Körper eine Kugel iſt, ſo iſt $a = b$; und in III. $2\pi y ds = \frac{\pi}{a}\surd aab.dx$ alſo die Fläche $= \pi bx$ wie S. 65. S.

V. Wenn

V. Wenn AM eine Parabel, alſo a unendlich, ſo werden alle Theile des rationalen Differentials (III) unendlich; weil $ee = \frac{aab}{4.(a \mp b)}$ hier $= \frac{ab}{4}$ auch unendlich wird; alſo drucke man in (I) das Differential ſo aus:

$$\pi \surd \left(bb + \frac{4b.(a \mp b)x}{a} + \frac{4b.(b \mp a)x}{aa} \right)$$

dx wenn nun $a = \infty$ ſo verwandelt ſich dieſes in $\pi \surd (bb \dotplus 4bx).dx$ Hier ſetze man $\surd (bb + 4bx) = b + v$; ſo verwandelt ſich das Differential in $\frac{\pi.(b+v)^2.dv}{2b}$; hier ſtatt $b + v$ ſeinem Werth geſetzt und das Integral ſo genommen, daß es für $x = 0$ verſchwindet, giebt die Fläche $\frac{\pi.((b^2 + 4bx)^{3:2} - b^3)}{6b}$

608. Auf dieſe Art faſſt man die Frage von den Flächen ſolcher Körper die aus Umdrehung der Linien der zweyten Ordnung entſtehn, in eine allgemeine Gleichung zuſammen, daraus ſich Kugel und Parabel leicht herleiten laſſen. Aber für Ellipſe und Hyperbel würde die Zerlegung des Differentials und folgende Behandlung viel Weitläuftigkeit machen; Selbſt kömmt die Integration

gration manchmahl auf Kreisbogen, manchmahl auf Logarithmen an.

Wenn die Ausrechnung krummer Flächen die von ſo bekannten Linien beſchrieben werden, in unſrer Gewalt iſt, ſo kann doch auch ſchon der Anfänger wünſchen, etwas mehr Kenntniß von ihr zu haben. Auch iſt wenigſtens die Fläche des elliptiſchen Sphäroids merkwürdig, ſeitdem man der Erde dieſe Geſtalt giebt.

Daher ſchien mir dienlich ſolche Ausrechnungen hie beyzufügen, wie ſie ſich kurz aus vorhin vorgetragenen Lehren herleiten laſſen, die ich freylich auch jetzo zu dieſer Abſicht bequem eingerichtet habe.

Ich fand am deutlichſten, jede dieſer krummen Linien, beſonders zu behandeln. Bey der Parabel war natürlich die Abſciſſen vom Scheitel beyzubehalten; Bey den andern, ließ ſich leicht einſehn, daß Abſciſſen aus dem Mittelpuncte, die Rechnung bequemer machen würden, wie ſie die Eigenſchaften dieſer Linien ſelbſt, bequemer lehren.

Auch ließ ich dieſe krummen Linien ſich um andre Axen drehen, als um die in welchen ſich die Brennpuncte befinden.

Eigentlich iſt was ich ſo beyfüge eine beſondre Abhandlung, ich werde ſie alſo am beſten in Sätze theilen, deren jeder ſeine eignen Paragraphen bekömmt.

I. Satz.

I. Satz.

Eine Parabel dreht ſich um ihre Axe. Fläche des Konoids.

I. Der Parameter ſey $= b$; der Parabel Gleichung; $y^2 = bx$; $\frac{2.y.dy}{b} = dx$; $\frac{dy.\sqrt{(b^2 + 4y^2)}}{b} = ds$; Alſo das Differential der Fläche $= 2\pi.y\,ds = \frac{\pi}{4.b}.\sqrt{(b^2 + 4y^2)}.\,8.\,y.\,dy$

Nun in 245 hie	X	p	a	c
	$4.y^2$	$\frac{1}{2}$	b^2	$\frac{\pi}{4.b}$, alſo

das Integral oder die geſuchte Fläche $= \frac{\pi}{6.b}.(b^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} +$ Conſt. Nun wird die Fläche vom Scheitel an gerechnet, alſo $0 = \frac{\pi}{6.b}.b^3 +$ Conſt, und die Fläche iſt $= \frac{\pi.}{6.b}((b^2 + 4.y^2)^{\frac{3}{2}} -- b^3)$

II. Satz.

Am Scheitel einer Parabel iſt eine Tangente gezogen. Sie dreht ſich um dieſe Tangente Fläche des Körpers.

1. Wenn An Un. IV. Taf. 35. Fig. AM die Hälfte der Parabel iſt, AD die Tangente, ſo beſchreibt AM die Fläche des Körpers auf einer Seite des Kreiſes welchen bey dieſem Herumdrehen der Parabel Axe beſchreibt. Die andre Hälfte der Parabel beſchreibt was gleiches und ähnliches auf der andern Seite des genannten Kreiſes. Die Fläche iſt auſen hohl, kehrt ihre erhabne Seite gegen die Tangente.

2. Man betrachte alſo was von dem Bogen AM beſchrieben wird. Es iſt $AD = y$; $DM = x$ und das Element dieſer Fläche $= 2\pi . x . ds$.

4. Nun iſt $ds = \frac{dy. \sqrt{(b^2 + 4y^2)}}{b}$ alſo das Differential der Fläche $= \frac{2\pi. y^2.}{b^2} \sqrt{(b^2 + 4y^2)}. dy = \frac{2.\pi.}{b} \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{b^2}\right)}. y^2. dy$

5. Man ſetze $\frac{2. y}{b} = \text{tang}\, \varphi$, daher $y = \frac{b. \text{tang}\, \varphi}{2}$; $dy = \frac{b. d\, \text{tang}\, \varphi}{2}$; ſo wird dieſes Differential $= 2. \pi. \frac{b^2}{8} \cdot \sec \varphi. \text{tang}\, \varphi^2. d\, \text{tang}\, \varphi$

6. Was

6. Was auf den Winkel ankömmt, iſt $\sec\varphi.$
$(\sec\varphi^2 - 1).\ \sec\varphi^2.\ d\varphi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}$

7. In (403; XV) ſey $\psi = 90^\circ - \varphi$, alſo $\cos\varphi = \sin\psi$, ferner $d\varphi = -\,d\psi = + \frac{d\cos\psi}{\sin\psi}$

8. So verwandelt ſich (6) in $+ \frac{d\cos\psi}{\sin\psi^6} - \frac{d\cos\psi}{\sin\psi^4}$

9. Von dieſen beyden Differentialen findet ſich das erſte in (403; XV) mit dem Zeichen —; weil es nun hie das Zeichen + hat, ſo nehme man das dortige Integral, mit entgegengeſetzten Zeichen (403; XVIII).

10. Das zweyte Differential in (8) findet ſich, ſo wie es da ſteht in (403; XIV), man behält alſo das dortige Integral mit ſeinen Zeichen.

11. So ſind die beyden Integrale

$$+\frac{\sin\varphi}{4.\cos\varphi^4} + \tfrac{3}{8}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{8}.\log\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$- \tfrac{1}{2}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} + \tfrac{1}{4}.\log\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

zuſammen

$$= \frac{\sin\varphi}{4.\cos\varphi^4} - \tfrac{1}{8}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} - \tfrac{1}{8}.\log\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

12. Dieſes mit $\frac{1}{4}. \pi. b^2$ multiplicirt, giebt das Integral des Differentials in (6)

13. Man könnte Sinus, Coſinus, und Tangente alle durch y ausdrucken, offenbar aber gäbe das einen Ausdruck deſſen Anwendung viel mühſamer ſeyn würde.

III. Satz.

Eine Ellipſe dreht ſich um ihre groſſe Axe. Fläche des Sphäroids?

1. Die groſſe Axe = a; die kleine = c; Abſtand jedes Brennpuncts vom Mittelpuncte = e $= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)}$; Abſciſſe auf der groſſen Axe aus dem Mittelpuncte u; Ordinate $y = \frac{1}{2} c. \sqrt{\left(1 - \frac{4u^2}{a^2}\right)}$

2. Daraus $dy = -\frac{c^2. u. du}{a^2. y}$; $ds = \frac{1}{2} c. \sqrt{\left(1 - \frac{16. e^2. u^2}{a^4}\right)}. \frac{du}{y}$

3. Der Fläche Differential $2. \pi. y. ds = \pi. c. \sqrt{\left(1 - \frac{16. e^2. u^2}{a^4}\right)}. du$

4. Man vergleiche dieſes Differentials veränderlichen Factor mit An. Un. 273.

Das

Das dortige x ſetze man hie $= \frac{4.e.u}{a^2}$ Alſo dann aber, wird das dortige dx hie $= \frac{4.e.du}{a^2}$

5. Man drucke alſo der Fläche Differential ſo aus $\frac{\pi.c.a^2}{4.e} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{16.e^2.u^2}{a^4}\right)} \cdot \frac{4.e.du}{a^2}$

6. Es iſt bejaht, wenn du bejaht iſt. Die Fläche wächſt alſo wenn u wächſt.

Nun iſt des Sphäroids Aequator der Kreis den die halbe kleine Axe beym Umdrehen beſchreibt, und u der Abſtand jedes Parallels vom Aequator.

Man rechnet alſo die Fläche vom Aequator, ſie iſt $= 0$ wo $u = 0$; Und $u = \frac{1}{2} a$ giebt die Fläche des halben Sphäroids zwiſchen Aequator und Pol.

7. Nun ſetze man in An. Un. 274; $\delta =$ Bog ſin $\frac{4.e.u}{a^2}$; So kömmt die Fläche $= \frac{\pi.a^2.c}{4.e} \cdot (\frac{1}{2}.\delta + \frac{1}{4}.\sin 2\delta)$ Sie iſt $= 0$ wie gehörig für $u = 0$.

8. Für das halbe Sphäroid iſt $2.u = a$ alſo $\delta =$ Bog ſin $\frac{2e}{a}$ Der Sinus des Doppelten dieſes Bogens iſt $= \frac{4.e.c}{a^2}$

9. Alſo die Fläche der Hälfte des Sphäroids $= \frac{\pi . a^2 . c.}{4. e} \left(\frac{1}{2} \text{Bog sin} \frac{2. e}{a} + \frac{e. c}{a^2} \right)$

10. Und die Fläche des ganzen $= \frac{\pi . c}{2} . \left(\frac{a^2}{2e} . \text{Bog sin} \frac{2e}{a} + c \right)$

11. Man drucke den Bogen durch ſeinen Sinus nach An. Un. 281 aus, ſo kömmt in (10) die ganze Fläche $= \frac{\pi . c}{2} . \left(c + a. \left(1 + \frac{1}{6} . \left(\frac{2. e}{a} \right)^2 + \frac{3}{40} . \left(\frac{2. e}{a} \right)^4 \ldots\ldots \right) \right)$

Die Reihe nähert ſich allemahl, ſchnell wenn die Ellipſe wenig vom Kreiſe unterſchieden iſt.

12. Iſt die Ellipſe ein Kreis, alſo $e = 0$ ſo kömmt in (11) wie gehörig die Kugelfläche $= \pi . a^2$

13. Wenn e abnimmt, ſo hat das Product $\frac{a^2}{2. e} . \text{B sin} \frac{2. e}{a}$ in (10) einen Factor der immer wächſt, und einen der immer abnimmt, der erſte wird unendlich, der zweyte verſchwindet für $e = 0$; was alſo da ihr Product wird, müſſte man beſonders unterſuchen, wenn man die Kugelfläche aus (10) berechnen wollte. Die Reihe zeigt was dieſe Unterſuchung gäbe.

IV. Satz.

IV. Saz.

Eine Ellipſe dreht ſich um ihre kleine Axe. Fläche des Sphäroids?

1) Die Gröſſen die zur Ellipſe gehören werden benennt, wie vorhin beym Umdrehen um die groſſe Axe.

2) Jezo aber iſt des Sphäroids Aequator der Kreis, welchen die halbe groſſe Axe beym Umdrehen beſchreibt, und jeder Parallel hat einen Halbmeſſer $= u$, ſein Abſtand vom Aequator iſt $= y$. Der Fläche Differential $= 2.\pi.u.ds$. Iſt es bejaht ſo wird die Fläche vom Aequator gegen den Pol gerechnet, ſoll ſie ſelbſt im Aequator anfangen ſo muß man das Integral ſo nehmen, daß es für $u = \frac{1}{2}a$ oder $y = 0$ verſchwindet.

3) Nun $du = -\frac{a^2.y.dy}{c^2.u}$; $ds = \frac{1}{2}a.\sqrt{}$
$$\left(1 + \frac{16.e^2.y^2}{c^4}\right).\frac{dy}{u}$$

4) Man ſetze $\frac{4.e.y}{c^2} = \text{tang}\,\varphi$ alſo $dy =$
$$\frac{c^2}{4.e}.\ d\,\text{tang}\,\varphi$$

5) So iſt das Differential der Fläche $=$
$$\frac{\pi.a\,c^2}{4.e}.\ \text{ſec}\,\varphi.\ d\,\text{tang}\,\varphi$$

6) Was

6) Was auf den Winkel ankömmt iſt $= \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}$. Man ſetze $\varphi = 90^\circ - \psi$ ſo iſt was auf den Winkel ankömmt $= \frac{+ d \cos\psi}{\sin\psi^4}$

7) Dieſes Differential, aber mit dem Zeichen —, ſteht (403; XIV). Vermöge (403; XVIII) nimmt man alſo das dortige Integral mit entgegengeſetzten Zeichen. Es iſt ſolchergeſtalt

$$= \frac{+ \sin\varphi}{2.\cos\varphi^2} - \tfrac{1}{2}.\log\tan g\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

8) Es verſchwindet für $y = 0$; wie vermöge (2) ſeyn ſoll, und giebt mit $\frac{\pi.ac^2}{4.e}$ multiplicirt, die unbeſtimmte Fläche (5)

9) Aus (4) folgt $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$

$$= \frac{\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)}}{c^2} \text{ und } \sin\varphi$$

$$= \frac{4.e.y}{\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)}}$$

10) Das giebt des Integrals in (7) erſten Theil $= \frac{2.e.y.\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)}}{c^4}$

11) We-

11) Wegen des andern Theils muß man wiſſen daß $\tang (45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = \sec\varphi - \tang\varphi$;

12) Daraus kömmt der andre Theil $= - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)} - 4.e.y}{c^2} \right)$

13) Beyde Theile (10; 12;) zuſammengefügt und mit dem (8) angezeigten Factor multiplicirt, kömmt die unbeſtimmte Fläche $= \frac{\pi.a.y}{2.c^2} . \sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)} - \frac{\pi.a.c^2}{8.e} . \log \left(\frac{\sqrt{(c^4 + 16.e^2 y^2)} - 4.e.y}{c^2} \right)$

Fläche des halben Sphäroids.

14) Da iſt $y = \frac{1}{2} c$, $c^4 + 16.e^2.y^2 = e^2.a^2$ alſo in (13) der erſte Theil $= \frac{\pi.a^2}{4}$

15) Was hinter dem Zeichen des Logarithmen ſteht iſt $= \frac{a - 2.e}{c}$; das Quadrat davon iſt $\frac{(a - 2e)^2}{a^2 - 4.c^2} = \frac{a - 2e}{a + 2e}$ alſo, der logarithmiſche Theil $= - \frac{\pi.a.c^2}{16.e} \log \frac{a - 2e}{a + 2e}$.

Fläche

Fläche des ganzen Sphäroids.

16) Iſt $= \frac{\pi . a^2}{2} + \frac{\pi . a . e^2}{8 e} . \log \frac{a e 2 . e}{a - 2 . e}$

17) In An. Un. 223; ſetze man das dortige u hie $= \frac{2 e}{a}$ und das dortige a hie $= 1$ weil die Rede von natürlichen Logarithmen iſt. Druckt man ſolchergeſtalt den Logarithmen in (16) durch die Reihe aus, ſo bekömmt man:

18) Die Fläche des ganzen Sphäroids $= \frac{\pi . a^2}{2} + \frac{\pi . c^2}{2} . \left(1 + \frac{1}{3} . \left(\frac{2 . e}{a}\right)^2 + \frac{1}{5} . \left(\frac{2 e}{a}\right)^4 + \frac{1}{7} . \left(\frac{2 e}{a}\right)^6 \ldots\ldots\right)$ Die Reihe nähert ſich allemahl, und deſto ſchneller je kleiner $\frac{e}{a}$ iſt, je näher die Ellipſe dem Kreiſe kömmt.

19) Man nenne die Reihe $= 1 + R$ ſo daß der zweyte Theil $= \frac{\pi . c^2}{2} . (1 + R) = \frac{\pi . c^2}{2} + \frac{\pi . c^2}{2} . R$. Weil nun $c^2 = a^2 - 4 . e^2$; ſo wird die Fläche des ganzen Sphäroids $= \pi . a^2 - 2 . \pi . e^2 + \frac{\pi . c^2}{2} . R$

20) Das

20) Das erſte dieſer drey Glieder iſt die Fläche einer Kugel deren Durchmeſſer die groſſe Axe wäre. Von dieſer Fläche zieht man das zweyte Glied ab, und addirt das dritte ſo hat man des Sphäroids Fläche. Wenn die Eccentricität klein iſt, ſo berechnet man bequemer, den kleinen Unterſchied von der Kugelfläche, als nach (18) was zu der halben Kugelfläche muß addirt werden.

21) Wird die Ellipſe ein Kreis, alſo $e = 0$, ſo fallen die beyden letzten Glieder weg, und bleibt die Kugelfläche.

22) Hätte man in (16) den natürlichen Logarithmen aus Tafeln, oder berechnete man ihn aus dem briggiſchen, ſo entbehrte man die Reihe.

23) Exempel. Es ſey $a = 10$; $e = 8$; alſo $2.e = 6$; $\frac{a + 2e}{a - 2e} = 4$, ſo iſt des Sphäroids Fläche $= \pi.(50 + \frac{80}{3}.\log nat\ 4)$ Nun iſt $\log nat\ 4 = 1,386294361...$ Das giebt die Fläche $= \pi.\ 86,96784963...$ Quadrate des Maaſſes mit welchem die Linien ſind ausgemeſſen worden.

24) Aber wenn e irrational iſt, und $\frac{a + e}{a - e}$ ſich nur durch Näherung, in Zahlen mit viel Ziffern, ausdrucken läſſt, müſſte man wohl auch bey Tafeln der natürlichen Logarithmen wie die wolframiſchen ſind Proportionaltheile brauchen.

25) Die Berechnung der Fläche des elliptiſchen Sphäroids beyder Art, lehre ich in meiner weitern Ausführung der mathematiſchen Geographie (1795) III. Abſchnitt.

26) Aus (13) läſſt ſich jedes Stück der Fläche vom Aequator an, berechnen, und wenn man ein ſolches Stück von einem gröſſern abzieht giebt ſich der Streifen, welcher des gröſſern Ueberſchuß ausmacht, eine Zone.

So könnte man die fünf geographiſchen Zonen finden, die in (Geogr. 42) für die Kugel berechnet ſind.

Lulofs Kenntniß der Erdkugel 601 u. f. §. berechnet ſie für Maupertuis Geſtalt der Erde, aber mühſam durch unendliche Reihen.

V. Satz.

Berechnung der Fläche der Erde als eines eingedruckten Sphäroids, in geographiſchen Quadratmeilen.

1) Alſo, $a = \frac{5400}{\pi}$; $\log a = 3{,}2352439$.

2) Die Fläche einer Kugel deren Aequator 5400 Meilen im Umfange hat, habe ich genau berechnet; Geometr. Abh. II. Samml. 22. Abh.

3) Hie alſo wäre nur zu ſuchen wie viel von ihr die Fläche des Sphäroids unterſchieden iſt. Das kömmt auf die Geſtalt der Erde an.

3) Ich

3) Ich ſetze wie Geogr. 16; $c = \frac{230}{231} \cdot a$ alſo $\frac{c}{a} = 0{,}99567$.

4) Alſo 4. $e^2 = \frac{231^2 - 230^2}{231^2} \cdot a^2$ und 2.

$$c = \frac{\sqrt{461}}{231} \cdot a$$

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2} \cdot \log 461 & = 1{,}3318504 \\ \log 231 & = 2{,}3636120 \\ \hline \log \frac{2e}{a} & = 0{,}9682384 - 2 \end{array}$$

5) Von dieſem Logarithmen iſt das

Doppelte $= 0{,}9364768 - 3$
Vierfache $= 0{,}8729536 - 5$
Sechsfache $= 0{,}8094304 - 7$

6) Daher von $\frac{2e}{a} = 0{,}092947$; das

Quadrat $= 0{,}00863926$
Vierte Pot. $= 0{,}000074636$
Sechſte P. $= 0{,}0000006448$

7) Dieſe Zahlen nach der Ordnung mit 3; 5; 7; dividirt geben

$$\begin{array}{r} 0{,}00287975 \\ 14927 \\ 92 \\ \hline 0{,}00302994 \end{array}$$

8) Der

8) Der achten Potenz höchſte Zifer wäre von der Ordnung — 9; und in (7) fehlen durchgängig die Zifern von der Ordnung — 8. Die geſundne Zahl iſt alſo kleiner als R. Ich will annehmen das noch fehlende betrüge eine Einheit von der Ordnung — 7 und ſetze alſo R = 0,00303

9) Nun iſt

$\log \left(\frac{230}{231}\right) = 0{,}9981158 - 1$

$\log a = 3{,}2352439$

$\log c = 3{,}2333597$

verdoppelt $= 6{,}4667194$

$\log \frac{1}{2}\pi = 0{,}1961199$

$\log R = 0{,}4814426 - 3$

$\log \frac{\pi.\ c^2.\ R}{2} = 4{,}1442819$

10) $\log \frac{4.\ e^2}{a^2} = 0{,}9364768 - 3$ (5)

$2 \log a = 6{,}4704878$ (1)

$\log 4.\ e^2 = 4{,}4069646$

$\log \frac{1}{2}\pi = 0{,}1961199$

$\log 2.\ e^2.\ \pi = 4{,}6030845$

11) So iſt

$-2.\ c^2.\ \pi = -40094$

$+\frac{1}{2}.\ \pi.\ c^2.\ R = +13940$

-26154

$\pi a^2 = 9281916$

Fläche des Sphäroids $= 9255762$

12) So

12) So viel Geographiſche Quadratmeilen findet man für die Erdfläche vermitteiſt der Logarithmen. Verlangte man gröſſere Schärfe, ſo müſſte man mit den Zahlen ſelbſt rechnen, auch die Reihe R weiter fortſetzen.

13) Wolframs Tafeln der natürlichen Logarithmen die ſich bey den ſchulziſchen Tafeln beſinden könnte man hie zur Vergleichung ſo brauchen.

14) Es wird verlangt $\frac{1}{4}$ log nat $\frac{a + 2.c}{a - 2.c}$

Da nun hie $\frac{2c}{a} = 0,092947$; $1 - \frac{2.c}{a} =$ 0,907053 ſo iſt das Verlangte, beynah $= \frac{1}{4}$. log nat $(\frac{1093}{907})$

Nun aus erwähnten Tafeln, der natürliche Logarithme von

1093; = 6,99668I488
907; = 6,810142450

Unterſchied = 0,186539038
$\frac{1}{4}$ deſſelben = 0,046634759

Das iſt ein wenig mehr als das Geſuchte, weil ich in dem Quotienten deſſen Logarithmen ich aus den Tafeln nehme, den Dividend zu groß geſetzt habe, den Diviſor zu klein.

15) Braucht man für den natürlichen Logarithmen die Reihe, ſo iſt log nat $\frac{a + c}{a - c} = \frac{4.c}{a}$. $(1 + R)$, der vierte Theil davon iſt das Geſuchte.

 16)

16) Nun $\log \frac{2e}{a} = 0{,}9682384 - 2$ (4)
$\log R = 0{,}4814426 - 3$ (9)

$0{,}4496810 - 4$

giebt $\frac{2.\,e.}{a}\,R = 0{,}00028163$

aber $\frac{2.\,e}{a} = 0{,}092947$ (6)

Summe $= 0{,}0932286$
deren Hälfte $= 0{,}0466143$

17) Dieſe Hälfte $= \frac{e}{a} \cdot (1 + R)$ ſtimmt bis auf die Ordnung $- 4$ mit (14) überein, die folgenden Zifern betragen weniger, als die folgenden in (14) Auch war das in (14) gefundne etwas zu groß.

18) In meiner weitern Ausführung der Geographie III. Cap. 3. Abſchn. 35. §. habe ich die Fläche des Sphäroids für $\frac{c}{a} = 0{,}99535$ berechnet und $= 9228724$ Quadratmeilen gefunden. Man ſieht was für einen Unterſchied die unterſchiednen Werthe von $\frac{c}{a}$ geben.

In der geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 22. Abh. finde ich die Fläche einer Kugel deren Aequator, des Sphäroides Aequator wäre $=$ 9281916 Quadratmeilen.

VI. Satz.

VI. Saz.

Eine Hyperbel dreht ſich um ihre groſſe Axe; Fläche des Konoids.

1. Vorläufig iſt klar, daß von den beyden entgegengeſetzten Hälften der Hyperbel wie in An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. MAm, RBS, ſind, jede ihr eignes Konoid giebt, nimmt man von einer Hälfte ſoviel als von der andern, ſo ſind die beyden Konoide gleich und ähnlich. Eigentlich machen beyde zuſammen, in eben der Bedeutung einen Körper aus, in welcher die beyden Hälften der Hyperbel, eine krumme Linie ſind. Es iſt aber auch eben ſo natürlich, eine Hälfte dieſes Körpers für ſich zu betrachten.

2. Daraus folgt die beſte Art, dieſe Betrachtung anzuſtellen, daß nähmlich was dabey zum Grunde gelegt wird, für eine Hälfte wie für die andre gilt. Solchergeſtalt brauche man für die Hyperbel die Gleichung wo die Abſciſſen aus dem Mittelpuncte gerechnet werden.

3. Wie aber An. endl. Gr. III. T. 14. Fig. in dem Raume EACe nichts von der Hyperbel iſt, ſo iſt auch von dem Konoide, nichts in dem Raume den das Dreyeck ECA um CA gedreht, beſtimmt; Und der Anfang des Konoids iſt in A. Alles von ihm liegt auf einer Seite des Kreiſes den AE bey erwähntem Umdrehen beſchreibt.

4. Nun heiſſe die groſſe Axe $= a$; die kleine $= c$; Abſciſſe auf der groſſen vom Mittelpuncte $= u$; Ordinate $= y = \frac{c}{2a} \cdot \sqrt{(4u^2 - a^2)}$;

$$dy = \frac{c^2 . u . du}{a^2 . y}$$

Der Abſtand jedes Brennpuncts vom Mittelpuncte ſey $= e = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$ (An. endl. Gr. 405), ſo kömmt $ds = \frac{c . du}{2 . y} . \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . u^2}{a^4} - 1\right)}$

5. Daher, das Differential der Fläche des Konoids, $2 . \pi . y . ds = \pi . c . \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . u^2}{a^4} - 1\right)} . du$.

6. Die Fläche, fängt vom Scheitel der Hyperbel an, (3) wächſt mit u; das Integral muß alſo ſo genommen werden, daß es für $u = \frac{1}{2} a$ verſchwindet.

7. Man ſetze $\frac{4 . e . u}{a^2} = \sec \varphi$; daher $du = \frac{a^2}{4 . e} . d \sec \varphi$, ſo iſt das Differential der Fläche

$$= \frac{\pi . c . a^2}{4 . e} . \tang \varphi . d \sec \varphi$$

8) Der

8. Der veränderliche Factor, welcher nur auf den Winkel ankömmt, wird ſo entwickelt: $d\,\mathrm{sec}\,\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi^2} = +\frac{\sin\varphi.\,d\sin\varphi}{\cos\varphi^3}$ das mit der Tangente multiplicirt giebt $\frac{\sin\varphi^2.\,d\sin\varphi}{\cos\varphi^4}$

$$= \frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi^4} - \frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi^2}$$

9. Man ſetze $\varphi = 90^\circ - \psi$ ſo wird das Differential (7) $\frac{d\cos\psi}{\sin\psi^4} - \frac{d\cos\psi}{\sin\psi^2}$ und davon das Integral nach (403; XIV; IX; XVIII)

$$\frac{\sin\varphi}{2.\cos\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\log\tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) + \mathrm{Const.}$$

Es muß nähmlich ſo genommen werden, daß es für $u = \frac{1}{2}a$ verſchwindet.

10. Es ſey (7) $\frac{2.\,e}{a} = \mathrm{sec}\,\varkappa$, ſo iſt $\frac{\sin\varkappa}{2\cos\varkappa^2} + \frac{1}{2}\log\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varkappa) + \mathrm{Const} = 0.$

11. So kömmt die Fläche (7) $\frac{\pi.\,c.\,a^2}{4.\,e}$.

$$\left\{\frac{\sin\varphi}{2.\cos\varphi^2} - \frac{\sin\varkappa}{2.\cos\varkappa^2} + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varkappa)}\right)\right\}$$

12. Das in Klammern eingeſchloſſne iſt =

$$\frac{e}{a^2}.\left(\frac{2u}{a^2}.\sqrt{(16.e^2.u^2-a^4)}-c\right)$$

$$+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\frac{4.e.u}{a^2}-\sqrt{\left(\frac{16.e^2.u^2}{a^4}-1\right)}}{\frac{2.e}{a}-\sqrt{\left(\frac{4.e^2}{a^2}-1\right)}}\right\}$$

Der Logarithme aus dem Satze daß tang $(45^\circ - \frac{1}{2}\varkappa) = \sec\varkappa - \tang\varkappa$; ohnſtreitig iſt der Ausdruck durch die Winkel in (11) bequemer.

VII. Satz.

Eine Hyperbel dreht ſich um ihre kleine Axe Fläche des Körpers?

1) Die äuſre Fläche des Körpers iſt hohl. Die erhabene Seite der Fläche gegen die kleine Axe gekehrt. Eine Vorſtellung giebt An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. Wenn ſich die Hyperbel MAm um Dd als Axe drehte.

2) Alles alſo zur Hyperbel gehörige wie vorhin beym Drehen um die groſſe Axe genannt, iſt hie der Halbmeſſer des Kreiſes deſſen Umfang von M beſchrieben wird, ein Perpendikel von M auf Dd alſo = u; und das Differential der geſuchten Fläche = 2. π. u. ds.

3) Der Kreis den CP beſchreibt, theilt die Fläche in zwo ähnliche Hälften, von denen ich nur eine betrach-

betrachte, die überall von einem Bogen wie AM begränzt wird. Sie fängt an wo $y = 0$ oder $u = \frac{1}{2} a$.

4) Die entgegengeſetzte Hälfte der Hyperbel RBS, begränzt beym Herumdrehen keine andre Fläche, weil ſie immer in die Stellen der vorigen kömmt. .. wie bey der Kugel, ein Halbkreis in die Stelle des andern. ....

5) So entſteht ein Körper deſſen äuſere Fläche ringsherum hohl iſt, mit einer Ebene durch Dd geſchnitten, zeigt er allemahl die beyden entgegengeſetzten Hälften der Hyperbel.

6) Nun iſt $du = \frac{a^2 . y . dy}{c^2 . u}$; daher $ds = \frac{\sqrt{(c^4 . u^2 + a^4 . y^2)}}{c^2 . u} . dy$

7) Daraus das Differential der Fläche (2) $= \pi . a . \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . y^2}{c^4} + 1\right)} . dy$

8) Wenn $\frac{4 . e . y}{c^2} = \text{tang}\, \varphi$, iſt das Differential $= \frac{\pi . a . c^2}{4 . e} . \text{ſec}\, \varphi . d\, \text{tang}\, \varphi$.

9) Deutlich iſt das Integral von $\text{ſec}\, \varphi . d\, \text{tang}\, \varphi = \text{ſec}\, \varphi . \text{tang}\, \varphi$ weniger dem Integrale von $\text{tang}\, \varphi . d\, \text{ſec}\, \varphi$. Alſo, aus vorigem Satze (9) $= \frac{1}{2}$.

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tang} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi)$, und die Conſt = o weil das Integral für y = o verſchwinden ſoll.

10) Folglich iſt die geſuchte Fläche $= \frac{\pi . ac^2}{8e} \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} - \log \operatorname{tang} (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \right)$

11) Begreiflich iſt der Winkel in dieſem Satze, nicht einerley mit dem im Vorigen, den eben der Buchſtabe benennt.

VIII. Satz.

Geſchichte der Unterſuchungen dieſes Gegenſtandes.

Hugenius, horologium oſcillatorium P. III. poſt Prop. IX. p. 75. der Ausgabe in fol. Par. 1673. lehret: Conoidis parabolici ſuperficiei circulum aequalem inuenire; ſphaeroidis oblongi, ſ. c. ae. i ſphaeroidis lati, ſiue compreſſi... Conoidis hyperbolici ... Es ſind die Flächen die beſchrieben werden, wenn ſich die krummen Linien um ihre Axen drehn. Auch lehrt er: Curuae parabolicae aequalem rectam lineam inuenire.

Er giebt nur die Sätze, ohne Beweis, die Verwandlung der Fläche des paraboliſchen Konoids in einen Kreis, hat er 1657 gehabt; das Jahr

Jahr darauf die Flächen der übrigen Körper ſo zu verwandeln gefunden, und die Entdeckung, an Paſcal u. a. in Frankreich, auch in England an Wallis geſchickt, ohne Beweiſe. Der letzte hat bald darauf, bekannt gemacht, was er hierin geleiſtet, · fecitque vt noſtris demonſtrationibus perficiendis ſuperſederem, ſagt Hugen, und fügt nur die Conſtructionen bey.

Durch eine Reihe Verzeichnungen findet er den jedesmaligen Halbmeſſer des Kreiſes. Ich habe mir für das paraboliſche Konoid, und das länglichte elliptiſche Sphäroid, ſeine Vorſchriften in analytiſchen Zeichen ausgedruckt, und mit meinen übereinſtimmend gefunden. Auf die übrigen habe ich die Zeit nicht wenden mögen. Beym zuſammengedruckten Sphäroid braucht er die Länge eines paraboliſchen Bogens, beym hyperboliſchen Konoid, Quadratur der Hyperbel. Man ſieht wie dieſes mit den Logarithmen die ich brauche übereinſtimmt. Praktiſche Darſtellung ſolcher Flächen geben Hugens Vorſchriften nicht, wenn man nicht, wenigſtens die Länge von Kreisbogen, die Fläche von Hyperbeln, durch Rechnung findet.

Am Ende von Walliſens Tractat de Cycloide findet ſich ein langer Brief an Hugen. In Iohannis Wallis Opera Mathematica Tom. I. Oxon. 1699. fängt ſich dieſer Brief 542 S. an. Sein Innhalt betrifft Länge krummer Linien durch gerade, und krummer Flächen Gröſſe, durch ebener ihre, gege-

gegeben; ... curuarum εὐθυνσις et πλατυσμος..
Wie er Rectification griechiſch nennen ſoll, iſt er zweifelhaft, 550 S.: de curuarum (Ευθυνσει dicam) an Ευθυσμῳ. In der Ueberſchrift hat er ſich für Ευθυνσις erklärt.

Dieſer grammatiſche Zweifel führt auf eine hiſtoriſche Bemerkung: Wallis, der die griechiſchen Mathematiker ſo gut kannte, muß bey keinem etwas gefunden haben das ſich darauf bezieht: eine gerade Linie anzugeben die ſo lang iſt als eine krumme.

Von der Fläche des paraboliſchen Konoids redet er daſ. 555 S. und von den elliptiſchen Sphäroiden, 558 S. Er bedient ſich ſeiner Arithmeticae infinitorum, und vergleicht die Flächen, mit Flächen von Cylinder und Kugel. Das hyperboliſche Konoid erwähnt er daſelbſt nicht.

609. Aufg. Den Innhalt eines runden Körpers zu finden.

Aufl. Das Stücke von ihm, das zwiſchen den beyden Kreiſen enthalten iſt, die von PM und pm beſchrieben werden, iſt gröſſer als ein Cylinder, der Pp zur Höhe und den Kreis mit PM zur Grundfläche hätte, aber kleiner als ein Cylinder, deſſen Grundfläche der Kreis mit pm, bey eben der Höhe wäre. Beyde Cylinder aber nähern ſich einander unendlich. Alſo iſt das Differential des Körpers, den AM beſchreibt, ein Cylinder, deſſen Höhe Pp, die Grundfläche der Kreis mit PM wäre, oder es iſt $\pi y^2 dx$.

Exem-

Exempel.

610. I. Für die Kegelſchnitte iſt dieſes Differential $= \pi . (b x dx \mp \frac{b}{a} x^2 dx)$ alſo der unbeſtimmte Innhalt jedes Sphäroids oder Konoids von einem Kegelſchnitte $= \frac{\pi b x^2}{6a} \cdot (3a \mp 2x)$

II. Für die Kugel iſt $b = a$; und dieſer Innhalt $= \frac{\pi x^2}{6} \cdot (3a - 2x)$; welches für $x = a$ die ganze Kugel $= \frac{\pi a^3}{6}$ giebt wie G. 66 S.

III. Ein ganzes elliptiſches Sphäroid wird für $x = a$; $\frac{\pi b a^2}{6}$; und verhält ſich alſo zu einer Kugel, die a zum Durchmeſſer hat, wie $b : a$ oder wie $cc : aa$; wenn die andere Axe der Ellipſe c heiſſt (Alg. 366.).

IV. Wenn, groſſe Axe, Parameter, kleine Axe, Abſciſſe vom Scheitel, und Ordinate bey einer Ellipſe A; B; α; t; v; heiſſen, alſo ihre Gleichung $vv = Bt - \frac{B}{A} tt$ iſt; ſo heiſſe x eine Abſciſſe auf der kleinen Axe vom Scheitel der kleinen Axe genommen, und y die zugehörige Ordinate. Alsdenn iſt $x = \frac{1}{2} \alpha - v$; $y = \frac{1}{2} A - t$;

$-t$; und $\alpha = \sqrt{AB}$. Setzt man alſo $\frac{1}{2}\alpha - x$; und $\frac{1}{2}A - y$; ſtatt v und t; ſo kömmt $y^2 = \frac{A\alpha}{B}x - \frac{A}{B}x^2$; Man ſetze $\frac{A\alpha}{B}$ oder $\frac{A.A}{\alpha} = \beta$, ſo wird β der Parameter für die kleine Axe ſeyn, nähmlich die dritte Proportionallinie zu ihr und der groſſen, wie B die dritte zur groſſen und kleinen iſt, (Alg. 366) auch kömmt alsdenn $y^2 = \beta x - \frac{\beta}{\alpha}x^2$ eine Gleichung wie die, wo die Abſciſſen auf der groſſen Axe genommen wurden. Alſo können in I; b; a; c auch hier β; α; A bedeuten, und wenn ein Sphäroid aus der Umdrehung einer halben Ellipſe um ihre kleine Axe entſteht, ſo verhält es ſich zu einer Kugel, deren Durchmeſſer dieſe kleine Axe wäre $= \beta : \alpha$ oder wie $A.A : \alpha\alpha$ (IIII).

V. Das Sphäroid, die Kugel, und ein umſchriebener Cylinder, der die groſſe Axe zum Durchmeſſer, die kleine zur Höhe hat, heiſſen E; S; C; ſo iſt $S = \frac{\pi.\alpha^3}{6}$; $C = \frac{A.A\pi}{4}.\alpha$; $E = \frac{A.A.S}{\alpha.\alpha} = \frac{A.A.\pi.\alpha}{6} = \frac{4}{6}C = \frac{2}{3}C$. Aus dieſen Gründen hat Lulofs den Innhalt der ſphäroidiſchen Erde berechnet a. a. O. 56 §.

VI. Eine

VI. Eine Kugel, deren Durchmeſſer A iſt, heiſſe T; ſo iſt $T = \frac{A^3}{\alpha^3} \cdot S$ alſo $\frac{A.\,A}{\alpha.\,\alpha} \cdot S$ oder E $= \frac{\alpha.\,T}{A}$

VII. Wenn bey einem hyperboliſchen Konoid, $x = a$; ſo iſt der Innhalt dieſes Stücks $= \frac{5}{6} \pi b a^2$ Für ein Konoid einer gleichſeitigen Hyperbel aber iſt der unbeſtimmte Innhalt $= \frac{\pi x^2}{6} (3a + 2x)$.

VIII. Weil der unbeſtimmte Innhalt jedes ſolchen runden Körpers $= \pi b x^2 . \left(\frac{1}{2} \mp \frac{x}{3a} \right)$ (I) ſo wird er für den paraboliſchen, wo a unendlich iſt, $\frac{\pi b x^2}{2} = \frac{\pi x y^2}{2}$; halb ſo groß als ein umſchriebener Cylinder, der mit dieſem Stücke des paraboliſchen einerley Durchmeſſer $2y$ und einerley Höhe x hätte.

611. **Für Konoiden unendlicher Parabeln**, wo $y^m = x$ iſt $m y^{m-1} dy = dx$ alſo das Differential $\pi . m y^{m+1} dy$ und der Innhalt $\frac{m}{m+2} \cdot \pi y^{m+2} = \frac{m}{m+2} \cdot \pi y^2 x = \frac{m}{m+2}$ des umſchriebenen Cylinders.

612. Für den Körper, der aus Umdrehung der Kiſſoide (Alg. 470) um die Axe AB (Alg. III. T. 19. F.) entſteht. Das Differential iſt $\frac{\pi x^3 dx}{a - x}$;

aber $\frac{x^3}{-x + a} = - x^2 - ax - a^2 + \frac{a^3}{a - x}$;

alſo iſt der Körper $= \pi . (x. (- \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2} ax - a^2) - a^3 . l \frac{a - x}{a})$ wo $l \left(1 - \frac{x}{a} \right)$ einem eigentlichen Bruche zugehört, (Alg. 472.) und alſo verneint iſt, folglich im Integrale, da er mit − befindlich iſt, was bejahtes giebt.

Sucht man dieſen Logarithmen aus (220) und rechnet alles zuſammen, ſo wird der Körper

$$= \pi \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \ldots$$

Man ſetze $a = 1$; und $x = 1$ für den ganzen Körper; weil dieſes Innhalt durch $- l$ ($1 - 1$) gegeben wird, ſo iſt er unendlich, und zwar bejaht, denn wenn x in $1 - x$ bis an 1 wächſt, ſo wächſt der Logarithme von $1 - x$ als eine verneinte Gröſſe unendlich.

Aber hier giebt die nur gefundene Reihe für den ganzen Innhalt des Körpers $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \ldots$ welches alſo unendlich ſeyn muß. Joh. Ber-

Bernoulli hat dieſes aus andern Gründen hergeleitet Op. T. IIII. n. 150. Prop. 3. Cor. 3.

613. Für den Körper, der aus Umdrehung der logarithmiſchen Linie BCDE 15 F. um ihre Aſymptote OA entſteht.

Hier iſt das Differential $= \pi a y d y$ (217) alſo das Integral $= \frac{\pi a y^2}{2}$ welches mit y verſchwindet, und alſo den unendlich langen Körper bedeutet, den die Fläche zwiſchen der nach der Seite O hinaus unendlich verlängerten Aſymptote und dem ihr zugehörigen Stücke der logarithmiſchen Linie beſchreibt. Nachdem dieſer unendlich lange Körper alſo von den Kreiſen begränzt wird, die AB oder PC beſchreiben, iſt ſein Innhalt $\frac{\pi a}{2}$ mit AB^2 oder mit PC^2 multiplicirt; das iſt halb ſo groß als ein Cylinder, deſſen Höhe a und der Halbmeſſer AB oder PC wäre. Das Stück des Körpers alſo zwiſchen dieſen beyden Kreiſen iſt $\frac{\pi a}{2}(PC^2 - AB^2)$

614. Zuſ. Unendlich lange Körper können, nach Verſchiedenheit der Umſtände, endlich (613) oder unendlich (612) ſeyn.

615. Die Hyperbel BMCD 14 F. (212) drehe ſich um die Aſymptote AE man ſucht den Innhalt des erzeugten Körpers.

I. Sein Differential iſt $\pi . x^{-2m} a^{2m+2} dx$ alſo das Integral $\frac{\pi x^{1-2m} . a^{2m+2}}{1-2m}$

II. Wenn $m > \frac{1}{2}$; ſo verſchwindet dieſes Integral für $x = \infty$; alſo bedeutet es (wie 212) den unendlich langen Körper, der ſich von dem Kreiſe, den PM beſchreibt, nach DE hin erſtreckt. Dieſer iſt alſo $\frac{\pi a^{2m+2}}{AP^{2m-1} . (2m-1)}$ Iſt $AG = a$; ſo iſt dieſer Körper, von dem Kreiſe, den GC beſchreibt, an; $\frac{\pi a^3}{2m-1}$ alſo was zwiſchen den Kreiſen, die GC und PM beſchreiben, enthalten iſt, $\frac{\pi a^3}{2m-1} . \frac{(x^{2m-1} - a^{2m-1})}{x^{2m-1}}$

III. Dieſes giebt für $m = 1$ oder die gemeine Hyperbel $\pi a^3 . \frac{(x-a)}{x} = \frac{\pi a^3 : GP}{AP}$, und den unendlich langen Körper $\frac{\pi a^4}{x}$

IIII. Das Stück zwiſchen den Kreiſen, die PM und die Aſymptote AF beſchreiben, iſt unendlich groß, weil das Integral für $x = 0$ unendlich wird. Man hat alſo hier zwey unendlich

lange

lange Stücken eines Körpers, von denen eines endlich, das andere unendlich iſt.

V. Wenn $m = \frac{1}{2}$ iſt das Integral $\pi a^3 . l \frac{x}{a}$ und bedeutet den Körper, der zwiſchen den Kreiſen enthalten iſt die GC und PM beſchreiben, weil es für $x = a$ verſchwindet. Es wird ſo wohl für eine verſchwindende als für eine unendliche Abſciſſe unendlich, daß alſo hier beyde Stücken des Körpers, die ſich von dem Kreiſe, den GC beſchreibt, an, ins unendliche erſtrecken, unendlich ſind.

VI. Iſt $m < \frac{1}{2}$ ſo verſchwindet das Integral für $x = 0$ und bedeutet alſo, was zwiſchen den Kreiſen enthalten iſt, welche die Aſymptote AF, und PM, beſchreiben. Dieſer Körper iſt endlich, ob er ſich gleich an der Aſymptote AF unendlich weit hinaus erſtreckt, aber für eine unendliche Abſciſſe wird er unendlich.

VII. Wäre $m = 0$ ſo zeigte das Integral πaax einen Cylinder an, weil ſich die krumme Linie wegen der Gleichung $y = a$ in eine Parallele mit AE verwandelte.

VIII. Sollte ſich die krumme Linie um die Aſymptote AF drehen, ſo iſt $AP = y$; $PM = x$. Man kann ſich nähmlich durch M eine Parallele mit AE vorſtellen, die auf AF eine Abſciſſe = PM abſchneiden, und ſelbſt die Ordinate = AP

 ſeyn

ſeyn wird. So iſt $y^m = \frac{a^{m+1}}{x}$ alſo das Diffe-
rential des Körpers wie $a^{(2m+2):m} x^{-2:m} dx$
und das Integral wie $\frac{m}{m-2} \cdot a^{(2m+2):m}$
$x^{(m-2):m}$ welches ſich, wenn $m > 2$ mit $x = 0$ oder von A anfängt; aber für $m < 2$ verneint iſt, und das Stücke, das ſich an der unendlichen Aſymptote AF her bis an die Parallele mit AE durch M erſtreckt, bedeutet; (wie 212) für $m = 2$ wird das Integral $a^3 \, l \, \frac{x}{a}$ und fängt ſich an, wo $x = a$. Für die gemeine Hyperbel iſt es $- a^4 : x$.

616. Den Körper zu haben, den AMD 35 F. beſchreibt, indem ſich dieſe Figur um AC dreht, ziehe man den Körper, den AMP beſchreibt, von dem Cylinder ab, den APMD beſchreibt. Alſo iſt der gegenwärtig geſuchte Körper, $\pi . (y^2 x - \int y^2 dx)$.

In 611. wird er $\pi . \frac{2}{m+2} \cdot y^2 x$ oder $\frac{m}{m+2}$ Theile des Cylinders.

Von

Von hufförmigen Abſchnitten cylindriſcher Körper.

617. Erkl. Ueber der Ebene, welche von der krummen Linie AGBF 36 F. begränzt wird, ſtehe ein priſmatiſcher Körper (Alg. 528) dieſer werde mit einer ebenen Fläche geſchnitten, welche die Grundfläche in FG unter einem Winkel, deſſen Tangente g iſt, ſchneidet. Was von dem cylindriſchen Körper zwiſchen der ſchneidenden Ebene, und der Grundfläche enthalten iſt, will ich hier den Abſchnitt nennen. Wegen der Aehnlichkeit, die es mit einem Hufe hat, iſt es auch vngula genannt worden.

618. Aufg. Des Abſchnittes körperlichen Innhalt zu finden.

Aufl. Der Schnitt der ſchneidenden Fläche mit der Fläche des cylindriſchen Körpers ſey GMF. Man laſſe von einem willkührlichen Puncte deſſelben, das Loth MI auf die Grundfläche herab, das in des Körpers Fläche ſeyn wird, weil es ein ſenkrechter Körper iſt, folglich wird I in der krummen Linie AGBF ſeyn. Man ziehe IK mit GF parallel; K ſey ein anderer Durchſchnitt dieſer Parallele und der nur genannten krummen Linie. Auf die beyden Parallelen ziehe man AB und IQ ſenkrecht, ſo iſt MI = g. QI (G. 46 S. 7. Z. und 2 Erkl.) Die Parallelen werden von AB in N und P geſchnitten. Man nehme AB für die Abſciſſenlinie der Grundfläche an, und

nenne dieſe Abſciſſen von einem willkührlichen Puncte E gerechnet, EP = u; Ferner ſey die gegebene EN = c; Weil nun wegen der gegebenen Grundfläche; die Ordinaten PI; KP; durch die ihnen zugehörige Abſciſſe EP gegeben ſind, ſo kann man KI = z als eine Function der Abſciſſe anſehen.

Man ſtelle ſich über KI eine Ebene auf die Grundfläche ſenkrecht vor. Weil KIQ, KIM rechte Winkel ſind, ſo ſteht dieſe Ebene auch auf die Ebene MIQ ſenkrecht (Geom. 47 S.)

Vermöge nur angeführten Satzes ſteht die Ebene MIQ auch auf des Schnittes GMHF Ebene ſenkrecht, weil MQF, IQF, rechte Winkel ſind. Alſo ſtehn auf die Ebene MIQ die beyden Ebenen ſenkrecht, die des Schnittes, und die welche über KI auf der Grundfläche ſenkrecht ſteht. Dieſer beyden Ebenen Durchſchnitt, iſt alſo eine gerade Linie durch M, der Ebene MIQ ſenkrecht (Geom. 48 S.) folglich der IK parallel.

Schneidet alſo dieſe Parallele des Schnittes GMHF Umfang noch einmahl, ſo iſt dieſer zweyte Punct ſenkrecht über K ſo hoch als M über I, und von der Ebene welche über KI ſenkrecht auf der Grundfläche ſteht, zwiſchen die Ebenen der Grundfläche und des Schnittes fällt iſt ein Rechteck, deſſen Grundlinie IK, Höhe IM.

Dieſes Rechteck nun, beſtimmt ein veränderliches Stück des Abſchnittes, deſſen Gränzen folgende

gende ſind; 1) genanntes Rechteck; 2) ſo viel als von der ſchneidenden Ebene zwiſchen FG und ihren Durchſchnitt mit der nur genannten ſenkrechten Ebene fällt. 3) was von der Grundfläche zwiſchen FG und KI enthalten iſt; 4) die Theile der Fläche des cylindriſchen Körpers, die ſich auf einer Seite von F auf der andern von G bis an die ſenkrechte Ebene erſtrecken.

Um das Differential von dieſem Stücke des Abſchnittes zu finden, darf man ſich nur vorſtellen, die ſenkrechte Ebene rücke mit einer ſich ſelbſt parallelen Bewegung etwas unendlich weniges weiter von FG; ſo wird die Grundfläche von ihr in einer Linie geſchnitten werden, die mit KI parallel, und unendlich wenig davon unterſchieden ſeyn wird. Beyde nur genannte Parallelen, werden auf der Grundfläche ein unendlich kleines Viereck $= zdu$ zwiſchen ſich enthalten; Ueber dieſem Vierecke wird das geſuchte Differential ſtehn, das alſo als ein Priſma betrachtet, $= MI. zdu$ ſeyn wird.

Nun iſt $QI = u - c$; alſo das geſuchte Differential $g. (u - c) zdu$; welches ſo integrirt, daß es für $u = c$ verſchwindet; das veränderliche Stück des Abſchnittes giebt. Setzt man darinnen $u = EB$ ſo hat man den ganzen Abſchnitt.

619. Ex. Der Körper ſey ein Cylinder, alſo die Grundfläche ein Kreis. AB ſey ein Durchmeſſer, und E der Mittelpunct, r der Halbmeſſer, ſo iſt $z = 2\sqrt{(rr - uu)}$ und das Differential

rential $= g. 2udu. \surd(rr - uu) - 2cg \surd (rr - uu). du.$ Den erſten Theil zu integriren ſey

in 245; c; X; a; p
hier — g; uu; rr; $\frac{1}{2}$

ſo iſt dieſes erſten Theils Integral $- \frac{2}{3} g. (rr - uu)^{3:2}$;

Den zweyten Theil drucke man ſo aus —

$$2cgr^2. \surd\left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right). \frac{du}{r};$$ So iſt $\frac{u}{r}$ hier was

in 274; x iſt, und das Integral dieſes zweyten Theils iſt $- 2cgr^2. \frac{1}{4}.$

$$\left(2 \mathfrak{B} \sin \frac{u}{r} + 2 \frac{u}{r} \surd\left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)\right)$$

Weil beyde Integrale, des erſten und des zweyten Theils zuſammen für $u = c$ verſchwinden ſollen, ſo iſt

$$Const = + \frac{2}{3} g. (r^2 - c^2)^{\frac{3}{2}} + cgr^2.$$

$$\left(\mathfrak{B} \sin \frac{c}{r} + \frac{c}{r}. \surd\left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)\right)$$

Dieſe Const und die veränderlichen Integrale zuſammen geben alſo das veränderliche Stück des Abſchnitts.

Will man den ganzen haben, ſo ſetzt man $u = r$; da wird des erſten Theils veränderliches Integral $= 0$; und des zweyten ſeines

$= -$

$= - \frac{cgr^2\pi}{2}$. Dieſes und die Conſt zuſammen gerechnet, geben den ganzen Abſchnitt

$$g.\left(\tfrac{1}{3}.(2r^2 + c^2)\sqrt{(r^2-c^2)} - r^2 c \mathfrak{B} \cos\frac{c}{r}\right)$$

620. Der Innhalt des Abſchnittes iſt allemahl durch die Quadratur des Kreiſes gegeben, auſer wenn $c = 0$ oder FG durch den Mittelpunct geht. Alsdenn iſt des Abſchnittes veränderliches Stück $= \frac{2}{3}\, g.\,(r^3 - (rr - uu)^{3:2})$ und der ganze Abſchnitt $\frac{2}{3}\, gr^3$.

621. Aufg. Die Fläche des Abſchnittes zu finden.

Aufl. Die veränderliche Fläche des Abſchnittes, welche von den krummen Linien GI; MG; und der geraden MI begränzt wird, hat zum Differential MI mit ds; dem Differentiale der krummen Linie GI multiplicirt, und iſt alſo $g.\,(u-c)\,ds$, ſo integrirt, daß es für $u = c$ verſchwindet. Setzt man in dieſem Ausdrucke $u = EB$; ſo hat man die ganze Fläche, die zwiſchen die Bogen GB; GH; und die gerade Linie HB fällt, wenn H ſenkrecht über B iſt. Das andere Stück zwiſchen eben dieſer Linie und dem Bogen FB; FH; läſſt ſich auf eben die Art finden. Es wird ſo groß als jenes ſeyn, wenn AB die Grundfläche in ähnliche und gleiche Hälften theilt, zu welcher Abſicht, die Grundfläche eine Linie der zweyten Ordnung und AB ihre Axe ſeyn kann.

622. Im gebrauchten Exempel iſt das Differential der Fläche g. (u — c). $\frac{rdu}{\surd(rr - u^2)} =$

$gr u du. (rr - u^2)^{-\frac{1}{2}} - gcr. \frac{du:r}{\surd(1 - uu:rr)}$

Für des erſten Theils Integral iſt

in 245 c; X; a; p
hier $-\frac{1}{2}gr; -u^2; rr; -\frac{1}{2}$

Des andern Theils Integral findet ſich aus (281); alſo iſt die veränderliche Fläche Conſt — $gr\surd(r^2 - u^2) - gcr. \mathfrak{B} \sin \frac{u}{r}$ und Conſt $= gr\surd(r^2 - c^2) + gcr. \mathfrak{B} \sin \frac{c}{r}$ Alſo die Fläche bis an HB $= gr. \left(\surd(r^2 - c^2) - c\,\mathfrak{B} \cos \frac{c}{r}\right)$

Die ganze Fläche des Abſchnittes wird noch einmahl ſo groß ſeyn.

623. Zuſ. Auch die Fläche beruhet alſo auf der Quadratur des Kreiſes, auſer für $c = 0$; da die ganze Fläche $2gr^2$ iſt.

624. Für dieſen beſondern Fall iſt der Abſchnitt $= \frac{1}{3}r$ mit ſeiner Fläche multiplicirt; alſo ſo groß als eine Pyramide, die ſeine Fläche zur Grundfläche, und den Halbmeſſer zur Höhe hatte.

625. Anm.

625. Anm. Hertenſtein Miſc. Ber. Cont. I. p. 128. hat mit vieler Weitläuftigkeit, nur den Abſchnitt durch den Mittelpunct ſeinem körperlichen Innhalte nach, berechnet. Andere Exempel findet man bey der Agneſi; Inſt. Anal. L. III. §. 129. Kraft aber de vngulis cylindror. Comm. Ac. Petrop. T. VI. hat die Sache am vollſtändigſten abgehandelt. S. auch: Soliditas et area fruſtor. vngularium reſector. a cylindris rectis quor. baſes ſunt ſectiones conicae etiam altior. gener. ope calculi integral. inueſtigata a Ioſepho Stepling, S. I. Preſb. Dreſd. 1760. Priſmen wo die Grundfläche eine endliche Zahl Seiten hat, betrachtet Rothe, über die Ausrechnung ſchief abgeſchnittner Priſmen; Hindenburgs Archiv für reine und angewandte Mathematik; VI Heft 1797. 195 S.

Von Abſchnitten runder Körper.

626. Aufg. ADM 37 F. um die Axe AP gedreht, beſchreibt einen runden Körper; Man ſchneide ihn mit einer Ebene, welche auf die beſchreibende Ebene in einer gewiſſen Lage, dafür ich hier die vorgezeichnete Lage ADMP annehmen will, ſenkrecht iſt, und ſie in einer Linie DQ ſchneidet, die mit der Axe parallel iſt. Ich ſuche die Geſtalt des Schnittes.

Aufl. Man laſſe DS; MP; auf die Axe ſenkrecht, und Q ſey in MP; Nun heiſſe AS = c; DS = b; AP = c + z; PM = t; zwiſchen den beyden letzten iſt eine Gleichung gegeben. QC ſey der ſchneidenden Ebene Durchſchnitt mit der Ebene des Kreiſes, den PM bey der Herumdrehung

hung beſchreibt, und C ſey in dem Umfange dieſes Kreiſes; Auf die Ebene dieſes Kreiſes iſt DQ ſenkrecht, weil ſie mit AP parallel iſt, (G. 46; S.) und folglich auch die Ebene DQC (G. 47 S.) daher iſt QP; als der Durchſchnitt der Ebenen des Kreiſes und APM, auf DQC ſenkrecht (G. 48. S.) und PQC = R = DQC. Man nehme nun DQ = z; QC = y für rechtwinklichte Coordinaten des Schnittes DC an; ſo iſt $CP^2 = PM^2 = t^2 = y^2 + b^2$; dieſen Werth von t alſo, in die gegebene Gleichung zwiſchen c + z und t geſetzt, bekömmt man eine Gleichung zwiſchen z und y. Auch läſſt ſich eines von beyden, b oder c wegen der gegebenen Gleichung wegſchaffen.

627. Wenn AP die Linie ADM in ähnliche Hälften theilt, ſo enthält die Gleichung für ADM; nur Potenzen gerader Exponenten von t; und iſt alſo $\alpha t^2 + \beta t^4 \ldots = A + B(c + z) + C(c + z)^2 \ldots$

628. Man nehme zum Exempel die Kegelſchnitte; alſo

$$\begin{array}{l} tt = A + B.(c + z) + C.(c + z)^2 \\ bb = A + Bc \qquad\qquad + Ccc \\ \hline y^2 = (B + 2Cc).\ z + Cz^2 \end{array}$$

Soll t = o für c + z = o ſeyn, ſo iſt A = o. Wenn man nun dieſe Gleichungen mit dem gewöhnlichen Ausdrucke des Quadrats der Ordinate bey Kegelſchnitten $\beta x \mp \frac{\beta}{\alpha} x^2$ vergleicht, ſo

iſt

iſt für die Linie ADM, $\beta = B$, und $\frac{\beta}{\alpha} = C$;

oder der Parameter B; die Axe $\frac{B}{C}$ eben ſo für den Schnitt, der Parameter $B + 2Cc$ die Axe $\frac{B + 2Cc}{C}$; alſo hier der Schnitt der beſchreibenden Linie ähnlich. (Alg. 387) Wenn man alſo ähnliche Linien als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten anſieht, ſo verhalten ſich die ganzen Flächen der beſchreibenden Linie und des Schnittes wie die Quadrate der Axen (G. 42 S. 23. Z) oder wie $B.B : (B + 2Cc)^2$.

629. Aufg. **Den Abſchnitt des runden Körpers zu finden, der zwiſchen zwo parallelen Ebenen durch AP und DQ und der Ebene ADM die auf beyden ſenkrecht ſteht, enthalten iſt. Seine übrige Gränzen ſind, was von der krummen Fläche des Körpers, und von der Ebene des Kreiſes, den PM beſchreibt, zwiſchen die genannten Ebenen fällt.**

Aufl. Wenn man ſich eine Ebene mit DQC parallel, und unendlich nahe daran vorſtellt, ſo wird zwiſchen dieſer Ebene und DQC das Differential des Abſchnitts fallen, den man ſucht. Dieſes Differential iſt alſo ein Priſma, deſſen Grundfläche DQC und die Höhe db das Differential der Linie SD wäre. Dieſe Linie iſt nähmlich

lich hier veränderlich, nachdem man den Punct D näher bey A oder weiter davon annimmt, den Abſchnitt zu verändern: Aber AP und folglich PM ſind jetzo unveränderlich, weil die Grundfläche des Abſchnittes, die Ebene, welche beym Herumdrehen von PM beſchrieben wird, unveränderlich bleiben ſoll.

Man quadrire alſo erſtlich die Fläche DQC aus der Gleichung zwiſchen z und y auf die gewöhnliche Weiſe. So wird man eine Function von t und b erhalten (627). Dieſe multiplicire man mit db und integrire ſie ſo, daß man t als unveränderlich, b als veränderlich anſieht, und das Integral für $b = 0$ verſchwindet. Dieſes wird der Innhalt des Abſchnittes ſeyn.

630. Ex. I. ADM ſey eine Parabel, wo in 627; $A = 0$ und $tt = B.(c + z)$ alſo $yy = Bz$; ferner $bb = B.c$ alſo die Fläche DQC $=$

$\frac{2}{3} zy$ (208) $= \frac{2y^3}{3B}$ wo $y^2 = \sqrt{(tt - bb)}$ folglich iſt das Differential des Abſchnittes $\frac{2}{3B} . (tt - bb)^{\frac{3}{2}} . db$

II. Man vergleiche dieß mit (401) ſo iſt

dorten	x	m	a	b	n	p
hier	b	0	t^2	-1	2	$\frac{1}{2}$

Alſo

Alſo $\int (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} . db = \frac{b. (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3 t^2}{4}$ $\int \surd (t^2 - b^2). db$

III. Nun iſt $\surd (t^2 - b^2) db = t db. \surd \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right)$

IIII. Es ſey alſo was in (274) x heiſſt hier $\frac{b}{t}$ ſo iſt der dortige Bogen δ hier B ſin $\frac{b}{t}$; und $\int \frac{db}{t} . \surd \left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) = \frac{1}{4} . (2\delta + \sin 2\delta)$

V. Folglich $\int (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} db = \frac{b (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$ $+ \frac{3}{16} . t^4 . (2\delta + \sin 2\delta) = \frac{1}{4} t^2 . (t. \cos \delta^3$ $+ \frac{3}{4} t^2 . (2\delta + \sin 2\delta))$ welches mit $\frac{2}{3 B}$ multiplicirt, den in (I) geſuchten Abſchnitt giebt.

VI. Für $b = t$; wird $\delta = \frac{1}{2} \pi$; das Integral in (V) $= \frac{1}{4} t^2 . \frac{3}{4} t^2 \pi$, alſo der geſuchte Abſchnitt $= \frac{\pi t^4}{8 B} = \frac{\pi t^2 . (c + z)}{8} = \frac{1}{4}$ des Sphäroids, das von AM beſchrieben wird (610; VIII). Wenn man nähmlich $b = t$ ſetzet, das

 iſt,

ſt, D in M rücken läſſt, ſo findet man den Theil des runden Körpers, den die Ebene AMP, und eine Ebene durch AP die auf vorige ſenkrecht ſteht, zwiſchen ſich enthalten.

630. Anm. Ich habe hier, nebſt der merkwürdigen Eigenſchaft der Schnitte (628) nur zeigen wollen, wie man die Formeln für die Integrirung irrationaler Differentiale braucht, auch in andern als vorhin betrachteten Fällen, die Differentiale der verlangten Gröſſen zu finden. Uebrigens ſind die Berechnungen des Innhalts und der Flächen anderer als runder und priſmatiſcher Körper, hier zu weitläuftig, und überhaupt auſer dem, was die gemeine Geometrie davon lehret, noch wenig unterſucht. So haben Varignon und Leibniz Miſc. Ber. Cont. 2. die Fläche des ſchiefen Kegels zuerſt zu finden gelehrt. Euler Comm. Nou. Petrop. T. I. p. 4; und Noua Acta Petrop. T. III. 1788. hat darüber Unterſuchungen angeſtellt. Zur bequemen Ausübung lehren ſie nichts brauchbares. De ſuperficie coni ſcaleni habe ich eine Abhandlung der hieſigen Soc. d. W. vorgelegt Commentationes S. Sc. Gott. T. IX. ad 87; 88. Die Fläche durch eine Reihe auszudrucken iſt nicht ſchwer, die Coefficienten dieſer Reihe werden durch drey unveränderliche Gröſſen beſtimmt: Halbmeſſer der Grundfläche, Linie zwiſchen Spitze und Mittelpunct der Grundfläche, Höhe des Kegels. Das Verhalten zwiſchen dieſen drey unveränderlichen Gröſſen kann ſich auf unzähliche Arten ändern. Das Geſetz, nach welchem die Coefficienten fortgehn, iſt nicht ſchwer anzugeben, jeder folgende wird durch alle vorhergehende gegeben. Fällt das Loth von der Spitze auf die Grundfläche weit vom Mittelpuncte, ſo nehmen die erſten Coefficienten langſam ab, man kann alſo muthmaaſſen das geſchehe auch bey den folgenden, ſelbſt iſt man nicht

ſicher

ſicher ob folgende nicht etwa gröſſer werden als vorhergehende. Uebrigens iſt das veränderliche der Reihe ein Bogen in der Grundfläche, und deſſelben Sinus und Coſinus. Die Hälfte der Fläche des Kegels iſt durch die Coefficienten, und beſtändige Gröſſen gegeben, aber auch dieſe Hälfte weiß man wegen angeführter Beſchaffenheit der Coefficienten nicht zuverläſſig.

Ich bediene mich folgenden Verfahrens: Ich theile die Grundfläche in Bogen, jedem gehört ein Stück der krummen Fläche. Ich kann ein Paar Gröſſen angeben, davon eine gröſſer iſt die andre kleiner, als erwähntes Stück; So habe ich Gränzen zwiſchen denen es enthalten iſt. Dieſe Rechnung, für Stücken angeſtellt, die zuſammen die Hälfte der krummen Fläche ausmachen, giebt Gränzen zwiſchen welche dieſe Hälfte fällt. Gränzen hat Archimed ſchon gebraucht, neuere Analyſis hat gewieſen, bey den Unterſuchungen die Archimed anſtellte, die Gränzen ſo enge man wollte zuſammen zu bringen der analytiſche Ausdruck führte auf Differentiale und Integrationen ſo was läſſt ſich nicht wohl beym ungleichſeitigen Kegel bewerkſtelligen.

Eine Figur auf einer Ebene, die ſich um den gleichſeitigen Kegel legen läſſt, ein Netz deſſelben, verzeichnet die gemeine Geometrie; Meiner geometriſchen Abhandlungen II. Samml. 4; 5; Abh. Für den ungleichſeitigen Kegel läſſt ſich ſolches auch nur beynah verrichten, wie ich in angef. Abh. zeige.

De ſuperficie coni ſcaleni determinanda, Iulius Conradus Yelin. Erlangae 1794. ſucht die Gränzen auf eine etwas unterſchiedne Art, ſtimmt aber übrigens mit mir überein.

Gebrauch der Integralrechnung, den Schwerpunct zu finden. Statik 49.

1. Aufg. Den Mittelpunct der Schwere F; 39 F. bey einer ebenen Figur zu finden, deren Geſtalt BMANG gegeben iſt.

Aufl. Das Gewicht dieſer Figur iſt ihrer Gröſſe proportionirt, (Stat. 38) wenn alſo $MN = z$; $CP = x$ ſo iſt das Gewicht $= \int z\,dx$ (206) ſo genommen, daß es für $x = CA = e$ verſchwindet. Wenn man ſie alſo als eine Laſt betrachtet, die ſich an dem Arme eines Hebels CF, befände, ſo wäre ihr Moment $CF. \int z dx$ weil jede Maſſe, was ſie auch für eine Geſtalt hat, den Hebel ſo drehet als wäre ihre ganze Laſt in F beyſammen (Stat. 48). Aber das Moment des Elements MNnm iſt $= xz\,dx$ um ſo viel muß ſich das Moment der Figur verändern, wenn ſich ihre Gröſſe um das Element verändert. Folglich iſt $xz\,dx$ das Differential des Moments der Figur, oder $\int xz\,dx$ iſt das Moment der Figur; wo man $\int xz\,dx$ ſo nehmen muß, daß es für $x = e$ verſchwindet, weil das Moment einer anfangenden Figur ohne Zweifel $= 0$ iſt. Alſo iſt

$$\int xz\,dx = CF. \int z\,dx \text{ oder } \frac{\int xz\,dx}{\int z\,dx} = CF.$$

Nähmlich, CF iſt: Summe der Momente, mit Summe der Gewichte dividirt (Stat. 46).

So

So iſt die Weite des Schwerpunctes, von einer willkührlich gezogenen Axe CD gegeben. Weiß man alſo eine Linie CF in der er ſich befindet, ſo hat man ihn nun völlig beſtimmt. Weiß man aber keine ſolche Linie, ſo ſuche man erſtlich ſeine Weite von CD; alsdenn ziehe man DE auf CD ſenkrecht, und ziehe Ordinaten mit DE parallel, heiſſen dieſelben nun z, und ihre Weiten von DE; x; ſo findet man auf eben die Art des Schwerpunctes Weite von DE; Er muß ſich alſo in dem Durchſchnitte zweyer Perpendikel auf DC und DE befinden.

2. Wenn AP die Axe der halben Parabel 35 F. iſt, und derſelben Schwerpunct F geſucht wird, ſo ſey FS mit der Axe der Parabel, FT mit AD parallel, alſo $c=0$ und $z^2 = bx$ und

$$SF = \frac{\int zxdx}{\int zdx} = \frac{3}{5}x;$$ Nun ſehe man das Element Pm als ein Gewicht an der Axe AP an; ſo iſt der Abſtand ſeines Schwerpunctes von dieſer Axe $= \frac{1}{2}z$ alſo ſein Moment $= \frac{1}{2}zzdx$ und alſo die Summe dieſer Momente mit der ganzen Fläche der Parabel dividirt oder $TF = \frac{3}{8}z$. Wenn man alſo mit AD und AP Parallelen in den Weiten $\frac{3}{5}$ AP und $\frac{3}{8}$ PM zieht, ſo giebt ihr Durchſchnitt den Schwerpunct F des Stückes APM.

3. Ein Dreyeck BGA 40 F. deſſen Grundlinie BG = g; Höhe CK = f; wo e = o; hat ſeinen Schwerpunct in der Linie AS welche die Grundlinie halbirt. Denn man ziehe MN; mn; mit der Grundlinie und Mμ; Nν mit AQqS parallel, ſo hat das Parallelogramm MN$\nu\mu$ gewiß ſeinen Schwerpunct in Qq, denn der Schwerpunct liegt in jeder Diagonale, und eine Linie durch der Diagonalen Durchſchnitt mit einem Paare Seiten parallel, halbirt jede der beyden übrigen Seiten. Indem ſich nun mn der MN unendlich nähert, nähert ſich der Theil des Dreyecks MNnm unendlich dem Parallelogramme NN$\nu\mu$; alſo läſſt ſich das Dreyeck in Theile zerlegen, deren jeder ſeinen Schwerpunct in AS hat. Ferner, weil CK des Dreyecks Höhe ſeyn ſoll, ſo iſt AC mit BG parallel. Das Stück von CK das zwiſchen AC und MN fällt giebt des Elements MNnm Abſtand von der Axe AC an, heiſſt alſo x. Es iſt ſo groß als des Perpendikels von A auf BG Stück zwiſchen A und MN; alſo

$x : AQ = f : AS$ aber

$AQ : z = AS : g$ alſo

$x : z = f : g$ oder $z = \frac{gx}{f}$ folglich $\frac{\int g x^2 dx : f}{\int g x dx : f}$

$= \frac{2}{3} x$ alſo $CF = \frac{2}{3} f$ Weil aber $CF : FK = AF : FS$ ſo iſt auch $AF = \frac{2}{3} AS$. alſo nehme man auf der Linie, welche die Grundlinie halbirt, $\frac{2}{3}$ vom Scheitel.

Wenn

Wenn man annimmt der Schwerpunct ſey in einer geraden Linie welche aus des Dreyecks Spitze die gegenüberſtehende Seite halbirt, ſo müſſen die drey geraden Linien welche ſo was aus den drey Spitzen thun, einander in einem und demſelben Puncte ſchneiden weil das Dreyeck nur einen Schwerpunct hat (Stat. 48.) Die Annahme giebt alſo des Schwerpuncts Abſtand von jeder Spitze blos aus der Geometrie. Meiner geometriſchen Abhandlungen I. Samml. 12. Abh.

4. Bey der ganzen Parabel iſt der Schwerpunct offenbahr in der Axe, und $\frac{1}{4} zz = bx$;

dieſes giebt $\dfrac{\int 2 b^{\frac{1}{2}} x^{3:2} dx}{\int 2 b^{1:2} x^{1:2} dx}$ oder $CF = \frac{3}{5} x$.

5. Zwiſchen dem Kreisbogen BOG und ſeiner Sehne BG, ſey der Abſchnitt BOG enthalten. Man ſucht deſſen Schwerpunct F. 41. Fig.

C ſey des Kreiſes Mittelpunct, der Halbmeſſer $= r$; die Sehne $BG = 2h$; CO ſenkrecht auf ſie, ſo liegt F in CO; auch iſt (1) $CA = e = \surd(r^2 - h^2)$; ferner $\frac{1}{2} z = \surd(r^2 - x^2)$ daher $\frac{1}{4} z^2 = r^2 - x^2$; $\frac{1}{2} z dz = -- 2x dx$; und $x dx = - \frac{1}{4} z dz$; folglich $z x dx = - \frac{1}{4} z^2 dz$ davon das Integral $=$ Const $- \frac{1}{12} z^3$; Weil nun dieſe Summe der Momente ſich an BG anfängt wo $z = 2h$; ſo muß ſie da verſchwin-

den, oder es iſt $0 = Const - \frac{8h^3}{12}$ folglich die Summe der Momente $= \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{12}z^3$, das wäre dieſe Summe für das Stück BGNM; alſo für den ganzen Abſchnitt $z = 0$; und dieſe Summe für ihn $\frac{2}{3}h^3$

Dieſe muß nun mit dem Innhalte des Abſchnittes dividirt werden. Der Abſchnitt heiſſe S; der Ausſchnitt zwiſchen CB, CG, und den Bogen BOG heiſſe V; und das Dreyeck CBG ſey $= T$. So iſt $S = V - T$.

Der Winkel BCO ſey $= \eta$ ſo iſt des Bogens BO Länge $= r.\eta$ und des Bogens BOG Länge $= 2r\eta$; und $V = r^2\eta$ Imgleichen $T = e.h = h\sqrt{(r^2 - h^2)} = r.\sin\eta.r.\cos\eta = \frac{1}{2}r^2.\sin 2\eta$ (Trig. 19 S. 5. Zuſ.); alſo
$S = r^2.(\eta - \frac{1}{2}\sin 2\eta)$

$$\text{Daher } CF = \frac{\frac{2}{3}h^3}{r^2.(\eta - \frac{1}{2}\sin 2\eta)} = \frac{\frac{2}{3}r.\sin\eta^3}{\eta - \frac{1}{2}\sin 2\eta}$$

6. Für einen Halbkreis wo $h = r$; $\eta = \frac{1}{2}\pi$

wird $CF = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4r.}{3}\,0{,}318309$ (G. 44 S. 5. 3.) $= r.\,0{,}424413181$

7. I Hieraus findet man des Ausſchnittes Schwerpunct; Er ſey in H, des Dreyecks Schwerpunct

punct iſt auch in CO, in der Entfernung $\frac{2}{3}$ CA von C (639) Weil nun die Momente des Dreyecks und des Abſchnitts zuſammen das Moment des Ausſchnitts geben müſſen ſo iſt $\frac{2}{3}\,CA.\,T + CF.\,S = CH.\,V$; Alſo $CH = \frac{\frac{2}{3}\,CA.T + CF.S}{V}$

Von dieſem Ausdrucke iſt $\frac{2}{3}\,CA.\,T = \frac{2}{3}\,e^2.\,h$; $CF.\,S = \frac{2}{3}\,h^3$; die Summe davon $= \frac{2}{3}.\,h.\,(h^2 + e^2) = \frac{2}{3}\,h\,r^2$; alſo $CH = \frac{2\,h}{3\,\eta} = \frac{2\,r.\,\sin\eta}{3.\,\eta}$

Es iſt alſo $2\,r\,\eta : 2\,h = \frac{2}{3}\,r : CH$; oder der Bogen BOG zu ſeiner Sehne BG wie zwey Drittheile des Halbmeſſers zur Entfernung des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

8. Wenn der Winkel BCO verſchwindet, daß $\frac{\sin\eta}{\eta} = 1$ (281) ſo kömmt $\frac{2\,r}{3}$ als die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpuncte für einen unendlich ſchmalen Ausſchnitt; Wie ſchon aus (3) erhellt, weil man dieſen Ausſchnitt als ein geradelinichtes Dreyeck betrachten kann.

9. Wenn man ſich alſo einen Kreis in unzähliche ſolche ſchmale Ausſchnitte getheilt vorſtellt, ſo iſt eines jeden ſein Schwerpunct in einem Halbmeſſer der ihn halbirt, $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſers vom

Mittelpuncte entfernt. Da kann man ſich alſo dieſes Ausſchnitts Gewicht beyſammen vorſtellen.

Und alſo kann man ſich ferner vorſtellen als lägen die Gewichte dieſer Ausſchnitte, in einem Kreiſe deſſen Halbmeſſer $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſers von dem gegebenen Kreiſe iſt, um deſſelben Mittelpunct herum. Oder: ſtatt der ſchweren Scheibe eines Kreiſes, kann man ſich vorſtellen: das Gewicht das durch ſie durchaus verbreitet iſt, ſey in einen Ring zuſammen gebracht deſſen Halbmeſſer $\frac{2}{3}$ des Halbmeſſers des Kreiſes iſt. Es iſt alſo einerley, ob ſich die ſchwere Scheibe um eine verticale Axe durch ihren Mittelpunct dreht, oder ob die Scheibe nicht ſchwer wäre, ihr Gewicht aber in dem erwähnten Ringe herumgeführt würde, auch braucht das Gewicht nicht einmahl durch den ganzen Ring ausgetheilt zu ſeyn, ſondern könnte ſich irgendwo nur im Umfange deſſelben, an einer Stelle beyſammen befinden.

IIII. Man ſieht leicht wie dieſes auf einen Cylinder der ſich um eine verticale Axe dreht anzuwenden iſt, z. E. auf einen Mühlſtein. Daher wird dieſer Halbmeſſer des Ringes, als ein mittlerer Halbmeſſer bey Berechnungen im Maſchinenweſen gebraucht. Man ſ. z. E. Belidor Architectur. Hydraul. I. Part. Tom. I. art. 240; 652; u. ſ. w.

10. Anm. Wie in 7; findet man allemahl den Schwerpunct der Summe oder des Unterſchiedes von

zwo

zwo Gröſſen, wenn man der einzelnen Gröſſen Schwerpuncte hat.

11. Aufg. **Wenn ſich der Schwerpunct des Bogens MAN einer krummen Linie, in der geraden Linie CF befindet, ſeine Stelle in dieſer Linie zu finden.**

Aufl. Das Moment jedes Elementes des Bogens iſt Nn. x; alſo $CF = \frac{\int x. Nn}{\int Nn}$

12. Ex. Für den Kreisbogen BOG; 41 Fig. wenn alles ſo verſtanden wird wie in (5) iſt Nn. $x = r x d x. (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = - r d y$; wenn $PN = y$; das Integral davon alſo = Conſt − ry; Soll dieſes verſchwinden wenn $x = e$ oder $y = AG = h$; ſo wird das Integral $= r. (h - y)$; für den Bogen GN. Für den Bogen GO; ſetzt man $x = r$; oder $y = 0$; und das Integral iſt rh. Dieß wäre die Summe der Momente für den Bogen GO; für den doppelten Bogen GOB iſt ſie alſo $2rh$

Der Winkel GCO heiſſe η; daß $h = r. \sin \eta$ So iſt der Bogen GOB oder $\int Nn = 2 r. \eta$ und

$$CF = \frac{r. \sin \eta}{\eta} = \frac{3}{2}. CH \ (7)$$

13. Anm. Auf eine ähnliche Art findet man ohne Integralrechnung den Schwerpunct des Umfangs geradlinichter Figuren, davon Stevin in ſeiner Statik 2. B. verſchiedene Exempel hat.

14. Aufg.

14. Aufg. Den Schwerpunct eines Körpers zu finden, der aus Umdrehung der Figur ANG (39 F.) um ihre Axe AO entſteht.

Aufl. Weil er in der Linie AO iſt, ſo ſuche man ſeine Weite AF; Es ſey $AP = x$; $PM = y$; und AL die Axe (2) ſtatt CD. So iſt das Element des Körpers, das zwiſchen den Ebenen der Kreiſe enthalten iſt, die von PN und pn beſchrieben werden, $= \pi y^2 dx$ und ſein Moment $= \pi y^2 x dx$; Wenn alſo wiederum die Summe der einzelnen Momente dem Momente des ganzen Körpers gleichgeſetzt wird, ſo iſt $CF = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$; die Integrale ſo genommen, daß ſie für $x = 0$ verſchwinden, und alsdenn $f = AO$ ſtatt x geſetzt.

Exempel.

15. Für die runden Körper von Kegelſchnitten, wo $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ iſt $CF = \frac{f.(4a - 3f)}{2.(3a - 2f)}$ Für die Parabel wird a unendlich und $CF = \frac{2}{3} f$.

16. Alle Stücken runder Körper von Kegelſchnitten haben alſo einerley Schwerpunct, wenn ſie einerley Axe a; und einerley Höhe f haben.

Für die Hälfte eines ganzen elliptiſchen Sphäroids, iſt $f = \frac{1}{2} a$ alſo $CF = \frac{5}{16}. a$.

17. Aufg.

17. Aufg. Den Schwerpunct einer Pyramide, oder eines Körpers der durch kegelförmige Bewegung beſchrieben wird (Alg. 540.) zu finden.

Aufl. Seine Grundfläche heiſſe B, und ihre Weite von der Spitze A 40 F; oder die Höhe = f: BAG 40 F. ſey ein Schnitt von ihm, mit einer Ebene, die auf die Grundfläche ſenkrecht ſteht, und durch der Grundfläche Schwerpunct S geht, ſo befinden ſich alle Schwerpuncte der Schnitte, welche mit der Grundfläche parallel gehen, in der Linie AS, weil dieſe Schnitte alle einander ähnlich ſind, und gegen die Linie AS ähnliche Lagen haben. Ferner kann wie G. 61. S. 5. Z. das Element dieſes Körpers, das durch Ebenen begränzt wird, die durch MN; mn, mit der Grundfläche parallel gehen, als ein Priſma $= \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ angeſehen werden, deſſen Schwerpunct in der Linie Qq iſt, die durch beyder Grundflächen Schwerpuncte geht. Alſo befindet ſich von jedem Elemente, und folglich vom ganzen Körper der Schwerpunct in der Linie AS. Er ſey in F; ſo iſt die Summe der Momente $= \int \frac{Bx^3\,dx}{ff}$ und das Moment des Körpers $= CF. \int \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ beydes gleichgeſetzt, und f ſtatt x geſetzt

ſetzt giebt $CF = \frac{3}{4} f$ oder der Schwerpunct iſt allemahl $\frac{3}{4}$ der Höhe, von der Spitze entfernt.

18. In 35 Fig. ſey überhaupt F der Schwerpunct der Figur APM, wo $AP = x$, $PM = z$, ſo iſt (2) $TF = \frac{\frac{1}{2}. \int z^2. dx}{\int z. dx}$

Nun drehe ſich dieſe Figur um die Axe AP, ſo entſteht ein runder Körper deſſen Innhalt $= \pi. \int z^2. dx$.

Dieſer Innhalt iſt alſo $= \int z. dx. TF. 2. \pi$.

Aber $TF. 2\pi$ iſt der Weg des Schwerpuncts der ebenen Figur, indem ſie ſich ganz um die Axe AP dreht.

Alſo findet man des Körpers Innhalt, wenn man die Fläche der ebenen Figur die ihn beſchreibt, mit dem Wege ihres Schwerpuncts multiplicirt.

19. Ein rechtwinklichtes Dreyeck, habe die Hypotenuſe $= h$, die Grundlinie $= r$, wenn es ſich um ſeine Höhe dreht, beſchreibt die Hypotenuſe eine Kegelfläche. Der Hypotenuſe Schwerpunct, begreiflich mitten in ihr, beſchreibt einen Kreis deſſen Umfang $= r. \pi$. Dieſer Weg des Schwerpuncts mit der Hypotenuſe multiplicirt giebt $h. r. \pi$, die Kegelfläche.

20. Eine

20. Eine horizontale gerade Linie = b, deren Schwerpunct mitten in ihr iſt, horizontal fortgeführt, beſchreibt keine Fläche. Führt man ſie in einer verticalen Ebene, ſich ſelbſt parallel niederwärts, ſo beſchreibt ſie ein Parallelogramm; Man ſetze bey dieſer Bewegung beſchreibe ihr Schwerpunct eine gerade Linie = c welche gegen den Horizont in dem Winkel γ geneigt iſt, ſo iſt des Parallelogramms Innhalt = b. c. ſin γ; wo c. ſin γ der Weg iſt, nicht den der Schwerpunct wirklich zurückgelegt hat ſondern um den er niedriger gekommen iſt. Wäre er in der verticalen Ebene weder niedriger noch höher gekommen, ſo wäre keine Fläche beſchrieben worden, wie weit er auch in einer geraden Linie fortgerückt wäre.

21. Eine begränzte Fläche die durch Bewegung einer Linie entſteht, ein begränzter Körper der durch Bewegung einer Fläche entſteht, ... jede Bewegung kann auch eine andre ſeyn als drehende .... iſt ſo groß als ein Product aus dem Wege des Schwerpuncts, der beſchreibenden Linie, oder beſchreibenden Fläche, in die beſchreibende Linie, oder beſchreibende Fläche.

Von dieſem Satze ſind (18; 19) Exempel. Daß man bey dem Wege des Schwerpuncts eine gewiſſe Bedingung annehmen müſſe zeigt (20) wovon ein andres Beyſpiel iſt: wenn ein Parallelogramm ſich ſelbſt immer parallel, und ſo bewegt,

wegt, daß ſein Schwerpunct in einer geraden Linie geht, ein Priſma beſchreibt.

22. Paulus Guldin, ein Jeſuit, lib. 2. 3. de centro grauitatis, hat den Satz durch Induction vieler Exempel dargethan. Ich ſchreibe das Allegat Wolfen nach El. Math. T. II. El. Mech. §. 206. Wolf erinnert, Pappus habe ihn ſchon am Ende der Vorrede zum 7. Buche erwähnt. Die Stelle des Pappus iſt nicht gar zu deutlich und hat in Commandins Ueberſetzung Lücken. Es iſt da von Verhältniſſen die Rede, die ex proportione (Commandin braucht dieſes Wort für Verhältniß) amphiſmatum et rectarum linearum ſimiliter ad axes ductarum a punctis quae in ipſis grauitatis centro ſunt zuſammengeſetzt ſind, imgleichen zuſammengeſetzt ex prop. amphiſmatum, et circumferentiarum, et circumferentiarum a punctis quae in ipſis ſunt centra grauitatis factarum, jenes iſt: proportio perfectorum vtrorumque ordinum, dieſes: imperfectorum. Es geht aber keine Erklärung vorher was perfecta, imperfecta, ordines ſind, amphiſmata hat C. auch nicht zu überſetzen gewuſſt.

23. Wolf a. a. O. §. 193 giebt einen allgemeinen Beweis, der aber mir wenigſtens nicht überzeugend iſt, auch fügt er einen analytiſchen für runde Körper bey, ohngefähr wie meiner (18) und giebt Exempel. In ſeiner 194 §. redet er vom Parallelogramm (20) und erinnert, der

Weg

Weg des Schwerpuncts ſey in der verticalen Directionslinie. (Stat. 48) Das möchte wohl die Sache nicht ſo darthun wie meine Vorſtellung. Es gölte nur, wenn alle Gröſſen durch Fallen derer entſtünden welche ſie beſchreiben, aber beym Drehen, (18; 19) iſt jeder Weg des Schwerpuncts nicht in der Directionslinie.

Uebrigens erinnert Wolf, man habe Guldins Satz unter die vortrefflichſten Erfindungen des ſiebenzehnten Jahrhunderts gerechnet, und ſich ſeiner bedient Flächen und Körper auszurechnen ehe Integriren bekannt ward. Leibniz habe gewieſen daß er auch ſtatt findet wenn Axe oder Schwerpunct, während der Bewegung die eine Gröſſe erzeugt beſtändig verändert werden. Act. Erud. 1695; p. 493.

Walliſius bedient ſich Guldins Regel, den körperlichen Innhalt eines Schraubenganges auszurechnen, giebt aber kein Exempel der Rechnung; Mechanica cap. 9. Pr. 6. Op. T. I. p. 991.

24. Schwerpuncte ebener Flächen zu finden lehrt Archimed, in ſeinen Büchern welche in Barrows Archimedis opera, den Titel de aequiponderantibus führen, Sturm nennt ſie: Von der ebenen Flächen Gleichgewicht und Schwerpuncten.

Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri II. a Feder. Commandino reſtituti Bonon. 1565, zeigen daß Archimed auch von Körpern Schwer-

puncte beſtimmt hat, weil ſich darnach die Lage eines ſchwimmenden Körpers richtet, (Hydroſt. 58) aber das Verfahren wie er, oder Andre vor ihm, das geleiſtet haben findet man nicht. Das veranlaſſte Commandin, der nur genannten Arbeit beyzufügen: Federici Commandini Vrbinatis liber de centro grauitatis ſolidorum. Bon. 1565.

Von dieſem Buche, und Della Faille de centro grauitatis partium circuli et ellipſis ſ. meine Geſchichte der Mathematik II. B. 203; 211. S.

In Stevins Statik, handelt das zweyte Buch von Findung des Schwerpuncts. Oeuvres de Simon Stevin par Girard deuxieſme Volume p. 457.

De centro grauitatis ſolidorum libri tres Lucae Valerii, 2. Ausgabe Bonon. 1661.

Begreiflich, integrirt keiner der genannten Schriftſteller. Man lernt alſo von ihnen wie ſich bey ſolchen Fragen das Verfahren der griechiſchen Geometer nachahmen läſſt, auch zu Ausmeſſung der Körper weil darauf die Lage des Schwerpuncts ankömmt.

Archimeds zwey Bücher über Kugel und Cylinder, eben deſſelben Kreismeſſung; überſ. mit Anmerkungen von Karl Friedr. Hauber, Tübingen 1798. Hr. H. fügt dieſer Ueberſetzung bey: Ueber Kugel, Kugelabſchnitte und Kugelrümpfe (Kugelſtücken zwiſchen parallelen Ebenen) aus

Luc.

Luc. Val. de centro grau. Er hat die erſte Ausgabe gebraucht Rom. 1604. Auch: Ueber den Körper der durch Umdrehung eines Kreisabſchnittes um den Durchmeſſer beſchrieben wird, aus Tacquet Cyl. et Annular. L. I. P. IV. Antu. 1651. und über Körper die durch Umdrehung ebener regulärer Figuren entſtehn, aus Euangeliſta Torricellii opera geometrica Flor. 1644.

Da ſolche Bücher jetzo nicht oft vorkommen, iſt gut aus ihnen Vorbilder des Verfahrens der Alten zu haben. Auch wird man darauf die neuern Kunſtgriffe anwenden und ſo fühlen wie viel Erleichterung und Abkürzung dieſe gewähren.

25. Anwendung der leichtern Kunſtgriffe wie bald nach Erfindung des Integrirens bekannt waren, geben: Methode pour la meſure des ſurfaces, la dimenſion des ſolides, leurs centres de péſanteur, de percuſſion et d'oſcillation par l'application du Calcul intégral par M. Carré Paris 1700. Analyſe des infiniment petits, comprenant le calcul intégral dans toute ſon étenduë, av. ſon application aux quadratures, rectifications, cubatures, centres de gravité, de percuſſion etc. . . . par M. Stone, trad. en françois par M. Rondet Par. 1735. Wolf El. Mech. §. 156 ſequ. Einzelne ſchwere Unterſuchungen zu erzählen geſtattet hie der Raum nicht, ich erwähne nur die neuſte mir bekannte: Kramp über den Mittelpunct der Schwere im ſphäriſchen

Dreyecke, Archiv der Mathematik, von Hindenburg 1798 ſiebentes Heft.

26. Von den unzählichen Anwendungen des Schwerpuncts neune ich hie nur eine aus der Baukunſt. Wenn man eine Mauer als einen feſten Körper anſieht, den ſeitwärts angebrachte Gewalt nicht zertheilt, ſondern, wenn ſie ſtark genug dazu iſt, ganz umſtürzt, ſo kömmt die Sache darauf an, den Schwerpunct dieſer Maſſe ſo weit aus ſeiner Lage zu bringen, daß die Directionslinie auſerhalb der Grundfläche fällt. Dahin gehörige Unterſuchungen giebt Belidor, Science des Ingenieurs L. I.

Variationsrechnung

Mit ihrer Anwendung auf Gröſſte und Kleinſte.

Von der Variationsrechnung.

1. BMN (43 Fig.) ſey eine krumme Linie, oder auch eine Reihe an einander gefügten geraden, MN ein Theil von ihr. Durch A gehe eine Abſciſſenlinie auf welche von B, M, N, Perpendikel als Ordinaten fallen, und von A aus, Abſciſſen abſchneiden. Man nenne $AP = x$, $PM = y$; $AQ = x + \Delta x$; $QN = y + \Delta y$.

2. Der groſſe vierte griechiſche Buchſtabe, bedeutet nähmlich wieviel in der Reihe der Abſciſſen, oder in der Reihe der Ordinaten, jedes Glied von ſeinem nächſtvorhergehenden unterſchieden iſt, (wie in An. endl. Gr. 724) die Unterſchiede mögen alſo auch endlich ſeyn. Werden ſie unendlich klein, ſo ſchreibt man d ſtatt Δ.

3. $B^*M^*N^*$, ſey eine andre krumme Linie oder Reihe von geraden, deren Coordinaten,

AP*; P* M*; AQ*; Q* N*; Dieſe Linie, nenne man variirte, der (1); Ihre Coordinaten, variirte jener, und drucke ſie ſo aus: $AP^* = x + \delta x$; $P^* M^* = y + \delta y$; ſo ſind $PP^* = \delta x$; $P^* M^* - PM = \delta y$, Variationen der Coordinaten x; y;

4. I. So iſt Differenz einer Abſciſſe, oder einer Ordinate, um wie viel ſie ſich ändert, wenn ſie ſich in die nächſte Abſciſſe oder Ordinate, eben der krummen Linie verwandelt; Variation einer Abſciſſe oder Ordinate, wieviel ſie ſich ändert, wenn ſie ſich in Abſciſſe oder Ordinate der variirten Linie verändert.

II. Die Variation, nimmt man immer unendlich klein an, alſo die variirte krumme Linie, unendlich wenig von der unvariirten unterſchieden.

5. I. Man nimmt die Linie BMN ganz unbeſtimmt an, nicht eine gewiſſe Gattung oder Art von krummen Linien. Was ich damit meyne erläutere folgendes Exempel.

II. Geſetzt BMN ſollte eine gewöhnliche Parabel ſeyn, deren Parameter = b; Brennpunct A. So wäre $AB = \frac{1}{2} b$; $y^2 = b. (x + \frac{1}{4} b)$

III. Nun ſollte B* M* N* auch eine Parabel ſeyn, deren Brennpunct ebenfalls in A. So müſſte ſie einen andern Parameter haben, der aber von dem erſten unendlich wenig unterſchieden wäre, weil beyde Parabeln unendlich wenig unterſchieden ſeyn ſollen.

So

So wäre $(y + \delta y)^2 = (b + \delta b).(x + \delta x + \frac{1}{4}(b + \delta b))$ Da kämen alſo nicht Variationen der Coordinaten allein, in Betrachtung, ſondern auch noch Variation des Parameters, und es gäbe eine Gleichung zwiſchen dieſen drey Variationen.

IV. Es kann Unterſuchungen geben wo dergleichen Verfahren nützlich wäre. Man könnte ja wohl einen Satz ſuchen, der von allen Parabeln wahr wäre, die Axe und Bennpunct gemein haben.

V. Bey ſolchen Unterſuchungen würde, was in einer und derſelben krummen Linie beſtändig iſt, wie der Parameter der Parabel, in einer Reihe ſolcher krummen Linien als veränderlich angeſehn.

VI. In dem hier folgenden, will man keine Variationen betrachten als die, der Coordinaten, und der Differenzen der Coordinaten von allen Graden. Das zeigt warum hie nach (I) verfahren wird.

6. Wie PP* die Variation von AP, ſo iſt QQ* die Variation von AQ das iſt von AP + PQ alſo ohne Zweifel Variation von AP + Variation von PQ; Folglich QQ* — PP* = der Variation von PQ; das heiſſt: Die Variation einer Abſciſſe, weniger der Variation ihrer vorhergehenden iſt = der Variation des Unterſchiedes der Abſciſſe. In Zeichen: $\delta(x + \Delta x) - \delta x = \delta \Delta x$.

 7. Aber

7. Aber QQ* — PQ* iſt auch der Unterſchied der Variationen beyder Abſciſſen oder $\delta AQ - \delta AP$. Schreibt man dieſes ſo: $\Delta\delta x$, ſo hat man den Satz: $\Delta\delta x = \delta\Delta x$; Unterſchied der Variationen der Abſciſſen iſt Variation ihres Unterſchiedes.

8. Auch bey den Ordinaten, iſt: Variation der Differenz der unvariirten Ordinaten, ſo groß als Differenz der Variationen, das iſt $\delta\Delta y = \Delta\delta y$.

Beweis. $\Delta\delta y$ bedeutet: von der folgenden Variation, die vorhergehende abgezogen.

Iſt nun eine Variation $\delta y = P^* M^* - PM$
ſo iſt die folgende $= Q^* N^* - QN$
alſo $\Delta\delta y = Q^* N^* - QN - P^* M^* + PM$
Ferner: $\delta\Delta y$ bedeutet: von dem variirten Unterſchiede den unvariirten abgezogen. Nun iſt der

unvariirte $= QN - PM$
der variirte $= Q^* N^* - P^* M^*$
alſo $\delta\Delta y = Q^* N^* - P^* M^*$
$- QN + PM$

Eben das Vorige.

9. Wenn man die Gröſſen wie ſie untereinander ſtehen betrachtet ſo iſt

$\Delta\delta y = \Delta(y + \delta y) - \Delta y$
$\delta\Delta y = \delta(y + \Delta y) - \delta y$

Alſo weil beyde Ausdrücke rechter Hand gleich ſind

$\Delta(y + \delta y) - \Delta y = \delta(y + \Delta y) - \delta y$

das muß alſo folgendergeſtalt entwickelt werden

$\Delta y + \Delta\delta y - \Delta y = \delta y + \delta\Delta y - \delta y$

10. Das

10. Das heiſſt: Jeder der beyden griechiſchen Buchſtaben, vor der Summe von ein Paar Gröſſen, bedeutet ſo viel, als die Summe deſſen was heraus kömmt wenn man ihn vor jede einzelne ſetzt.

11. Wenn die Ordinaten QN; PM einander unendlich nahe geſetzt werden, und eben ſo die $Q^* N^*$; $P^* M^*$; (2) ſo iſt (7) $d\delta x = \delta dx$ und (8) $d\delta y = \delta dy$; Variation des Differentials, ſo groß als Differential der Variation.

Wenn der krummen Linie BM Länge $= s$ heiſſt alſo $MN = ds$ ſo iſt $B^* M^* = s + \delta s$ alſo $M^* N^* = d(s + \delta s) = ds + d\delta s$ Offenbar aber iſt auch, wie
$B^* M^* = s + \delta s$ ſo
$M^* N^* = ds + \delta ds$; Wiederum Differential der Variation der Länge, einerley mit der Variation des Differentials der Länge.

12. Wenn alſo V überhaupt eine Gröſſe bedeutet, welche ſich einmahl durch Unterſchiede ändert, ein andermahl durch Variationen, ſo iſt $\delta dV = d\delta V$.

13. Das zweyte Differential von V iſt das Differential des erſten; alſo, Variation des zweyten Differentials = Differential der Variation des erſten, $\delta ddV = d\delta dV$

14. Auch ſo: Variation des dritten; vierten ... Differentials = Differential der Variation des zweyten, dritten ....

δd^3

$\delta d^3 V = d \delta d^2 V$;
$\delta d^4 V = d \delta d^3 V \ldots$

15. So $\delta d^5 V = d \delta d^4 V = d^2 \delta d^3 V = d^3 \delta d^2 V = d^4 \delta d V = d^5 \delta V$.

16. Wenn alſo Variation eines hȯhern Differentials verlangt wird, ſo kann man das Zeichen der Variation zwiſchen die wiederhohlten Zeichen der Differentiation ſchreiben wo man will. Schreibt man es unmittelbar vor V; ſo zeigt es an: Die Variation eines Differentials vor irgend einem Grade der Grȯſſe V, betrage ſoviel als das Differential eben des Grades der Variation von V.

17; I. Man ſetze $dy = p. dx$; $dp = q. dx$; $dq = r. dx$ u. ſ. w. Dadurch werden die hȯhern Differentiale folgendergeſtalt ausgedruckt.

II. $d^2 y = q. dx^2 + p. d^2 x$
$d^3 y = r. dx^3 + 3. q. dx. ddx + p. d^3 x$
u. ſ. w.

III. Wenn man der Abſciſſe Differential unverȧnderlich ſetzt ſo kommen fůr die hȯhern Differentiale von y, nur Producte aus q, r, ... in Potenzen deſſen von x.

IV. In dieſem Falle, hat dx kein Differential, aber Variation, dem $\delta(x + dx) = \delta x + \delta dx$ (10) der letzte dieſer beyden Theile iſt $= d \delta x$ (6).

18. Wenn eines Products F. G beyde Factoren variiren, iſt des Products Variation $= F. \delta G + G. \delta F$.

Denn

Denn das variirte Product iſt $(F + \delta F).(G + \delta G)$, wenn man davon das unvariirte abzieht bleibt $F.\delta G + G.\delta F + \delta F.\delta G$ und der letzte Theil wird weggelaſſen, weil man jede Variation in Vergleichung mit der Gröſſe welche variirt unendlich klein nimmt.

19. Eines Quotienten $\frac{F}{G}$ Variation iſt $=$ $\frac{G.\delta F - F.\delta G}{G^2}$ denn der variirte Quotient iſt $\frac{F + \delta F}{G + \delta G}$, von dieſem den unvariirten abgezogen, kömmt vorerwähnter Dividend, der Diviſor aber $= G.(G + \delta G)$ wo die Variation weggelaſſen wird.

20. Von $p = \frac{dy}{dx}$ iſt alſo die Variation $=$

$$\delta p = \frac{dx.\delta dy - dy.\delta dx}{dx^2}$$

$$= \frac{dx.d\delta y - dy.d\delta x}{dx^2} (12) = \frac{d\delta y - p.d\delta x}{dx}$$

21. Wenn man dieſes ſo differentiirt daß ſich auch der Abſciſſe Differential ändert, ſo wird $d\delta p$ ein Quotient, deſſen Diviſor das Quadrat des Differentials der Abſciſſe iſt, der Dividend $=$

$$dx.d^2\delta y - d\delta y.d^2x$$
$$-(dx.(dp.d\delta x + p.d^2\delta x) - p.d\delta x.d^2x)$$

Schreibt

Schreibt man den Diviſor darunter ſo kömmt

$$d\delta p = \frac{d^2\delta y}{dx} - \frac{ddx.\,d\delta y}{dx^2} + \left(\frac{p.\,d^2x}{dx^2} - q\right).$$

$$d\delta x - \frac{p.\,d^2\delta x}{dx}$$

22. Weil $q = \frac{dp}{dx}$; ſo iſt δq ein Quotient, deſſen Diviſor das Quadrat des Differentials der Abſciſſe, der Dividend $= dx.\,\delta dp - dp.\,\delta dx$ Alſo den Diviſor untergeſchrieben, und nach (12) verwechſelt; $\delta q = \frac{d\delta p - q.\,d\delta x}{dx}$

23. Das giebt aus (21)

$$\delta q = -\frac{2.q.\,d\delta x}{dx} + \frac{d^2\delta y - p.\,d^2\delta x}{dx^2}$$

$$+ \frac{(p.\,d\delta x - d\delta y).\,d^2x}{dx^3}$$

Das als eine Probe, wie man die Variation von q durch die Variationen der beyden Coordinaten ausdrucken könnte; mit der von p iſt es (20) geſchehn.

Viel kürzer würde der Ausdruck nach (17; III.)

24. Weil $r = \frac{dq}{dx}$ ſo iſt $\delta r = \frac{\delta dq}{dx} - \frac{dq.\,\delta dx}{dx^2}$ oder, mit gehöriger Verwechſelung und Subſtitution $= \frac{d\delta q - r.\,d\delta x}{dx}$. Die Variationen von

p (20)

p (20) q (22); r hie; zeigen das Geſetz nach welchem ſie fortgehn. So wäre

$$\delta s = \frac{d\delta r - s.\, d\delta x}{dx}$$

Die Abſciſſe ſoll nicht variiren.

25. Das hieſſe ſo viel: Die Ordinaten der Linie B* M* N* 44 F. liegen auf eben den geraden Linien auf welchen die von BMN liegen, oder: Beyde Linien haben einerley Abſciſſen. Da iſt $\delta x = 0$. P* fällt auf P und Q* auf Q. Da nun $P^*Q^* - PQ = \delta dx$ (6) ſo iſt dieſes auch $= 0$.

26. Alſo $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$ (20) $\delta q = \frac{d\delta p}{dx}$ (22)

27. Für unveränderliches Differential der Abſciſſe (17; III) kömmt in (26) $\delta q = \frac{d^2 \delta y}{dx^2}$. Darauf verkürzt ſich der Ausdruck (23) durch die jetzo gemachten beyden Vorausſetzungen.

28. Behält man dieſelben, und ſetzt $dq = r.\, dx$; $dr = s.\, dx$ u. ſ. w., ſo hat man $\delta r = \frac{d^3 \delta y}{dx^3}$; $\delta s = \frac{d^4 \delta y}{dx^4}$ u. ſ. w.

29. Augf. V iſt durch x; y und derſelben Differentiale gegeben. Man verlangt die Variation von V durch die von x und y auszudrucken.

Aufl.

Aufl. I. Es iſt alſo

$$dV = M.\,dx + N.\,dy + P.\,dp + Q.\,dq + R.\,dr + S.\,ds$$

Die groſſen Buchſtaben rechter Hand, ſind Functionen von x und y, und derſelben Differentiale. Nähmlich wenn V nur durch x und y gegeben iſt, ohne Differentiale derſelben, ſo beſteht das Differential davon nur aus den beyden erſten Theilen; und M, N, ſind nur durch x; y; gegeben. Iſt in V noch $\frac{dy}{dx} = p$ enthalten, ſo kömmt in das Differential, zu den beyden Differentialen von x; y; noch das von p. Und das von q wenn in V zweyte Differentiale der Coordinaten enthalten ſind, u. ſ. w.

Ich laſſe hie unentſchieden, ob dx veränderlich ſeyn ſoll oder nicht.

II. Das Differential von V zu finden ſetzt man in V; ſtatt x; y; p; q; .. $x + dx$; $y + dy$; $p + dp$; $q + dq$; Das giebt $V + dV$; beym Abzuge heben ſich alle die Theile auf die keine Differentiale enthalten, und ſo kömmt ein Ausdruck wie für dV iſt angegeben worden.

III. Die Variation von V zu finden, ſetzt man ſtatt x; y; p; q ... $x + \delta x$; $y + \delta y$; $p + \delta p$; $q + \delta q$. . . . Das giebt $V + \delta V$. Im Abzuge heben ſich alle Glieder auf, die keine Variation enthalten. Was alſo übrig bleibt,

muß

muß völlig der Ausdruck ſeyn, der in (II) übrig blieb, nur Variationen ſtatt Differentiale geſetzt.

IV. Alſo iſt

$$\delta V = M.\delta x + N.\delta y + P.\delta p + Q.\delta q + R.\delta r \ldots$$

Die Variationen von p; q; lehret (20; 22) nach welchem Verfahren man weiter fortgeht.

V. So kömmt

$$\delta V = M.\delta x + N.\delta y + \frac{1}{dx}\cdot(P.\,d\delta y + Q.\,d\delta p \ldots) - \frac{d\delta x}{dx}\cdot(P.\,p + Q.\,q \ldots)$$

VI. Wenn die Abſciſſe nicht variirt (25) und immer gleiche Differentiale behält (17; III) iſt

$$\delta V = N.\,\delta y + \frac{P.\,d\delta y}{dx} + \frac{Q.\,d^2 dy}{dx^2} \ldots$$

VII. Exempel. Variation der Subtangente.

Sie iſt $= \frac{y}{p}$ alſo ihr Differential $= dV = \frac{dy}{p} - \frac{y}{p^2}\cdot dp.$

Folglich 29; I

$$\begin{array}{r|c|c|c|l} & M & N & P & Q \ldots \\ \text{hie} & 0 & -\frac{1}{p} & -\frac{y}{p^2} & 0 \ldots \end{array}$$

und ſo, nach 29; V; die Variation $= \frac{\delta y}{p} - \frac{y.\,d\delta y}{p^2.\,dx} + \frac{y.\,d\delta x}{p.\,dx}$ Nach 29; VI; wird die

$$\text{Variation} = \frac{y.\,\delta y}{dx} - \frac{y.\,dx.\,d\delta y}{(dy)^2}$$

30. Variation von $V.\,dx^n$

I) Sie iſt $V.\,\delta dx^n + dx^n.\,\delta V$

Die Variation von dx^n findet ſich, wenn man dieſen Ausdruck von $(d\,(x + \delta x))^n$ abzieht, das iſt von $(dx + d\delta x)^n$. Sie iſt alſo $= n.\,dx^{n-1}.\,d\delta x$; Alſo die geſuchte Variation $= nV.\,dx^{n-1}.\,d\delta x + dx^n.\,\delta V$; wo man den letzten Theil aus (29) hat.

II) Das Product deſſen Variation hie gefunden wird, iſt unendlich klein oder unendlich groß, nachdem n bejaht oder verneint wird, V endlich angenommen. So zeigt ſich hie, wie man die Variation von etwas unendlich groſſem, oder unendlich kleinem findet.

Variationen von Integralen.

31. I. V ſey eine Gröſſe durch x; y; derſelben Differentiale vom erſten oder mehren Graden allenfalls auch Integrale die auf das genannte ankommen gegeben.

Exempel wären: $y^2 + x^2$;
$y.\,dx - x.\,dy$;
$y.\,ddx + x.\,ddy$;
$y.\int\sqrt{(dx^2 + y^2)}$ u. ſ. w.

II. Wie die Coordinaten AP, PM, zuſammengehören, ſo gehört ihnen ein gewiſſes V. Iſt das keine Linie, ſo kann es durch Diviſion, mit einer

einer Gröſſe die für alle Coordinaten einerley bleibt, auf eine Linie gebracht werden.

Z. E. $V = y. \int \surd (dx^2 + dy^2)$ wäre für die Abſciſſe AP ein Rechteck, unter der Ordinate PM, und der krummen Linie Länge BM. Nimmt man eine gerade Linie, a, die für AP, PM, ſo groß iſt als für AQ, QN, kurz für eine Stelle der krummen Linie ſo groß als für die andre ſo iſt $\frac{y. \int \surd (dx^2 + dy^2)}{a}$ eine gerade Linie.

III. Man kann alſo durch P auf die Abſciſſe, ein Perpendikel PV ziehn, das entweder ſo groß iſt als V, oder ſich wie dieſe Gröſſe verhält.

Geht dergleichen Perpendikel QW auch durch Q, ſo ſind PV, QW Ordinaten einer Linie welche mit BM einerley Abſciſſen hat, und in der die Ordinaten ſich wie V verhalten.

IV. Geht die Linie BM bis an D daß man CD als ihre letzte Ordinate annimmt, ſo ſey CF die letzte Ordinate der Linie (III).

V. Differential der Fläche dieſer Linie iſt VP. PQ. und ſo iſt V. dx ſo groß als erwähntes Differential der Fläche, mit einer unveränderlichen Gröſſe (II) multiplicirt Alſo verhält ſich $\int V. dx$ allemahl wie die Fläche der krummen Linie VW, von der Abſciſſe o an, bis an die Abſciſſe AP, oder Ordinate PV.

VI. Setzt man $x = AC$; ſo iſt $\int V dx$, wie die Fläche genannter Linie bis an die Ordinate CF.

VII. Begreiflich bekömmt man $V + \delta V$ wenn man in V (I) $x + \delta x$; $y + \delta y$; und ſo ſtatt jeder Grösſe die ſich in dem Ausdrucke von V befindet, dieſe Gröſſe + ihrer Variation ſetzt.

So giebt ſich vermittelſt der Diviſion durch eben die unveränderliche Gröſſe welche in (II) gebraucht war, $P^* V^*$. Und ſolchergeſtalt eine krumme Linie $V^* W^* F^*$ deren Ordinaten ſich wie $V + \delta V$ verhielten.

VIII. Ein Differential der Fläche dieſer krummen Linie wäre $V^* P^* . P^* Q^*$; alſo die unveränderliche Gröſſe, mit welcher dividirt werden ſoll, als 1 angenommen $= (V + \delta V). (dx + \delta dx) = V. dx + V. \delta dx + \delta V. dx$; des Products vierter Theil bleibt weg als unendlich klein von der dritten Ordnung.

Die beyden letzten hergeſchriebenen Theile, wären alſo die Variation von $V. dx$, dem Differentiale der Fläche der krummen Linie VW; oder, ſie wären $= V^* P^* Q^* W^* - VPQW$.

In der wo die Abſciſſe nicht variirt (25) gäben ſie $V^* VWW^* = \delta V. dx$.

IX. Die Fläche dieſer krummen Linie, das Integral des in (VIII) angegebenen Differentials ginge bis an die Ordinate $P^* V^*$

X. Daß ich die Flächen (V. IX) nicht bis an die Ordinaten QW, $Q^* W^*$ erſtrecke iſt den Ausdrücken des Integrirens gemäß; $\int y. dx$ bedeutet eine Fläche die ſich bis an y erſtreckt, nicht bis an $y + dy$.

31. Ein

32. Ein Integral $\int V . dx$ heiſſt einfach wenn V nur durch die Coordinaten und deren Differentiale, gegeben iſt, alſo d V ſich wie in (29) ausdrucken läſſt.

33. Man ſetze $\int V . dx = \int (y dx + dx \int \surd (dx^2 + dy^2))$. So was heiſſt ein zuſammengeſeztes oder verwickeltes Integral (formula integralis complicata) weil in ihm ſelbſt wiederum ein Integral enthalten iſt. Da wäre

$V = y + \int dx \surd (1 + p^2)$

und $dV = dy + \surd (1 + p^2) . dx$ lieſſe ſich nicht wie in (29) ausdrucken.

34. In der Folge wird Summe von Variationen erwähnt. $P^* M^* - PM$ iſt die Variation von PM. Man ſtelle ſich alſo alle Ordinaten der Linie BM von B bis M vor, und jeder ihre variirte, das iſt alle Ordinaten der Linie $B^* M^*$ von B^* bis M^*; Jede variirte übertrifft die ihr zugehörige unvariirte um derſelben Variation. So machen alle dieſe Variationen eine gewiſſe Summe aus, die man $\int \delta y$ nennen kann;

Alſo iſt auch $d \int \delta y = \delta y$.

35. Lehrſatz. Eines Integrals $\int W$ Variation, iſt ſo groß als das Integral der Variation von W; $\delta \int W = \int \delta W$.

Beweis. Z ſey eine Gröſſe deren Differential $= W$, oder $dZ = W$.

So iſt $\delta d Z = \delta W$

Aber $\delta d Z = d \delta Z$ (12)

Alſo $d \delta Z = \delta W$; Folglich $\int d \delta Z = \int \delta W$;

 Aber

Aber $\int d\delta Z = \delta Z = \delta\int W$
Folglich $\delta\int W = \int\delta W$.

36. Exempel. Es ſey $W = x.\,dy + y.\,dx$ Alſo $\int W = x.\,y$; Davon die Variation $x.\,\delta y + y.\,\delta x$. Und dieſer Variation Differential

$$x.\,d\delta y + \delta y.\,dx + y.\,d\delta x + \delta x.\,dy$$

Das iſt (12)

$$x.\,\delta dy + \delta y.\,dx + y.\,\delta dx + \delta x.\,dy$$

Dieſes iſt Differential der Variation des Integrals.

Des Integrals Differential iſt W; und davon die Variation

$$= x.\,\delta dy + dy.\,\delta x + y.\,\delta dx + dx.\,\delta y$$

Alſo das Differential der Variation des Integrals, ſo groß als die Variation des Differentials, oder $d\delta\int W = \delta W$; daher auf beyden Seiten ſummirt $\delta\int W = \int\delta W$.

37. I. Hat man alſo ein Integral $\int V.\,dx$; ſo iſt deſſen Variation, das Integral der Variation von $V.\,dx$

alſo $= \int(V.\,\delta dx + dx.\,\delta V)$ oder
$= \int(V.\,d\delta x + \int dx.\,\delta V)$

Der erſte Theil iſt $= V.\,\delta x - \int\delta x.\,dV$

alſo endlich

$$\delta\int V.\,dx = V.\,\delta x - \int\delta x.\,dV + \int dx.\,\delta V$$

II. Wenn in (31; V) die Fläche bis $PV = \int V.\,dx$, variirt ſo kömmt (daſ. IX) die Fläche bis P^*V^*; Jene alſo von dieſer abgezogen läſſt $\delta\int V.\,dx$.

In

In 31; VIII. ſteht die Variation von V. dx Wenn man die integrirt, kömmt was hie in (I) in der letzten Zeile rechter Hand des Gleichheitszeichens ſteht. Das iſt alſo = $\int \delta V.\, dx$.

38. Aufg. Wenn das Integral ein einfaches iſt (32) ſeine Variation zu finden.

Aufl. I. Da ſteht δV in (29; IV) des Integrals (37) Variation iſt alſo =

$$V.\, \delta x + \int dx.\, (M.\, \delta x + N.\, \delta y + P.\, \delta p + Q \delta q + R.\, \delta r \ldots)$$
$$- \int \delta x.\, (M.\, dx + N.\, dy + P.\, dp + Q.\, dq + R.\, dr \ldots)$$

II. Das erſte Glied der obern Summe hebt ſich mit dem erſten der untern auf, ſo kömmt $\delta \int V.\, dx =$

$$V.\, \delta x + \int N.\, (dx.\, \delta y - dy.\, \delta x)$$
$$+ \int P.\, (dx.\, \delta p - dp.\, \delta x)$$
$$+ \int Q.\, (dx.\, \delta q - dq.\, \delta x)$$
$$+ \int R.\, (dx.\, \delta r - dr.\, \delta x) \text{ u. ſ. w.}$$

III. Aus 20; 22; 24; laſſen ſich die Producte, in denen N, P, Q, R, befindlich ſind ſo ausdrucken

$$N.\, dx.\, (\delta y - p.\, \delta x)$$
$$P.\, d\, (\delta y - p.\, \delta x)$$
$$Q.\, d\, (\delta p - q.\, \delta x)$$
$$R.\, d\, (\delta q - r.\, \delta x)$$

IV. Wenn man $\delta y - p.\, \delta x = \omega$ ſetzt; So bekömmt man in (III) N. dx. ω und P. dω. Das kann die Muthmaaſſung veranlaſſen, Differentiale des griechiſchen letzten Buchſtabens möchten

weiter fortgehn. Die prüft man nun ſo:

$$\delta p - q.\,\delta x = \frac{d\delta y - p.\,d\delta x - dp.\,\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d\omega}{dx};$$ Ferner $\delta q - r.\,dx =$

$$\frac{d\delta p - q.\,d\delta x - dq.\,\delta x}{dx} = \frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$

V. Die Parentheſe um den Quotienten zweyer Differentiale, bedeutet daß das Zeichen der Differentiation vor ihr, ſich auf den Quotienten bezieht, nicht blos etwa auf ſeinen Dividend. Sie hat alſo nicht die Bedeutung wie in An. Un. 484.

Euler ſchreibt den letzten Ausdruck in (IV) ſo:

$$\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{d\omega}{dx}$$

Ein Punct iſt doch faſt allgemein gewöhnlich Zeichen der Multiplication. Man muß alſo aus dem Zuſammenhange errathen, was er hie bedeutet.

VI. Wenn man nun die Ausdrückungen (IV) in (III) braucht, und dann die Variation des Integrals in (II) durch ihren erſten Theil, und die folgenden Integrale ausdruckt, So kömmt dieſe Variation

$$= V.\,\delta x + \int N.\,dx.\,\omega + \int P.\,d\omega$$

$$+ \int Q\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \int R\,d\left(\frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right)\ldots$$

Wei-

Weiter fortgeſetzt findet man ſie in Eul. Calc. Var. §. 79. da ſich auch das Geſetz des Fortganges noch deutlicher zeigt.

VII. Der dritte Theil läſſt ſich ſo ausdrucken: $P.\,\omega - \int \omega.\, dP.$

VIII. Der vierte Theil läſſt ſich ſo ausdrucken: $Q.\,\frac{d\omega}{dx} - \int dQ.\,\frac{d\omega}{dx}$ Was im zweyten Stücke hinter $\int$ ſteht iſt $= \frac{dQ}{dx}.\,d\omega$; alſo das zweyte Stück $= \frac{dQ}{dx}\,\omega - \int \omega.\, d\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ alſo der vierte Theil

$$= Q.\,\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\,\omega + \int \omega.\, d\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

IX. Der fünfte Theil läſſt ſich ſo ausdrucken: $R.\,\frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \frac{dR}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$

Das zweyte Stück hievon, mit Beyſeitſetzung des Zeichens – läſſt ſich ſo ausdrucken $\frac{dR}{dx}.\,\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{dR}{dx}\right).\,d\omega$ und von dieſem Ausdrucke des zweyten Stücks, läſſt ſich wiederum deſſelben zwey-

 tes

tes Stück mit Beyſeitſetzung des Zeichens — ſo ausdrucken $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \omega - \int \omega . d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right)\right)$

Alſo iſt der fünfte Theil

$$R . \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \omega - \int \omega . d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right)\right)$$

39. Aufgabe. Die Variation des Integrals (38) ſo darzuſtellen, daß keine Differentiale der Variationen von x und y, nach einem Summationszeichen ſtehn.

Aufl. I. Man ſuche aus 38; VI; VII; VIII; IX, was hinter einem Summationszeichen ſteht. Es beträgt zuſammen

$$\int \omega . dx . \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\frac{dR}{dx}\right)\right)$$

II. Eben daraus, was in ω multiplicirt iſt. Es macht zuſammen $\omega . \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\frac{dR}{dx}\right)$

III.

III. Und daraus, was in $\frac{d\omega}{dx}$ multiplicirt iſt; macht zuſammen $\frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \frac{dR}{dx}\right)$

IV. Und was in $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ multiplicirt iſt, nähmlich $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \cdot R.$

V. So kann man die Variation des Integrals durch folgende Zeilen zuſammen angeben:
Die erſte ſteht in (I)
Die zweyte $V . \delta x +$ dem was in (II) ſteht.
Die dritte ſteht in (III)
Die vierte in (IV)

VI. Euler hat auch mit für S (29; I) gerechnet, ſo kömmt in jeder Zeile ein Glied mehr, und noch eine fünfte Zeile.

VII. Wenn man dx beſtändig ſetzt, ſo kömmt

$$\delta \int V . dx = \int \omega . dx . \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3}\right)$$
$$+ V . \delta x + \omega . \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \frac{dR}{dx}\right)$$
$$+ \frac{d^2 \omega}{dx^2} \cdot R$$

VIII.

VIII. Wenn ſich die krumme Linie welcher die Coordinaten x; y; gehören von B bis M erſtreckt, ſo wird der Theil welcher als Integral ausgedruckt iſt (I) durch alle Puncte dieſer Linie beſtimmt, weil für jeden Punct ω einen andern Werth bekömmt.

Aber für die folgenden Theile (II; III; IV;) iſt ω, was der letzten Abſciſſe und Ordinate, gehört alſo = P* M* − PM

$$- \frac{(QN - MN)}{PQ} . PR^*$$

IX. Weil bisher ganz unbeſtimmt gelaſſen iſt, wie ſich der Coordinaten Variationen gegen der Coordinaten Differentiale verhalten ſollen, ſo laſſen ſich weder der ſummatoriſche Theil noch die übrigen, anders angeben als ſie hie ausgedruckt ſind.

X. Setzte man jeder Coordinate Variation verhielte ſich, wie eben derſelben Coordinate Differential; $\delta y : \delta x = dy : dx$, ſo wäre (38; IV) $\omega = 0$, ſo fiele alles weg was in I; II; III; IV; ſteht, und käme $\delta \int V . dx = V . \delta x$

Bey dieſer Vorausſetzung wären die Differentiale der Längen beyder Linien parallel; MN mit M* N*

40. Exempel. I) Es ſey $V = x.y + x.y^p$ Alſo $dV = (1 + p).y.dx + (1 + p).x.dy + x.y.dp$

folg=

folglich	M	N	P	Q	...
hie	$(1 + p).\,y$	$(1 + p).\,x$	$x.\,y$	0	...

Folglich $\frac{dP}{dx} = y + p.\,x$ und $N - \frac{dP}{dx} = x - y$

II) So kömmt in 39; VII; rechter Hand

$$dx.\,\int (\delta y - p.\,\delta x).\,[x - y] + V.\,\delta x + (\delta y - p.\,\delta x).\,x.\,y$$

Weil dx unveränderlich iſt, darf ich es vor das Summationszeichen ſchreiben.

III) Was integrirt werden ſoll iſt

$$x.\,\delta y - \frac{x.\,dy}{dx}.\,\delta x - y.\,\delta y + \frac{y.\,dy}{dx}.\,\delta x.$$

IV) Wenn man für die Linie BM, die erſte Abſciſſe = 0 ſetzt, welcher die Ordinate AB gehört, ſo gehört einer Abſciſſe die man für die zweyte annimmt, oder für die erſte unter den folgenden, eine Ordinate welche die zweyte iſt, oder die erſte unter den folgenden Ordinaten, und ſo der folgenden Abſciſſen zweyter, dritter ... unter den folgenden Ordinaten die zweyte, dritte. . . .

Es iſt willkührlich wie weit man dieſe Abſciſſen und Ordinaten fortſetzen will. Ich nehme an man gehe bis an AP und PM.

V) Jede Abſciſſe mit der Variation ihrer Ordinate multiplicirt giebt ein $x.\,\delta y$; Alle dieſe Producte zuſammen machen $\int x.\,\delta y$; das letzte unter ihnen iſt $AP.\,(P^*M^* - PM)$

VI)

VI) Wenn jede Abſciſſe um ihr Differential wächſt, wächſt zugleich die zugehörige Ordinate um ihr Differential.... Wachſen kann bekanntlich auch verneint genommen werden und Abnehmen bedeuten... Für jede Abſciſſe giebt es alſo ein $\frac{x.\,dy}{dx}$; Dieſes wird mit der Variation derſelben Abſciſſe multiplicirt: Alle ſolche Producte zuſammen geben $\int p.\,x.\,\delta x$; Das letzte unter ihnen iſt $\frac{QN - PM}{PQ}.\ AP.\,(AP^* - AP)$

VII) Jede Ordinate mit ihrer Variation multiplicirt giebt ein Product. Alle zuſammen geben $\int y.\,\delta y$; Das letzte unter ihnen iſt $PM.\,(P^*M^* - PM)$

VIII) Jede Ordinate mit ihrem Differential multiplicirt, und das Product mit der Abſciſſe Differentiale dividirt, giebt einen Quotienten, dieſer wird mit der Variation der Abſciſſe multiplicirt, und alle die Producte zuſammen geben $\int p.\,y.\,\delta x$ Das letzte unter ihnen iſt $= \frac{PM.\,(QN - PM)}{PQ}.\ PP^*$

IX) Was in V; VI; VII; VIII; iſt angegeben worden, mit den Zeichen + und − nach (III) gehörig zuſammengeſetzt giebt in (II) $\int (\delta y - p.\,\delta x)$. [x − y] wird alſo durch alle Abſciſſen und

und Ordinaten der krummen Linie BM beſtimmt, von B bis M.

Und giebt mit dx multiplicirt, den ſummatoriſchen Theil der Variation von ſV. dx.

X) Jede Abſciſſe und zugehörige Ordinate der Linie BM, beſtimmt ein V, ein andres Paar ſolcher Coordinaten ein andres. Wenn man alſo die Linie bis an M erſtreckt, ſo iſt das dieſem Puncte gehörige V, das welches durch AP und PM beſtimmt wird, in der Figur durch PV angegeben (31; III) und V. δx iſt $=$ PV. PP*.

XI) Für eben den Punct M; iſt $\delta y = P^*M^* - PM$; $p.\, \delta x = \frac{QN - PN}{PQ} . PP^*$; x. y $=$ AP. PM. Alſo wird $(\delta y - p.\, \delta x).\, x.\, y$ nur durch dieſen Punct M beſtimmt.

XII) So erfodert in (II) nur der erſte ſummatoriſche Theil, alle Puncte der krummen Linie von B bis M (IX) die übrigen beyden Theile werden nur durch M gegeben.

XIII) Weil die Verhältniß zwiſchen Variationen und Differentialen der Coordinaten, ganz unbeſtimmt iſt, ſo kann man das Integral (IX) nicht durch x und y angeben. Das lieſſe ſich thun, wenn erwähnte Verhältniß beſtimmt würde.

XIV) Es ſey z. E. $\delta y = \frac{1}{2}.\, dy$; $\delta x = \frac{1}{3}\, \delta x$ ſo wäre $\delta y - p.\, \delta x = \frac{1}{2}.\, dy - \frac{dy}{dx}.\ \frac{1}{3}.\, dx =$

$\frac{1}{6}.$ dy

$\frac{1}{6}$. dy was integrirt werden ſoll (III) = $\frac{1}{6}$. (x. dy − y. dy) alſo das Integral = $\frac{1}{6}$. ((x − $\frac{1}{2}$ y). y − ſy. dx) und endlich von ſ (x. y. (dx + dy)) die Variation =

$$\tfrac{1}{6}.\ dx.\ ((x - \tfrac{1}{2}\ y).\ y - \textstyle\int y.\ dx)$$

$$+ x.\ y. \left(1 + \frac{dy}{dx}\right). \tfrac{1}{3}.\ dx + x.\ y.\ \tfrac{1}{6}.\ dy$$

Die erſte Zeile wird durch die ganze Linie BM beſtimmt, weil in ihr die Quadratur dieſer Linie vorkömmt, das folgende giebt ſich, wenn AP, PM, ſtatt x, y; geſetzt werden. (39; VIII.)

43. Die Lehren (1. . 39) ſind aus Euler: Appendix de calculo Variationum bey: Inſtitutionum Calculi Integralis Volumen III. Petrop. 1770; die drey erſten Capitel. Das vierte redet de Variatione formular. integral. complicatarum duas variabiles inuoluentium. Das Beywort erklärt hie (33)

44. Das fünfte: de var. form. int. variabiles inuoluentium et duplicem relationem implicantium. In einer Formel ſind drey veränderliche Gröſſen mit ihren Differentialen von unterſchiednen Graden, zwo von ihnen werden, jede für ſich als eine Function der dritten angeſehn, das iſt duplex relatio.

45. Eine krumme Fläche, wird durch eine einzige Gleichung zwiſchen drey Coordinaten x; y; z, angegeben, da iſt jede Coordinate eine Function

tion der beyden übrigen zuſammen. (An. endl. Gr. 514; 547; 548). Eine Linie auf einer krummen Fläche (An. endl. Gr. 570) iſt auch durch drey Coordinaten gegeben aber ſo: Auf die Grundfläche fällt von jedem Puncte der krummen Linie ein Loth = z, da iſt der krummen Linie Projection auf die Grundfläche, eine krumme Linie in einer Ebene wo y eine Function von x iſt.

Nun ſtelle man auf die Grundfläche eine Ebene ſenkrecht durch die gerade Linie auf welchen die x genommen werden. Auf dieſe Ebene fälle man auch Lothe von jedem Puncte der Linie mit doppelter Krümmung; Dieſe Lothe geben auf nur genannte Ebene auch Projection der Linie mit doppelter Krümmung; Eine krumme Linie wo z eine Function von x iſt.

So ſtellen die beyden Projectionen die doppelte Relation dar.

46. Sechſtes Capitel: Variation von Differentialformeln mit drey veränderlichen Gröſſen, deren Verhalten durch eine einzige Gleichung gegeben iſt... Wie bey einer krummen Fläche (45) Dieß iſt der Innhalt des (43) angezeigten Anhanges.

47. Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi auct. L. Eulero findet ſich in Noui Commentarii Ac. Sc. Imp. Petropolitanae T. XVI. pro anno 1771; p. 35. – 70 und daraus in Euleri Inſtitut. calc. Integral. Vol. IV. continens Supplementa (Petrop. 1794) p. 596. . 620

48. In einer krummen Linie, kann man allemahl die Ordinate als eine Function der Abſciſſe anſehn, alſo ſetzen $y = X$.

49. Gehören zu eben der Abſciſſe, Ordinaten mehrer einander unendlich nahen krummen Linien, ſo kann man das ſo ausdrucken $y = X + t. V$ wo V eine Function von x iſt, und t unendlich klein genommen werden kann.

50. Variation zu finden, betrachte man alſo x als unveränderlich (nähmlich die Abſciſſe variirt nicht (25) und beſtimme das Differential von y nur aus der Veränderlichkeit von t.

51. Eine Ordinate zu eben der Abſciſſe wie die (49) gehörig, nur dadurch unterſchieden daß ſie ein ander t hat, wäre

$$= X + V. (t + dt)$$

52. Beyder Ordinaten Unterſchied wäre $V. dt$. Das wäre Variation der Ordinate y wo die Abſciſſe nicht variirt.

53. V das beyden Ordinaten (50; 51) gemein iſt, findet ſich, wenn man $y = X + V. t$ ſo differentiirt, daß ſich nichts als t ändert, und dieſes Differential mit dt dividirt. Alſo, nach (An. Un. 484) $V = \left(\frac{dy}{dt}\right)$ Nun iſt $V. dt$ die Variation von y; alſo, das bisher gebrauchte

$$\delta y = \left(\frac{dy}{dt}\right). dt$$

54. Es

54. Es ſey Z eine Function von x und y ohne derſelben Differentiale, alſo wie gewöhnlich differentiirt $dZ = M.\,dx + N.\,dy$. Variation von Z nun, ſetzt x bleibe ungeändert, und ſtatt des Differentials der Ordinate ſchreibe man ihre Variation (53). Die Variation von Z iſt alſo $= N.\,dt.\left(\frac{dy}{dt}\right)$ Dieſe Variation, welche man vorhin δZ ſchriebe ſchreibt E. hie ſo: $dt.\left(\frac{dZ}{dt}\right)$.
Alſo iſt $\frac{dZ}{dt} = N.\left(\frac{dy}{dt}\right)$

55. So viel bringe ich hie bey einen Begriffe von dieſem Verfahren zu geben. Ausführung und Anwendung lerne man aus angeführter Schrift.

56. Mich deucht, die Variationsrechnung wie ich ſie anfangs nach Eulern vorgetragen habe, iſt ganz verſtändlich, und ſtatt ihrer dt einführen ſieht mir aus wie ein gekünſtelter Zwang, der ſich nur durch Vortheile in der Rechnung empfehlen müſſte.

Erweiterung der Unterſuchungen über Gröſſte und Kleinſte.

1. In An. An. 152.... iſt gewieſen, wie man unter Gröſſen die nach einem gegebenen Geſetze fortgehn, ... Ordinaten einer gegebenen krummen Linie, ... die gröſſte oder kleinſte findet.

Nun könnte man aber auch eine krumme Linie ſuchen bey der Etwas am gröſſten oder kleinſten wäre.

Dem Anfänger der Geometrie wird geſagt: Unter allen Figuren die gleichen Umfang haben, habe der Kreis die gröſſte Fläche. Den Beweis muß er aus Schriften lernen die ihm angezeigt werden (Geom. 44. S. 1. Anm.)

Alſo: Eine Linie zu finden, die wenn ihre Länge gegeben iſt, den gröſſten Raum einſchlieſſt? Da würde die Linie ſelbſt geſucht die das Gröſſte leiſtet, nicht eine gröſſte Ordinate einer gegebenen Linie.

2. Die erwähnte Eigenſchaft des Kreiſes, hat veranlaſſt auch andre Linien zu ſuchen die in andrer Abſicht etwas Gröſſtes leiſten. Und weil die Eigenſchaft des Kreiſes iſt: unter allen Figuren von gleichem Umfange den gröſſten Raum einzuſchlieſſen, ſo hat man ſolche Unterſuchungen überhaupt iſoperimetriſche genannt, obgleich bey ſehr vielen nicht an Umfang als Gränze des Raumes gedacht wird.

3. Me-

3. Methodus inueniendi lineas curuas maximi minimiue proprietate gaudentes, ſiue ſolutio problematis iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti, auctore Leonh. Eulero; Lauſ. et Gen. 1744; 4.

Die Methode der gróſſten und kleinſten wird von ihm in abſolute und relative getheilt. Die erſte verlangt unter allen krummen Linien welche zu einer und derſelben Abſciſſe gehóren, diejenige bey der ſich eine gewiſſe Eigenſchaft des Gróſſten oder Kleinſten findet.

Die zweyte, ſucht unter allen krummen Linien welche eine gewiſſe Eigenſchaft gemein haben, diejenige wo die Eigenſchaft eines gróſſten oder kleinſten vorhanden iſt.

4. Euler ſtellt ſich vor: an einer Stelle der krummen Linie, ándern Elemente der Lánge der krummen Linie ihre Lagen, ſo daß ſie noch zwiſchen den vorigen Ordinaten bleiben, und ſucht was daraus für Aenderungen an den übrigen Stellen folge.

Nun ſezt er Z ſey eine Function der Coordinaten, und zeigt was erfodert wird wenn $\int Z.\,dx$ ein Gróſſtes oder Kleinſtes ſeyn ſoll.

5. Dieſes umſtándlicher beyzubringen geſtattet hie der Raum nicht. Man ſieht leicht daß die Vorſtellung ſoviel heiſſt als: Die Ordinaten variiren, aber die Abſciſſen nicht. Man wird alſo muthmaaſſen, aus ihr folge eben das was aus der Variationsrechnung folgt, deren Anwendung auf ſolche Fragen ich nun zeigen will.

6. Wie einer gegebenen krummen Linie Ordinate, eine Gröſſte oder Kleinſte wird, wenn ihr Differential ... eigentlich $\frac{dy}{dx}$ ... = o wird, ſo wird $\int V.\,dx$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes wenn ſeine Variation = o wird. An dieſer Stelle geht die Variation aus bejahter in verneinte über, oder umgekehrt.

7. Nun bezieht ſich im Ausdrucke der Variation (Variationsr. 39; V; VII) nur der ſummatoriſche Theil ... die oberſte Zeile in V. R. 39; VII... auf die ganze krumme Linie, das Uebrige auf ihre letzte Stelle (V. R. 39; VIII) alſo muß man den ſummatoriſchen Theil = o ſetzen, folglich das was in $\omega.\,dx$ multiplicirt iſt.

8. Dieſes = o geſetzt giebt alſo eine Gleichung zwiſchen x; y, und ihren Differentialen. Das iſt die Gleichung für die geſuchte krumme Linie.

9. Die Beſchaffenheit dieſer Gleichung kömmt darauf an wie V eine Function der Coordinaten und ihrer Differentiale iſt. Die ſogleich folgenden Sätze werden das erläutern.

Fragen

Fragen vom Gröſſten oder Kleinſten.

Erſte Gattung.

$N = 0$

V iſt nur durch x und y gegeben, ohne derſelben Differentiale. Man ſoll das Verhalten zwiſchen x und y finden, daß ∫V. dx ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes wird.

1) Aus der angenommenen Bedingung folgt $dV = M.\, dx + N.\, dy$

2) Man verlangt ∫V. dx ſoll für jede Abſciſſe ein Gröſſtes oder Kleinſtes ſeyn.

3) Alſo muß V. dx für jede Abſciſſe dergleichen ſeyn, folglich auch V.

4) Folglich muß $dV = 0$ ſeyn ohne daß die Abſciſſe ſich ändert.

5) Allsdann aber iſt (1) $dV = N.\, dy$.

6) Folglich erhält man das Verlangte wenn man $N = 0$ ſetzt.

7) Hie alſo iſt keine Variationsrechnung nöthig, blos die im Anfange der An. Un. gelehrte Methode von Gröſſten und Kleinſten.

8) Indeſſen iſt dieſes auch in Var. Rechn. 39; VII. enthalten. Wenn des Integrals Variation $= 0$ ſeyn ſoll, ſo muß deſſen was dort rechter Hand ſteht oberſte Zeile $= 0$ ſeyn. Hie aber ſind P; Q; . . jedes $= 0$; alſo kömmt $N = 0$.

I. Exempel.

1. X iſt eine Function von x, Y eine von y; beyde nur von den endlichen Gröſſen, ohne Differentiale. Man ſucht die krumme Linie für welche $\int X.Y.dx$; ein gröſſtes oder kleinſtes iſt.

2. Alſo
$V = X.Y$; $dV = Y.dX + X.dY$
Es ſey $dX = F.dx$; $dY = G.dy$ wo F eine Function von x iſt, und G eine von y.
Folglich $dV = Y.F.dx + X.G.dy$.

Nun $N = 0$ Folglich $X.G = 0$. Alſo entweder $X = 0$ oder $G = 0$; Aber der erſte dieſer beyden Buchſtaben bedeutet eine Function von x allein, der andere eine von y allein. Keine Function von einer einzigen veränderlichen Gröſſe $= 0$ geſetzt, giebt eine Gleichung für eine krumme Linie. Folglich giebt es keine krumme Linie für welche (1) ſtatt fände. Das vorgegebene Integral hat keinen gröſſten oder kleinſten Werth.

Eul. methodus inuen. lin. curuas. . . Cap. II. §. 16.

II. Exempel.

Eine krumme Linie zu finden für welche $\int (a.x.y - y^3).dx$ ein gröſſtes oder kleinſtes iſt.

1. Alſo $dV = a.y\,dx + (a.x - 3y^2)\,dy$
Folglich $N = a.x - 3.y^2$ Dieß $= 0$ geſetzt giebt $\frac{1}{3}a.x = y^2$; Eine Parabel deren Parameter $= \frac{1}{3}a$.

2. So

2. So iſt $V.\,dx = \frac{2}{3.\sqrt{3}} \cdot a^{3:2} : x^{3:2}$ Das Integral $= \frac{4}{15.\sqrt{3}} \cdot a^{3:2}.\ x^{5:2}$

3. Man nehme zwiſchen x und y eine Gleichung an. Z. E. für eine gerade Linie $y = n.\,x$, ſo verwandelt ſich das Integral in $\int (n.\,a\,x^2 - n^3\,x^3).\,dx = n.\ x^3.\ (\frac{1}{3}\,a - \frac{1}{4}.\,n^2.\,x)$

4. Das Integral (2) mit dem (3) dividirt giebt

$$\frac{\frac{16.\sqrt{3}}{15} \cdot a^{3:2}}{n.\ x^{1:2}.\ (4.\,a - 3.\,n^2\,x)}$$

Dieſer Quotient iſt gröſſer oder kleiner als 1, nachdem das Integral (2) ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt.

5. Man ſetze $n = 1$ und $x = a$; ſo iſt er $= \frac{16.\sqrt{3}}{15}$ alſo gröſſer als 1.

6. Weil das Integral (2) allemahl bejaht iſt ſo muß das (3) auch bejaht ſeyn wenn es mit jenem ſoll verglichen werden. Alſo muß man x bejaht nehmen und kleiner als $\frac{4.\,a}{3.\,n^2}$

7. Euler Meth. c. 2. §. 17, vergleicht eben die beyden Integrale (2; 3) und ſagt wenn man in ſie beſtimmte Werthe von x ſetzte, würde man finden daß das (2) gröſſer iſt. Daß man dieſe Werthe nach (6) wählen muß erinnert er nicht. Freylich würde die Rechnung darauf führen.

8. Verſichert einmahl die Variationsrechnung, daß das Integral (2) entweder ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt, ſo entſcheidet ſchon eine einzige Probe wenn ein andres ſ (a. x. y − y³). dx kleiner iſt, das (2) ſey gröſſer. Und ſo iſt (5) zureichend.

Wie ſV. dx beſchaffen ſeyn muß wenn Variationsrechnung dabey nöthig iſt.

9. Es muß kein Integral weder algebraiſches noch tranſcendentiſches ſeyn. Den Grund ſieht man leicht aus den beyden nächſtvorhergehenden Exempeln. V welches kein ſolches Integral giebt, heiſſt bey Eulern functio indeterminata. (Er braucht den Buchſtaben Z) Meth. cap. II. §. 6. gegentheils V der beyden vorigen Exempel, functio determinata. Da iſt keine Variationsrechnung nöthig, ob ſie ſich gleich anbringen läſſt. Man ſ. unten: Zweyte Gattung 18.

Der

Der Fragen

zweyte Gattung.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

Wenn V eine Gröſſe iſt, die auſer x, y, auch die erſten Differentiale der Coordinaten enthält, zu machen daß ∫V. dx ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird.

1) Da iſt $dV = M.dx + N.dy + P.dp$ aber Q, R... ſind = 0.

2) Folglich Var. R. 39; VII.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

3) Wenn P ſelbſt mit durch p gegeben iſt, ſo findet ſich auch dp in dP, und die Gleichung (2) enthält Differentiale vom zweyten Grade. Fall wo die Gleichung algebraiſch wird. Eul. meth. C. II. §. 26.

4) Wäre aber p nicht in P; ſo enthielte auch die Gleichung (2) keine Differentiale vom zweyten Grade.

5) Es ſey $V = (n + p). \int (F.dx + G.dy)$ wo n eine unveränderliche Zahl bedeutet, F, G, Functionen jedes von x und y ſind

So iſt $dV = (n + p). F.dx + (n + p). G.dy$
$+ \int (F.dx + G.dy). dp$

alſo

alſo

M	N	P
hie $(n+p).F$	$(n+p).G$	$\int(F.dx+G.dy)$

und die Gleichung (2) wird

$(n+p).G = F + G.p$ alſo

$n.G = F$

Folglich nicht einmahl eine Differentialgleichung des erſten Grades ſondern eine algebraiſche.

6) In (5) iſt $V.dx = n.dx.\int(F.dx + G.dy) + dy.\int(F.dx + G.dy)$

Da alſo giebt ſich das Gröſſte oder Kleinſte $\int V.dx$ durch eine algebraiſche Gleichung; Es kann auch $n = o$ ſeyn.

7) Man ſetze $\int(F.dx + G.dy) = W$ und $n = o$; alſo $\int V.dx = \int W.dy$ ſo iſt klar daß $\int W.dy$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes iſt, wenn $\int V.dx$ dergleichen iſt, alſo die Coordinaten ſich verwechſeln laſſen.

$M = o$

8) Man ſetze V enthalte nicht x ſelbſt, nur y, und der beyden Coordinaten Differentiale. So iſt $dV = N.dy + P.dp$.

9) Aus (2) iſt auf beyden Seiten mit der Abſciſſe Differentiale multiplicirt $N.dy = p.dP$.

Folglich

$N.dy + P.dp = p.dP + P.dp$ alſo (8)

$dV = p.dP + P.dp$ und $V + Const = P.p$

10)

10) Dieſe Gleichung hat als veränderliche Gröſſen, linker Hand nur y und p; rechter Hand kann ſie x; y; p, haben. Wenn man ſtatt p ſeinen Werth ſetzt, und dieſe Differentialgleichung vom erſten Grade integrirt ſo kömmt die Gleichung zwiſchen den Coordinaten. Bey dieſer Integration wird wiederum eine Conſt addirt.

$$N = 0$$

11) Man ſetze V ſoll nur x und p enthalten, alſo $dV = M.dx + P.dp$ und $N = 0$ So iſt (2) $dP = 0$ alſo P unveränderlich $= c$ So iſt $P = C$ die geſuchte Gleichung welche erſte Differentiale enthält, wenn p in P enthalten iſt.

12) Man ſetze V enthalte keine der Coordinaten ſelbſt, nur den Quotienten ihrer Differentiale, alſo M und N jedes $= 0$ und $dV = P.dp$ So iſt wie in (11) $P = C$ alſo $dV = C.dp$ und integrirt $V + D = C.p$

Soll aber P unveränderlich ſeyn, und doch p enthalten, ſo muß p ſelbſt unveränderlich ſeyn. Folglich iſt es auch V; und die Gleichung wird $(V + D).dx = C.dy$ für eine gerade Linie, durch zweene willkührliche Puncte, weil C; D, willkührlich ſind.

$$M = N$$

13) Man ſoll eine krumme Linie ſuchen wo $\int(Z.dx + Z^*.dy)$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes iſt.

iſt. Die beyden groſſen Buchſtaben ſind jeder eine Function der Coordinaten, ſo daß

$dZ = F.\,dx + G.\,dy$

$dZ^* = F^*.\,dx + G^*.\,dy.$

14). Die vorgegebene Formel verwandelt ſich in $\int(Z + Z^*.\,p).\,dx$. Das iſt alſo $\int V.\,dx$ in (1) Folglich das dortige dV hie $= dZ + p.\,dZ^* + Z^*\,dp$

alſo dorten	M	N	P
hie	$F + p.\,F^*$	$G + p.\,G^*$	Z^*

15) Folglich (2)

$G + p.\,G^* = F^* + p.\,G^*$ (13)

oder $G = F^*$

16) Wenn $Z.\,dx + Z^*\,dy$ (13) aus Differentiation einer endlichen Gröſſe entſtanden iſt,

ſo iſt (An. Un. 486) $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = \left(\frac{dZ^*}{dx}\right)$

Aber $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = G$; $\left(\frac{dZ^*}{dx}\right) = F^*$ Findet alſo die Vorausſetzung am Anfange dieſes Abſatzes ſtatt, ſo iſt allemahl (15) wahr.

17) Iſt alſo $Z.\,dx + Z^*.\,dy$ aus Differentiation eines endlichen Ausdrucks den x und y enthielt entſtanden; ſo wird die Frage (13) nur ſo beantwortet: jede Linie thut ihr genug. Eul. Cap. II. §. 32.

18)

18) Das gehört zu der Erinnerung bey: Erſte Gattung II. Ex. 9.

Raum durch kürzeſte krumme Linie einzuſchlieſſen.

I. Aufgabe.

AP, 45 Fig. und das Perpendikel auf ſie PM, ſind gegebene gerade Linien, zwiſchen ihnen und einer krummen Linie AM iſt ein Raum eingeſchloſſen.

Man ſucht die krumme Linie welche unter allen die gleich groſſen Raum einſchlieſſen die kürzeſte iſt.

1. AP, PM, ſind Coordinaten der geſuchten Linie. Mit jedem Paar andern Coordinaten, ſchlieſſt ein andrer Theil von ihr einen Raum von andrer Gröſſe ein, und allemahl, muß der Theil von ihr der den Raum von dieſer Gröſſe einſchlieſſt, kürzer ſeyn, als eine andre krumme Linie, die mit eben den Coordinaten gleichen Raum einſchlöſſe.

2. Man nenne den Raum x; die Abſciſſe wie AP $= t$; die Ordinate wie PM $= y$. Alſo $dx = y.\,dt$; $dt = \frac{dx}{y}$; Das Differential der Länge der krummen Linie $= \sqrt{(dy^2 + dt^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{dx^2}{y^2})} = \frac{\sqrt{(1 + y^2.\,p^2)}}{y}.\,dx$ wenn $dy = p.\,dx$.

p. dx. Heiſſt alſo die Länge welche ein Kleinſtes ſeyn ſoll $= \int V . dx$ ſo iſt $V = \frac{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}{y}$

3. Folglich $dV = - \frac{dy}{y^2 . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}} + \frac{y . p . dp}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$ Daher $M = 0$; $N = - \frac{1}{y^2 . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$; $P = \frac{y . p}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$

4. Folglich $V = \text{Conſt} + P . p$ das iſt

$$\frac{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}{y} = \text{Conſt} + \frac{y . p^2}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$$

Daraus $1 = \text{Conſt}. \; y . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}$.

5. In (2) hat dy eine Dimenſion als Differential der Ordinate, aber dx zwo, als Differential einer Fläche, die Dimenſion von p iſt alſo -1; So erhellt daß jeder Theil der Gröſſe unter dem Wurzelzeichen die Dimenſion o hat.

6. Man ſetze alſo in (2) $b = y . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}$ So kömmt $b^2 = y^2 + \frac{y^4 . dy^2}{dx^2}$

Im zweyten Theile rechter Hand iſt $= dx = y . dt$ (2) Alſo kömmt

$b^2 . dt^2 = y^2 . dt^2 + y^2 . dy^2$ oder

$\sqrt{(b^2 - y^2)} . dt = y . dy$; oder

$dt =$

$dt = \frac{y.\,dy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}}$; Daraus, eine neue unveränderliche Gröſſe angenommen
$t = c - \sqrt{(b^2 - y^2)}$ oder $b^2 - y^2 = (c - t)^2$

7. Man ſetze es ſollen y und t zugleich $= 0$ ſeyn, ſo iſt $b = c$.

8. Es ſey $AP = f$; $PM = g$; ſo iſt (6) (7) $b^2 - g^2 = b^2 - 2.\,b.\,f + f^2$; daher
$$\frac{g^2 + f^2}{f} = 2.\,b$$

9. Ferner aus (6; 7) $- y^2 = - 2.\,b.\,t + t^2$ alſo (8) $y^2 = \frac{g^2 + f^2}{f} \cdot t - t^2$ Da verſchwindet y einmahl für $t = 0$ (7) das andre mahl für $t = \frac{g^2 + f^2}{f}$

10. Nun ſetze man $t = \frac{g^2 + f^2}{2.\,f} - u$ ſo kömmt $y^2 = \frac{1}{4} . \left(\frac{g^2 + f^2}{f}\right)^2 - u^2$

Alſo iſt die krumme Linie ein Kreisbogen, deſſen Mittelpunct in AP, um den Halbmeſſer $= \frac{1}{2} . \left(\frac{g^2 + f^2}{f}\right)$ von A abſtehend.

 11. Be=

11. Begreiflich liegt der Mittelpunct auf der verlängerten AP, wenn g gröſſer als f iſt, zwiſchen A und P, wenn g kleiner iſt. Nähmlich f vom Halbmeſſer abgezogen giebt $\frac{1}{2}. \frac{g^2 - f^2}{f}$

12. Der Winkel den gerade Linien von A und M am Mittelpuncte machen heiſſe $= \varkappa$; ſo iſt

$$\frac{2. g. f}{g^2 + f^2} = \sin \varkappa$$

13. Wenn der Halbmeſſer = r alſo $g^2 + f^2 = 2. f. r$; $\sin \varkappa = \frac{g}{r}$; So iſt die Fläche APM $= \frac{1}{2} r^2. \varkappa - \frac{1}{2} r^2. \sin \varkappa. \cos \varkappa = \frac{1}{2} r^2. (\varkappa - \frac{1}{2}. \sin 2. \varkappa)$

14. Exempel. Es ſey $f = 3$; $g = 4$; alſo $f^2 + g^2 = 25$; $r = \frac{25}{6}$; $\sin \varkappa = \frac{4. 6}{25} = 0{,}96$

$$\varkappa = 73^\circ\, 44'\, 23''$$
$$2. \varkappa = 147^\circ\, 28'\, 46'' = 180^\circ - (32^\circ\, 31'\, 14'')$$
$$\varkappa = 1{,}2869960941$$
$$\tfrac{1}{2} \sin 2 \varkappa = 0{,}2688010746$$
$$1{,}0181950195$$
halb = 0,5090975097
$$\log r = 0{,}6197888$$
$$2. \log r = 1{,}2395776$$
$$\log 0{,}5091 = 0{,}7068031 - 1$$
log der Fläche = 0,9463807

Die Fläche = 8,8385

Iſt

Iſt z. E. die Einheit der geraden Linien Fuß, ſo beträgt die Fläche, die gefundne Zahl von Quadratfuſſen.

Eine Fläche von dieſer Gröſſe können ohne Zweifel mehr krumme Linien begränzen, die kürzeſte iſt der Kreisbogen.

15. Man kann alſo nicht etwa die Fläche nach Gefallen annehmen, ſie iſt durch f, g, und die daraus hergeleiteten r, $\varkappa$, beſtimmt.

16. Setzte man ſie $= a^2 = \frac{1}{2} r^2 . (\varkappa - \frac{1}{2} \sin 2 . \varkappa)$ ſo wäre dieſes keine algebraiſche Gleichung, weil Winkel und Sinus ein tranſcendentiſches Verhalten haben. Es hülfe alſo nichts daß man vermöge dieſer Gleichung aus $\varkappa$ etwa r, und dann aus r eine der beyden Gröſſen f oder g beſtimmen wollte.

17. Selbſt läſſt ſich eine Fläche von gegebenen f, g, und einer dritten Linie begränzt annehmen, wo dieſe dritte wenn ſie am kürzeſten ſeyn ſoll, kein Kreisbogen iſt. Die wäre $a^2 = \frac{1}{2} . f . g$, da iſt ja die dritte Gränze, kürzer als irgend eine ſeyn kann, die gerade Linie von A bis M.

18. Man ſetze $g = 0$; ſo iſt $r = \frac{1}{2} f$ $\varkappa = 180^\circ = \pi$ und die Fläche (13) $= \frac{1}{8} f^2 . \pi$. Ein Halbkreis deſſen Durchmeſſer $= f$, iſt die kürzeſte Linie welche mit dieſem Durchmeſſer die genannte Fläche einſchlieſſt.

19. Wiederum alſo, kann man nicht die Frage ſo abfaſſen: Ueber einer gegebenen geraden Linie

 $= f$;

= f; ſoll eine Fläche von gegebener Gröſſe = a^2 eingeſchloſſen werden: Welches iſt die kürzeſte Linie die das leiſtet? Sondern ſo: $a^2 = \frac{1}{8}. f^2. \pi$; iſt alſo die Gröſſe der Fläche gegeben, ſo findet ſich $f = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, Durchmeſſer eines Halbkreiſes, welcher Halbkreis die gegebene Fläche hat, ſein Umfang iſt die kürzeſte Linie welche mit einer geraden Linie die gegebene Fläche einſchlieſſt.

20. Alſo die kürzeſte Linie welche eine Fläche von gegebener Gröſſe = 2. a^2 einſchlieſſt, iſt der ganze Umfang eines Kreiſes welcher nur erwähnten Durchmeſſer hat.

21. Wenn von einer Fläche weiter nichts gegeben iſt als ihre Gröſſe, ſo kann man dieſe Gröſſe allemahl durch ein Quadrat darſtellen, oder durch das Doppelte eines Quadrats, die Hälfte durch das einfache wie (20).

22. Dieſes Verfahren iſt alſo nicht einerley mit dem des Herrn L'Huilier, Expoſition elementaire des principes des calculs ſuperieurs; § 30; p. 64. Unter allen ebenen Flächen deren Gröſſe gegeben iſt, ſucht er die welche den kleinſten Umfang hat.

Soit ſagt er conçuë une droite quelconque qui coupe cette ſurface en deux parties egales, j'affirme que les contours de ces deux parties ſeront egaux. En effet, ſi une de ces parties n'avoit pas

pas le même contour de l'autre ſubſtituant à celle de ces parties dont le contour ſeroit le plus grand, l'autre partie, on obtiendroit une figure de la grandeur donnée aiant un contour plus petit que la première.

Hr. Lh. nimmt alſo an: Wenn eine ebene Figur, unter allen von gleicher Gröſſe den kleinſten Umfang hat, ſo läſſt ſie ſich durch eine gerade Linie halbiren.

Dieſe Vorausſetzung iſt mir nicht offenbahr. Bey geradelinichten unordentlichen Figuren, möchte es manchmahl ziemlich viel Arbeit erfodern die gerade Linie zu finden die ſie halbirt, und ich weiß nicht ob ſich allemahl eine ſolche gerade Linie finden lieſſe. Nun wird hie die Vorausſetzung auf Figur von dem kleinſten Umfange eingeſchränkt, ich ſehe aber nicht wie dieſe Einſchränkung die Möglichkeit deutlicher macht.

In der lateiniſchen Schrift Hr. l'H. Principiorum calc. diff. et int. expoſitio elementaris Tub. 1795; finde ich dieſe Vorausſetzung nicht, wenigſtens nicht wo man ſie ſuchen könnte im XX. Cap. de problematibus quae vocantur iſoperimetricis.

II. Aufgabe.

1) AM 46 F. iſt eine krumme Linie, durch eine Gleichung zwiſchen CM = y und dem Winkel ACM gegeben, oder, welches eben ſo viel

ſagt, wenn man mit dem Halbmeſſer $CB = r$ den Kreisbogen $BS = t$, beſchreibt, durch eine Gleichung zwiſchen y und t.

Man verlangt die krumme Linie von der Beſchaffenheit, daß ihr Bogen AM der kürzeſte unter allen ſolchen Bogen iſt die gleichen Raum ACM einſchlieſſen.

2) Die Gröſſe des Raums ACM heiſſe $= x$; ſo iſt ihr Differential $dx = \frac{1}{2}. y^2. dt$ (An. Un. 505) alſo $dt = \frac{2. dx}{y^2}$

3) Des Bogen AM Differential $= ds = \sqrt{(dy^2 + y^2. dt^2)}$. Man ſetze $dy = p. dx$ ſo iſt aus (2) $ds = dx. \frac{\sqrt{(4 + p^2 y^2)}}{y}$

4) Das Integral hievon ſoll ein kleinſtes ſeyn, alſo iſt $V = \frac{\sqrt{(4 + p^2 y^2)}}{y}$

$$\text{Daher } dV = \frac{p^2. dy}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$$

$$+ \frac{y. p. dp}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}} - \frac{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}\, dy}{y^2}$$

$$\text{und } M = 0;\ N = \frac{-4}{y^2. \sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$$

$$P = \frac{y. p}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$$

5) Folg=

5) Folglich $V = P.\,p + \text{Conſt}$ oder

$$\frac{\sqrt{(4 + p^2.\,y^2)}}{y} = \text{Conſt} + \frac{y.\,p^2}{\sqrt{(4 + p^2.\,y^2)}}$$

Daraus $4 = \text{Conſt}.\,y.\,\sqrt{(4 + p^2.\,y^2)}$

6) Gleichheit der Abmeſſungen zu erhalten ſey $\text{Conſt} = 1 : 2.\,b$ alſo $2.\,b = y.\,\sqrt{(4 + p^2.\,y^2)}$

Daraus $\frac{2.\,\sqrt{(b^2 - y^2)}}{y^2} = p = \frac{dy}{dx}$ Und ferner

aus (2) $dt = \frac{dy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}} = \frac{dy}{b.\,\sqrt{(1 - (y^2 : b^2))}}$

Alſo $t + \text{Conſt} = \text{Bog}\,\text{ſin}\,\frac{y}{b}$

7) Man ſetze y ſoll $= CA = c$ ſeyn, wo $t = 0$; ſo iſt $\text{Conſt} = \text{Bog}\,\text{ſin}\,\frac{c}{b}$, und

$$t = \text{Bog}\,\text{ſin}\left(\frac{y.\,\sqrt{(b^2 - c^2)} - c.\,\sqrt{(b^2 - y^2)}}{b^2}\right)$$

8) Man fälle von M auf CA das Perpendikel $MP = w$; und nenne $CP = v$;

So iſt

$$\sqrt{(v^2 + w^2)} = y;\ \text{ſin}\,t = \frac{w}{y}\ \text{coſ}\,t = \frac{v}{y}.$$

9) Ferner (7) $t + \text{Bog}\,\text{ſin}\,\frac{c}{b} = \text{Bog}\,\text{ſin}\,\frac{y}{b}$

Alſo $\frac{w}{y}.\,\frac{\sqrt{(b^2 - c^2)}}{b} + \frac{v}{y}.\,\frac{c}{b} = \frac{y}{b}$

Und $w.\,\sqrt{(b^2 - c^2)} + v.\,c = v^2 + w^2.$

 10)

10) $w = 0$ giebt $v = 0$ oder $= c$
$v = 0$ giebt $w = 0$ oder $= \sqrt{(b^2 - c^2)}$

Allgemein $w = \frac{1}{2} . \sqrt{(b^2 - c^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - c^2}{4}\right.}$
$\left. + v . c - v^2\right)$

11) In (9) iſt $w^2 - \sqrt{(b^2 - c^2)} . w + v^2 - v . c = 0$

Man ſetze
$w = \mathfrak{W} + \frac{1}{2} . \sqrt{(b^2 - c^2)}$
$v = \mathfrak{V} + \frac{1}{2} c$
ſo kömmt $\mathfrak{W}^2 + \mathfrak{V}^2 = \frac{1}{4} b^2$

Die krumme Linie iſt alſo ein Kreis, deſſen Durchmeſſer $= b$.

12) Man ziehe auf AC durch C ein Perpendikel von unbeſtimmter Länge, durchſchneide ſolches aus A mit einer Länge $= b =$ AD ſo iſt CD $= \sqrt{(b^2 - c^2)}$ alſo D in der krummen Linie (10) in welcher auch A und C ſind.

13) So iſt AD des Kreiſes Durchmeſſer (11) und K ſein Mittelpunct, wenn AK $=$ KD $= \frac{1}{2} b$.

14) AKC $= 2$. ADC weil D im Umfange des Kreiſes iſt; ſin ADC $= \frac{c}{b} =$ ſin $\frac{1}{2}$ AKC $=$ coſ ACK.

15) Der Winkel ACM heiſſt t (1) Mit ihm ſteht auf einem Bogen aber am Mittelpuncte der Winkel AKM $= 2$. t.

16)

16) Der Raum zwiſchen dem Bogen AM und den geraden Linien CA, CM, iſt = Raum zwiſchen dem Bogen AM und den geraden Linien MK, KC, CA — ΔMKC das iſt = Ausſchnitt AKM + ΔAKC — ΔMKC.

17) Der gegebene unveränderliche Winkel ADC (14) heiſſe $\varkappa$ alſo AKC = $2.\varkappa$
Ferner iſt CKM (5) = $2.(\varkappa + t)$
Alſo CM = $2.$ KM. $\sin \frac{1}{2}.$ CKM
$= b. \sin(\varkappa + t) = y.$

18) Des Dreyecks AKC Höhe iſt $= \sqrt{(\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} c^2)}$ alſo ſein Innhalt $= \frac{c. \sqrt{(b^2 - c^2)}}{4}$
$= \frac{1}{2}$ ΔADC (12) wie gehörig weil AK : AD = 1 : 2.

19) Des Dreyecks ACM Höhe iſt = $\frac{\sqrt{(b^2 - y^2)}}{2} = \frac{b. \cos(\varkappa + t)}{2}$ (17) Alſo ſein Innhalt $= \frac{1}{8}. b^2. \sin(2.(\varkappa + t))$.

20) Der Kreisbogen AM = b. t (15)
Alſo der Ausſchnitt AKM $= \frac{1}{2}. b^2. t$

21) Alſo was in (1) x heiſſt, der Raum ACM $= \frac{1}{4}. b^2. t + \frac{c. \sqrt{(b^2 - c^2)}}{4} - \frac{1}{8}. b^2. \sin 2. (\varkappa + t)$ Wenn man t nach Gefallen annimmt, giebt ſich die Gröſſe eines gewiſſen Raums durch b, c, t, und die kürzeſte Linie welche einen Raum von dieſer Gröſſe einſchlieſſt, iſt der Kreisbogen (20).

22) Exempel $t = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$; So iſt $2.(\varkappa + t) = 2.\varkappa + 180^\circ$, der Sinus davon

$$= - \sin 2.\varkappa = - \frac{2.c.\sqrt{(b^2 - c^2)}}{b^2}$$ alſo (21)

$$\varkappa = \frac{1}{8} b^2.\pi + \frac{1}{2}.c.\sqrt{(b^2 - c^2)}$$

Es ſey $c = \frac{4}{5}b$; ſo iſt die Fläche $= b^2.(\frac{1}{8}.\pi + 0,24)$, $= b^2.\ 0,6326990816\ldots$ Die kürzeſte krumme Linie welche eine Fläche von dieſer Gröſſe einſchlieſſt hat zur Länge (20) $b.\frac{1}{2}.\pi = b.\ 1,5707963\ldots$

23) Von einem Raume ſo groß als der ACM, iſt alſo die krumme Gränze am kürzeſten wenn AM der berechnete Kreisbogen iſt.

Nun hat der Raum noch zwo gerade Gränzen. Es könnte alſo noch gefragt werden ob die Summe der drey Gränzen CA + Bogen AM + MC kleiner iſt, als überhaupt die Summe der Gränzen die einen gleichen Raum einſchlieſſen. Dieſe Unterſuchung allgemein anzuſtellen überlaſſe ich dem der ſich dazu geſchickt und geneigt findet.

24) Für den beſtimmten Fall des Exempels (22) habe ich ſo gerechnet: Des Raumes zwiſchen AC, CD, und dem Halbkreiſe über AD drey Gränzen ſind $\frac{4}{5}.b + \frac{3}{5}.b + b.\frac{1}{2}\pi = b$: 2,9707963. Ein Quadrat ſo groß als der Raum hätte zu ſeiner Seite $b.\sqrt{0,632699\ldots}$

Nun

Nun iſt $\frac{1}{2}$ log 0,6327 = 0,9005989 — 1
alſo iſt die Seite b. 0,79542
des Vierecks Umfang = b. 3,8168

Viel gröſſer als der Figur erwähnten Exempels.

Die Brachyſtochrone.

1. A, B 47 F. ſind zweene Puncte, nicht in einer lothrechten geraden Linie. In einer verticalen Ebene durch ſie, befindet ſich eine krumme Linie AMB, von der Beſchaffenheit daß ein Körper der auf ihr von A, aus der Ruhe zu fallen anfängt, in kürzerer Zeit an B kömmt, als wenn er durch jeden andern Weg fiele. Der Fall geſchieht den galiläiſchen Geſetzen gemäß. Ich führe die Rechnung nach den Formeln meiner höhern Mechanik I. Abſchn. 35 u. f. §.

2. In der verticalen Ebene durch die beyden Puncte, ſey durch A eine verticale gerade Linie gezogen, auf welche das Perpendikel BD = k falle und AD = h abſchneide.

3. Durch AD fiele ein Körper in $\sqrt{\frac{h}{g}}$ Secunden (Höh. M. a. a. O. 37) In kürzerer Zeit fällt begreiflich kein Körper aus A in die Horizontallinie DB.

4. Längſt der geraden Linie AB fiele er in $\sqrt{\frac{h + k^2 h}{g}}$ Secunden Höh. Mech. II. Abſchnitt 21; II.

5. Wenn

5. Wenn die krumme Linie AMB ſo beſchaffen ſeyn ſoll, daß auf ihr der Körper aus A eher in die Horizontallinie DB fällt, als auf jeder andren, ſo muß er auch auf ihr eher in jede andre Horizontallinie PM kommen, als auf jeder andern.

Denn, es wird eine krumme Linie geſucht, die auſer A durch einen gegebenen Punct, B, geht und dieſer gegebene Punct könnte eben ſo gut M, ſeyn.

6. Man nenne alſo AP = x, PM = y ſuche das Verhalten zwiſchen den zuſammengehörigen veränderlichen Coordinaten x; y; damit der Fall durch die krumme Linie AM welche dieſe veränderlichen Coordinaten hat, in kürzerer Zeit geſchieht, als durch jede andere Linie welche durch A und M ginge, und für gleiche Abſciſſen andre Ordinaten hätte, die erſte o; und die letzte PM ausgenommen.

7. Hat man ein ſolches Verhalten gefunden, ſo ſetze man h, k, ſtatt x; y; und man hat alsdann die ganze krumme Linie AMB auf welche der Körper in der kürzeſten Zeit von A bis B fällt.

8. Die Geſchwindigkeit in M; gehört der Höhe AP = x (Höh. Mech. II. Abſch. 19) Mit ſelbiger wird in der Zeit dt ein Weg $= 2\sqrt{(g.x)}.dt$ beſchrieben. Dieſer Weg iſt das Differential der Länge der krummen Linie AM; heiſſt dieſe Länge = s ſo iſt der Weg $= ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$+ dy^2) = dx \surd (1 + p^2)$ wenn $p = \frac{dy}{dx}$;
Alſo $2. \surd g. dt = \frac{\surd(1+p^2)}{\surd x}. dx$, wo $2. \surd g$ für alle fallende Körper einerley iſt.

9. Alſo $2. \surd g$ mit der Zeit durch AM multiplicirt iſt $= \int \frac{dx. \surd (1+p^2)}{\surd x}$ Aber die Zeit durch AM; ſoll kleiner ſeyn, als die Zeit auf jeder andern Linie von A bis M (5) folglich muß das Integral rechter Hand ein kleinſtes ſeyn.

10. Man ſtelle ſich alſo vor, die krumme Linie von A bis M werde ſo variirt daß die variirte mit ihr einerley Abſciſſen habe, alſo nur die Ordinaten variiren. Auch ſetze man dx unveränderlich.

11. So iſt (in Variationsrechnung 38) V. $dx = \frac{\surd(1+p^2)}{\surd x}. dx$, alſo $V = \frac{\surd(1+p^2)}{\surd x}$

Folglich $dV = - \frac{\surd(1+p^2). dx}{2. x. \surd x}$

$\frac{+ p. dp}{\surd x. \surd (1+p^2)}$

12. Alſo, daſelbſt 29; I; $M = - \frac{\surd(1+p^2)}{2. x. \surd x}$,

$N = 0$; $P = \frac{p}{\surd x. \surd(1+p^2)}$; $Q = 0 = R$..

13. Folg=

13. Folglich, daſ. 39; VI.

$$\delta \int V.\, dx = \int \left(\delta y. - \frac{dP}{dx} \right) + P.\, \delta y$$

14. Das Integral (9) ſoll ein Gröſſtes ſeyn, folglich ſeine Variation (13) = o.

Dazu wird erfodert, daß was in dem ſummatoriſchen Theile rechter Hand in δy multiplicirt, = o ſey.

Alſo $\frac{dP}{dx} = o$; und weil dx unveränderlich iſt $dP = o$.

15. Folglich iſt P eine unveränderliche Gröſſe. Weil p keine Dimenſion hat, ſo iſt $- \frac{1}{2}$ die Dimenſion von P (12) Man ſetze alſo P oder

$$\frac{p}{\sqrt{x}.\sqrt{(1 + p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}};$$

16. Daher $\frac{c.\, dy^2}{dx^2} = x + \frac{x.\, dy^2}{dx}$ Folglich

$dy = dx. \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(c - x)}}$ Das iſt die Gleichung zwiſchen den Differentialen der Coordinaten der geſuchten krummen Linie.

17. In An. Un. 557. I iſt, in den dortigen Bezeichnungen, die Gleichung für die Cycloide

dy

$dy = \frac{\sqrt{(2.r - x)}}{\sqrt{x}} . dx$. Man überſetze dieſen Ausdruck in die Buchſtaben der dortigen 7. Fig. ſo heiſſt er $dMP = \frac{\sqrt{EM}}{\sqrt{(2.r - EM)}} . (-dEM)$

18. Man ſtelle ſich in eben der 7 Fig. durch A eine Parallele mit EF vor. Durch die verlängerte MP, wird ſie in einem Puncte geſchnitten, der Q heiſſen mag, und AQ iſt der EM parallel und gleich.

Ferner $QP = EA - MP$, wo $EA = r.\pi$ weil jeder Bogen FL jeder geraden Linie LP gleich iſt. Alſo $dQP = - dMP$. Das giebt alſo aus (17) zwiſchen QP und EM die Differentialgleichung $dQP = \frac{\sqrt{EM}}{\sqrt{(2.r - EM)}} . dEM$.

19. I. Dieſe Differentialgleichung mit der (16) verglichen giebt

	dQP	EM	2r
in (16)	dy	x	c

II. Der Bogen AM gegenwärtiger Figur iſt alſo der Bogen AP der Cycloide in An. Un. 557.

III. Und das hieſige PM einerley mit dem was dorten QP hieſſe und $= r.\pi$ weniger dem dortigen MP wäre.

IV. Aber das dortige MP iſt ſo groß als das dortige ML + dem dortigen Bogen FL das iſt,

iſt, ſo groß als dortiges ML + r. π — dem dortigen Bogen EL.

Der Winkel den der dortige Bogen FL am Mittelpuncte ſeines Kreiſes miſſt heiſſe = ζ. Er hat für den Sinustotus = 1 zum Sinus $\frac{ML}{r}$ wo ML das Quadrat = FM. ME = 2. r. FM — FM^2 = 2. r. EM — EM^2

V. So iſt das dortige MP = r. (ſin ζ + ζ)

Eine Linie ſo groß als ML, kömmt im Halbkreiſe FLE zweymahl vor, beydemahl als r. ſin ζ; Am nächſten bey F iſt ζ kleiner als ein rechter Winkel. Am nächſten bey E um eben ſoviel gröſſer als es vorhin kleiner war.

VI. Was ich alſo in (18) QP genannt habe iſt = r. (π — ζ — ſin ζ)

VII. Und das iſt der Werth des hieſigen PM oder y (IV). Nimmt man hie AP = x ſo iſt ſin $\zeta = \frac{\sqrt{(c.x - x^2)}}{\frac{1}{2} c}$, auch $\frac{1}{2}$. c = r

Es bedeutet aber (IV) ζ einen Winkel deſſen einer Schenkel in der Figur bey An. Un. 557; von des daſigen Halbkreiſes Mittelpuncte nach F zu liegt. Dieſer Winkel nimmt alſo ab, wenn das dortige EM, hieſiges x (I) zunimmt. Auch iſt coſ $\zeta = - \frac{(\frac{1}{2} c - x)}{\frac{1}{2} c}$ Wenn man mit dieſen

Bemer-

Bemerkungen die Gleichung $y = \frac{1}{2} c. (\pi - \zeta - \sin \zeta)$ differentiirt ſo bekömmt man die Differentialgleichung in (16).

20. Stellt man alſo a. a. O. der An. Un. die daſige Cycloide in eine Verticalfläche, ſo, daß ihr Punct A zu oberſt iſt, ſo fällt ein Körper auf ihr durch jeden Bogen AP in kürzerer Zeit, als er auf irgend einer andern Linie welche durch A und P ginge in eben der Zeit fiele.

21. Die ſenkrechte Höhe um welche der Körper niedriger gekommen wäre wäre in der dortigen Cycloide EM; in gegenwärtiger Figur iſt ſie AP.

22. Nimmt man alſo in der Figur für die Cycloide, von E an auf EF ein Stück $= h$; und zieht durch deſſelben Endpunct ein Perpendikel auf EF, ſo iſt, was von dieſem Perpendikel zwiſchen EF und der Cycloide liegt $= r. \pi - k$ (2)

23. I. Für die hie betrachtete Linie AM, iſt aus (16) $ds = \frac{dx \sqrt{c}}{\sqrt{(c - x)}}$ daher $s = 2. (c - \sqrt{(c^2 - cx)})$

II. In An. Un. 559; I iſt der dortige Bogen $FP = 2. \sqrt{2. r. FM}$ alſo $FA = 4. r$ und $AP = 4r - 2. \sqrt{(2r. (2r - EM))}$ welches nach (19) den hieſigen Ausdruck (I) giebt

24. I. Auch $2. \sqrt{g}. dt = \frac{ds}{\sqrt{x}}$

 $= \sqrt{c}.$

$= \frac{\sqrt{c}.\,dx}{\sqrt{(c.x - x^2)}}$. Bedeutet hie ζ den Winkel (19; VII) ſo iſt $2.\sqrt{g}.\,dt = -\sqrt{c}.\,d\zeta$ alſo $2.\sqrt{g}.\,t = \text{Conſt} - \sqrt{c}.\,\zeta$. Der Winkel iſt $\frac{1}{2}\,\pi$ für $t = 0$; alſo die Zeit $t = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{g}} \cdot (\pi - \zeta)$

II. Für $x = c$; wird $\zeta = 0$. Hat man alſo die krumme Linie ſo weit fortgeſetzt als der Körper auf ihr fallen kann, ſo kömmt er an ihre unterſte Stelle in der Zeit $\frac{1}{2}.\,\pi.\,\sqrt{\left(\frac{c}{g}\right)}$. In dieſer Zeit fällt er durch die Cycloide AF An. An. 557 (Höh. Mech. II. Abſchn. 53; XV) ſo wohl als durch jeden ihrer Bogen PF, wenn man ihn von P an fallen läſſt.

III. Fällt der Körper von A ſo weit er fallen kann, ſo braucht er von M, bis an den unterſten Punct die Zeit $\frac{1}{2}.\,\sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \zeta$ (I; II)

IV. Soll B der Punct ſeyn, wo die Tangente der Cycloide horizontal iſt, ſo iſt DB oder $k = \frac{1}{2}\,h.\,\pi$ Da dann $h = c$ oder $= 2.\,r$. Die Zeit des Falles durch die gerade Linie AB iſt dann aus (14) $= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{(c + \frac{1}{4}.\,c.\,\pi^2)} = \frac{1}{2}.\,\pi.\,\sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)}$ länger als die Zeit des Falles durch die Cycloide von A bis B (II).

Die

Die Logarithmen geben $\frac{4}{\pi} = 0{,}40528$ und $\surd\, 1{,}40528 = 1{,}1854$.

25. Das bisherige lehrt ſoviel: Wenn in der verticalen Ebene ADB, ein Perpendikel auf A, nach der Seite nach welcher DB zu liegt gezogen iſt, und ein Kreis, welcher ſich an dieſes Perpendikels Seite welche nach DB gekehrt iſt wälzt, eine Cykloide beſchreibt die durch B geht, ſo fällt ein Körper auf dieſer Cykloide in kürzrer Zeit als auf jedem andern vorgezeichneten Wege.

26. Aber wie groß iſt der Durchmeſſer $c = 2.r$ dieſes Kreiſes, damit die Cykloide die er beſchreibt durch B geht?

27. Da ſind in (6) $x = h$; $y = k$. Der Winkel welcher in 19; VII; ζ heiſſt, hätte hie den Sinus $\frac{\surd(2.r.h - h^2)}{r}$, ſo iſt aus (19; VI)

$$k = r.\left(\pi - \text{Bog sin}\,\frac{\surd(2.r.h - h^2)}{r} - \frac{\surd(2.r.h - h^2)}{r}\right)$$

Aus dieſer Gleichung müſſte r gefunden werden.

28. AMBF, ſey die geſuchte Cykloide bis an ihren unterſten Punct, alſo $AO = 2.r$; $QF = r.\pi$. $AP = x$; $PM = y$
$= r.(\pi - \zeta - \sin\zeta)$ (19; VII.)

29. Man ſtelle ſich an eben der Verticallinie eine andre Cycloide vor deren beſchreibender Halbkreis n. r zum Halbmeſſer habe, n iſt eine noch unbekannte Zahl. Eine Abſciſſe dieſer Cycloide von A genommen ſey = n. h So findet man die Ordinate zu dieſer Abſciſſe, wenn man in (27) n. r; n. h ſtatt r; h; ſetzt.

30. Aber $\frac{2.\ n.\ r.\ n.\ h - n^2.\ h^2}{n^2.\ r^2}$ iſt

$= \frac{2.\ r.\ h - h^2}{n^2}$; alſo

Bog ſin $\frac{\sqrt{(2.\ n.\ r.\ n.\ h - (n.\ h)^2)}}{n.\ r} =$

Bog ſin $\frac{\sqrt{(r.\ h - h^2)}}{r}$. Folglich was hie von π abgezogen wird, einerley mit dem was in (27) von π abgezogen wird, folglich, die Ordinate welche dieſer Abſciſſe zugehört = n. k

31. Mit einem Kreiſe deſſen Halbmeſſer willkührlich iſt, = r* heiſſen mag, beſchreibe man eine Cycloide welche ſich in A anfängt, und an der Verticale liegt wie die bisher betrachtete AMB.

Zu dieſer Abſicht ſtelle man ſich in der Verticalfläche ADB eine Horizontallinie durch A vor, und laſſe ſich den Kreis deſſen Halbmeſſer = r* an derſelben auf der Seite die nach DB gewandt iſt wälzen. So entſteht eine Cycloide wie ich (29) angegeben habe.

Sie

Sie wird, die der Lage und Länge nach gegebene AB, in irgend einem Puncte R ſchneiden, zwiſchen A und B, oder auf der verlängerten AB, welches auf die gegebene Gröſſe h, k, und die willkührlich angenommene r^* ankömmt.

So hat man das Perpendikel auf die Verticallinie $RS = k^*$; und, da R ein Punct in dieſer Cycloide iſt, die zugehörige Abſciſſe $AS = h^*$

32. Nun iſt $h^* : h = g^* : g$ eine Verhältniß ſo groß als die andre. Man nehme $h^* : h = r^* : r$; ſo findet ſich $r, = \frac{r^*.h}{h^*}$

33. Nähmlich $r^* = \frac{h^*}{h} \cdot r = n.r$ wenn n ein Bruch $= \frac{h^*}{h}$ iſt. Die Cycloide deren beſchreibender Kreis n. r zum Halbmeſſer hat, hat für Abſciſſe = n. h; Ordinate = n. k Folglich die Cycloide deren beſchreibender Kreis r zum Halbmeſſer hat, für Abſciſſe h; Ordinate k. (30)

34. Läſſt man alſo den Kreis (31) ſich wälzen, ſo giebt die Cycloide die er beſchreibt allerdings den Punct R, und ſo das Uebrige.

35. Wollte man aber den Kreis nicht wälzen laſſen, ſondern berechnen was dieſes Wälzen gäbe, ſo ſähe die Rechnung ſo aus:

Des Winkels DAB Tangente iſt $= \frac{k}{h}$ alſo gegeben. Man nenne den Winkel $= \alpha$; ſo iſt $k^* = h^*. \tang \alpha$.

Ferner; für die Cycloide (31) die Gleichung zwiſchen Abſciſſe AS; und Ordinate SR nach der in (27)

$$k^* = r^*. \left\{ \pi - \text{Bog sin} \frac{\sqrt{(2. r^*. h^* - (h^*)^2)}}{r^*} - \frac{\sqrt{(2. r^*. h^* - (h^*)^2)}}{r^*} \right\}$$

Setzt man linker Hand $h^*. \tang \alpha$ ſo iſt die einzige unbekannte Gröſſe in der Gleichung h^*; Aber durch ſie ſind rechter Hand ein Sinus, und deſſelben Bogen ausgedruckt.

Die Rechnung lieſſe ſich ſo führen.

36. I. Für jede Cycloide auf bisherige Art an die Verticallinie durch A gelegt, wachſen Abſciſſen und Ordinaten zugleich, wie die Differentialgleichung (16) zeigt.

II. Man nenne der Cycloide (31) unbeſtimmte Coordinaten x^*; y^*; Man hat r^*; nehme ein x^* nach Gefallen, und berechne daraus y^* wie in (19) nur ſtatt der dortigen Buchſtaben hie die mit Sternen geſetzt.

III.

III. Die Cycloide liegt anfangs zwiſchen der Verticallinie, und der geraden AB, da iſt $\frac{y^*}{x^*}$ kleiner als tang α.

IV. Nimmt man x^* gróſſer, ſo kómmt dieſer Quotient náher an tang α, und ſo iſt klar, daß man nur andre und andre Abſciſſen annehmen darf, dieſe Quotienten, etwas kleiner als tang α, und dann etwas gróſſer zu bekommen, da ſich dann ein x^* annehmen láſſt, das den Quotienten ſehr nah an tang α bringt.

V. Hat man die Rechnung weit genug getrieben, ſo iſt das x^* fúr welches der Quotient nah genug an tang α kómmt, was in der Figur AS heiſſt, in (32) h^*. Und ſo findet ſich nach (32) r.

37. Joh. Bern. Op. T. I. p. 192; ſagt: Quomodo a puncto dato tanquam vertice deſcribenda ſit brachyſtochrona ſeu cyclois, tranſitura per aliud punctum datum, ſic facillime expeditur. Beſiehlt alsdann die Cycloide (31) zu beſchreiben, und aus r^*; und dem Puncte R, den verlangten Halbmeſſer r zu finden (32) Nach ſeiner Vorſchrift ſoll man ſagen: AR : AB wie der angenommene Halbmeſſer zum Geſuchten. Er giebt die Regel ohne Erláuterung, Beweis, oder Analyſis, das habe ich aus der Gleichung (27) entwickelt, aber eine ſolche Gleichung giebt Bernoulli auch nicht.

38. Nähme man für die Geſchwindigkeit fallender Körper ein andres Geſetz an als das galiläiſche, ſo käme eine andre Brachyſtochrone.

39. Man ſetze die Geſchwindigkeiten verhalten ſich wie die Höhen ſelbſt. Der Fall durch GF gebe dem Körper die Geſchwindigkeit c und der durch x die Geſchwindigkeit u; wo c, u; Wege in einer Secunde bedeuten können. Es ſey ferner $u = \frac{C.\,x}{G}$ ſo iſt nun in (8) $ds = u.\,dt = \frac{C.\,x}{G}.\,dt$ daher $\frac{C}{G}.\,dt = \frac{ds}{x} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}.\,dx$

Hie ſoll nun von dem was rechter Hand ſteht, das Integral ein Kleinſtes ſeyn. Alſo nach dem Verfahren wie in (11) $V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}$;

$$dV = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}.\,dx}{x^2} + \frac{p.\,dp}{x.\,\sqrt{(1+p^2)}}$$

Folglich $M = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}$;

$N = 0$; $P = \frac{p}{x.\,\sqrt{(1+p^2)}}$;

$Q \ldots = 0$.

Wiederum, wie in (14) $\frac{p}{x.\,\sqrt{(1+p^2)}}$ unveränderlich $= \frac{1}{c}$

Alſo $= c^2.\,dy^2 = x^2.\,dx^2 + x^2.\,dy^2$

Daraus

Daraus $dy = \frac{x.\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}}$

Alſo $y = c - \sqrt{(c^2 - x^2)}$ weil y und x zugleich verſchwinden ſollen.

Alſo M in einem Kreiſe deſſen Halbmeſſer = c, auf die Verticallinie ſenkrecht in A ſteht, daß der Kreis ſie berührt.

Den Halbmeſſer zu beſtimmen iſt $k = c - \sqrt{(c^2 - h^2)}$, daraus $2.\,c = k + \frac{h^2}{h}$.

Joh. Bern. am (37) angef. Orte erinnert für das hie angenommene Geſetz ſey die Brachyſtochrone ein Kreis.

Geſchichte der Bemühungen mit der Brachyſtochrone.

40. In den leipziger Actis Eruditorum 1696. Junius, legte Johann Bernoulli die Aufgabe den Geometern vor, im weſentlichen auf die Art wie ich ſie in (1) ausgedruckt habe, erinnerte, es ſey nicht etwa die gerade Linie AB, ſondern eine krumme, den Geometern ſehr bekannte. Er gab das laufende Jahr Zeit zu Beantwortung der Frage. Dieſe Zeit verſtrich, und in einem Programm das er 1697 d. 1. Jan. zu Gröningen drucken ließ . . es findet ſich Op. Io. Bern. T. I. n. XXXIII. . . . meldete er, es ſey keine Beantwortung erſchienen, Leibnitz habe ihm geſchrie-

ben: ſe iam feliciter diſſoluiſſe nodum pulcherrimi huius et inauditi antea problematis, und gebeten, die Zeit bis auf nächſte Oſtern zu erſtrecken, damit indeſſen auch Franzoſen und Italiäner die Frage erführen, deßwegen wiederhohlt ſie B. auf dieſem Blatte und fügt noch eine, blos geometriſche bey.

41. In Act. Erud. 1697. Mai. giebt Joh. B. die Gleichung, wie ſie bey mir (15) ſteht, und leitet daraus her die geſuchte Linie ſey die Cycloide. Erinnert auch dieſe Frage überſteige die Kräfte der mancherley Methoden von Gröſſten und Kleinſten, auf welche ſich die damahligen Geometern ſoviel zu gute thaten; vermöge der carteſiſchen Geometrie fanden ſie nähmlich nur gröſſte oder kleinſte Ordinate einer gegebenen Linie, nicht die Linie ſelbſt, die ein Gröſſtes oder Kleinſtes leiſten ſollte.

Er bemerkt daß dieſe Brachyſtochrone auch Tautochrone iſt (Meiner Höh. Mech. II. Abſchn. 53.) aber daß beyde Linien nicht einerley ſeyn würden wenn andere Geſetze des Falles ſtatt fänden. In der Vorausſetzung (39) ſey die Tautochrona, eine gerade Linie.

42. Auf Bernoullis Auffoderung erſchien zuerſt in Philoſophical Tranſact. n. 224, p. 384 eine Conſtruction der verlangten krummen Linie, aber ohne Analyſis und Beweis. Tſchirnhauſen Act Er. 1697; p. 222, ſtellte ſich irrig vor, mehr krumme Linien könnten eben das leiſten.

Der

Der Marquis de l'Hoſpital gab ſeine Auflöſung in Act. Er. 1697. ohne Analyſis, ſchrieb aber Bernoullin, er habe ſich der Lehren bedient die B. ihm vordem zu allgemeiner Unterſuchung der Kettenlinien mitgetheilt hatte.

43. Das Bisherige (41; 42;) aus Op. Io. B. T. II. n. 38. Daſelbſt wird auch erwähnt Jacob Bernoulli, habe ebenfalls eine Auflöſung gegeben, ſey der vierte zu den dreyen welche Deutſchland, England, Frankreich, zu Beantwortung der Frage gegeben. Iac. Bernoullii Solutio problematum fraternorum erſchien Act. Er. 1697; Op. Iac. Bernoull. T. II. n. 75. Newtons Conſtruction (42) findet ſich in: Newtoni Opuſcula.. collegit Ioh. Caſtillioneus (Lauſ. et Gen. 1744; III. Quartbände) T. I. p. 289. Newton erinnert, daß man vermittelſt einer willkührlichen Cycloide, die beſchreibe welche durch den gegebenen Punct geht. (33)

44. In Act. Er. 1720; u. f. findet ſich Nic. Bernoullii Ioh. filii exercitatio de traiectoriis orthogonalibus, daraus in Opera Io. B. T. II. n. 116. Nicolaus rückt manches ein das er von ſeinem Vater bekommen, es iſt im Drucke unterſchieden. Dahin gehöret auch §. LXVI, Op. p. 469. Brachyſtochronen zu finden, wenn die Richtungen der Kraft welche das Fallen verurſacht, nach einem gegebenen Puncte zuſammengehn.

45.

45. Remarques ſur ce qu'on a donné juſqu'ici de ſolutions ſur le problème des iſoperimetres par Mr. Jean Bernoulli, ſtehn in Mém de l'Ac. d. Sc. 1718; lateiniſch in Act. Er. 1718; aus den Mém. in Op. Io. B. T. II. n. 103. Da wird Probl. IV. p. 254 gewieſen: Unter allen krummen Linien von gleicher Länge, die durch zweene gegebene Puncte gehn, diejenige zu finden auf welcher ein Körper in der kürzeſten Zeit von einem Puncte zum andern kömmt. Daß aller Länge gleich ſeyn ſoll, unterſcheidet dieſe Frage von der welcher die Cycloide genug that. Hie findet auch eine algebraiſche ſtatt. B Methode läſſt ſich auch bey andern Geſetzen des Falls anbringen.

In eben dem Aufſatze, p. 267. ſteht eine directe und auſerordentliche Auflöſung der Aufgabe: de la plus vite deſcente. Joh. B. hatte ſie 1697 Leibnizen mitgetheilt, dieſer ſie ſehr gelobt, und gerathen ſie damahls noch zurückzuhalten.

46. Sehr allgemeine Unterſuchungen über die Brachyſtochronen finden ſich in Euleri Mechanica T. II. (Petrop. 1736) §. 361 .... 407; für Kräfte nach unterſchiednen Richtungen, in unterſchiednen Ebnen, in wiederſtehenden Mitteln, u. ſ. w.

47. Leibnitii et Io. Bern. Commercium epiſtolicum Lauſ. et Gen. 1745; 2 B. enthält den Briefwechſel von 1694... 1716. Im 28. Br.

Jun.

Jun. 1696. T. I. p. 172; ſchreibt L. Bernoullin ſeine Auflöſung. L. meynt: man könne die Linie tachyſtoptotam nennen, welchen Nahmen ſich B. im 29 B. 177 S. gefallen läſſt, aber Leibnizen, der nur die Differentialgleichung gefunden, und ſolche nicht umſtändlich unterſucht hatte, erinnert daß es die Cycloide ſey. Im 30 Br. bemerkt L. der Nahme Brachyſtochrona, könnte in allgemeinerer Bedeutung dienen, Tachyſtoptota lieſſe ſich eigentlich vom Fallen brauchen.

Im 41. Br. Jan. 1697. ſendet Bernoulli einen Aufſatz vom Sauveur, der eine ſeyn ſollende, aber ganz verunglückte Auflöſung enthält, wo wie L. in 42 Br. erinnert die wahre Infiniteſimalmethode vernachläſſiget iſt. Der Fehler ungeachtet geſteht L. dem Sauveur nicht gemeinen Scharfſinn zu.

Ein holländiſcher Gelehrter Mackrelius, urtheilte bey Bekanntmachung der Aufgabe: So was ſey für die Deutſchen gut, die Holländer würden es nicht beantworten.

Runder Körper welcher nach der Richtung ſeiner Axe bewegt, den kleinſten Widerſtand leidet.

1. Wenn v die Höhe heiſſt welche des Körpers Geſchwindigkeit gehört, ſo ſetzt man den Widerſtand den er leidet $= 4 . \pi . v . \int \frac{y . dy^3}{ds^2}$

(Meine

(Meine Aufgr. d. Hydrodynamik, II. Ausg. 1797; 434; XI.) Es kömmt alſo darauf an die Umſtände zu finden unter welchen das Integral ein Kleinſtes wird.

2. Das Integral iſt $\int \frac{y.p^3.dx}{1+p^2}$ alſo $V = \frac{y.p^3}{1+p^2}$; $dV = \frac{p^3.dy}{1+p^2} + \frac{p^2.y.(3+p^2).dp}{(1+p^2)^2}$

Alſo $M = 0$; $N = \frac{p^3}{1+p^2}$; $P = \frac{p^2.y.(3+p^2)}{(1+p^2)^2}$

3. $N = \frac{dP}{dx}$ giebt $\frac{dV}{dy} - \frac{P.dp}{dy} = \frac{dP}{dx}$ alſo

$dV = P.dp + dP.p$ Folglich

$V + \text{Conſt} = P.p$ oder

$$\frac{y.p^3}{1+p^2} + a = \frac{p^3.y.(3+p^2)}{(1+p^2)^2}$$

4. Daraus $a.(1+p^2)^2 = 2.p^3.y$

5. Hie läſſt ſich p nicht wegſchaffen. Man drucke alſo die beyden Coordinaten durch p aus.

6. $y = \frac{a.(1+p^2)^2}{2.p^3}$; $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y.dp}{p^2}$. Wenn man ſtatt y ſeinen Werth ſetzt, kömmt endlich $x = \frac{1}{2} a.\left(\frac{3}{p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right)$

Für

Für ein angenommenes p findet man alſo x und y, wobey man auch den natürlichen Logarithmen von p braucht.

Geſchichte der Unterſuchungen über den runden Körper welcher den kleinſten Wiederſtand leidet (Solidum minimae reſiſtentiae.)

7. Newton giebt eine Eigenſchaft der krummen Linie an, aus deren Umdrehung um ihre Axe er entſteht. Princ. L. II. Pr. 35. Schol.

8. Als Joh. Bernoulli die Brachyſtochrone zu finden aufgegeben hatte, erſchien Nicolai Fatii Duillerii R. S. S. Lineae breuiſſimi deſcenſus inueſtigatio geometrica duplex cui addita eſt inveſtigatio geometrica ſolidi rotundi in quo minima fiat reſiſtentia Lond. 4. Fatio ſagte die Frage vom Körper welcher den geringſten Wiederſtand leiſtet, ſey ſchwerer als die vom Falle in der kürzeſten Zeit, Bernoulli verſichert er habe ſie im Bette liegend, ohne Papier und Feder aufgelößt, die Figur ſich in Gedanken vorgeſtellt, dieſe Auflöſung findet ſich in Act. Erud. 1699; p. 511. Op. Io. B. T. I. n. 54. Sie giebt eine Gleichung zwiſchen erſten Differentialen, die aber ſelbſt bis auf die vierte Potenz ſteigen. Newtons, ohne Beweis und Analyſis gegebene Vorſchrift, führe ſagt B. auf eben die Gleichung.

9. L'Ho=

9. L'Hoſpital giebt eine Methode dieſen Körper zu finden Act. Er. 1699. Mém. de l'Ac. des Sc. 1699. Sie iſt in Io. B. Op. T. I. n. 55. eingerückt. Daſ. n. 56. zeigt Joh. B. wie man jede der beyden Coordinaten durch eine gemeinſchaftliche veränderliche Gröſſe beſtimmt.

10. Une baſe qui eſt expoſée au choc d'un Fluide etant donnée, trouver l'eſpece du Conoide dont il faut la couvrir pour que l'impulſion ſoit la moindre qu'il eſt poſſible; par M. Bouguer. Mém. de l' Ac. d. Sc. 1733; p. 118 des holl. Drucks. Eine andre Auflöſung, eben der Aufgabe giebt Bouguer Traité du Navire (Par. 1746) L. III. Section V. chap. III.

11. Euler Scientia naualis (Petrop. 1749; 2 Quartbände) P. I. c. VI. §. 690. ſucht die krumme Linie, deren Umdrehung einen Körper giebt welcher den geringſten Wiederſtand leidet, und zugleich den gröſſten Innhalt hat.

Eine zuſammenhängende krumme Linie, giebt mit einem Theile den kleinſten Wiederſtand mit dem andern den gröſſten daſ. §. 691.

Zuvor §. 531. hatte Euler eine krumme Linie geſucht, welche unter allen die mit ihr gleichen Raum einſchlieſſen, eine Ebene begränzt die nach der Richtung des Durchmeſſers fortgeführt, den gröſſten oder kleinſten Wiederſtand leidet. Er findet eine krumme Linie aus drey Theilen zuſammengeſetzt, welche die Seiten eines gleichſeitigen

Drey⸗

Dreyecks zu Sehnen haben, und an den Scheiteln ſeiner Winkel Spitzen machen.

Dieſe krumme Linie, um eine Axe gedreht welche ſenkrecht auf eine der Seiten des Dreyecks ſteht, begränzt den Körper welcher zugleich den gröſſten Raum einnimmt, und nach der Axe Richtung bewegt, den geringſten Wiederſtand leidet.

Dreht man ſie aber um eine Seite des Dreyecks, ſo giebt ſie den Körper welcher den gröſſten Wiederſtand leidet.

12. Im 698 §. erinnert Euler: Die vor ihm dieſen Gegenſtand unterſucht haben, hätten dem Umſtand beyſeite geſetzt, daß der Körper den gröſſten Innhalt haben ſolle, nur die krumme Linie, unter allen überhaupt geſucht.

So finde ſich aber eine krumme Linie welche mit der Axe nicht zuſammenſtoſſe, und das ſey gegen die Abſicht der Unterſuchung. Deßwegen, habe er dieſe Art die Sache zu betrachten ganz beyſeite geſetzt. Die ſeinige ſcheine der Abſicht noch gemäſſer weil man bey Schiffen nicht nur den geringſten Wiederſtand ſondern auch den gröſſten Innhalt wünſche.

Nun aber beſchreibt die krumme Linie auf erwähnte Art gedreht, einen Körper, deſſen Flächen einwärts gebogen ſind. Das weicht zu ſehr von der gewöhnlichen Geſtalt der Schiffe ab, und ſo hindert dieſes nebſt andern Urſachen, den Schiffen eine Geſtalt zu geben welche der erwähn-

ten nahe käme. Daher betrachtet E. nach dem andre.

13. Alle dieſe Unterſuchungen nehmen die Geſetze des Stoſſes, oder des gleichgültigen Widerſtandes auf runde Körper an, die in meinen Anfgr. d. Hydrodynamik, a. a. O. vorgetragen ſind. Die bleiben nun nicht ungeändert, wenn ſich der ſchiefe Stoß anders verhält als bey ihnen angenommen wird; Man ſ. erwähntes Buch 435; V.

Kürzeſte Linie auf einer gegebenen krummen Fläche.

1. Die krumme Fläche iſt auf die gewöhnliche Art, durch eine Gleichung zwiſchen x; y; z; gegeben.

2. Folglich iſt z eine Function von x und y; ſo daß $dz = K.\,dx + L.\,dy$

3. Alſo iſt $\left(\frac{dK}{dy}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right)$ (An. Un. 485)

Man ſetze $dK = E.\,dx + F.\,dy$ ſo iſt $\left(\frac{dK}{dy}\right) = F$, folglich $dL = F.\,dx + G.\,dy$, damit $\left(\frac{dL}{dx}\right) = \left(\frac{dK}{dy}\right)$ wird.

4. Wie z überhaupt ein Loth von jedem Puncte der krummen Fläche auf die Grundfläche bedeutet, ſo behalte man aus dieſen Bedeutungen nur

nur die: Eines Lothes von einer krummen Linie in der krummen Fläche. Dieſer krummen Linie Projection auf der Grundfläche, iſt dann eine krumme Linie welche x und y zu Coordinaten hat. Kennt man dieſe Projection, ſo giebt ſich aus der Gleichung für die krumme Fläche, z das ein paar zuſammengehörigen x und y gehört, alſo wie weit der Punct der krummen Linie in der krummen Fläche, von ſeiner Projection auf die Grundfläche abſteht.

5. Das Element der krummen Linie auf der krummen Fläche, hat zum Quadrate

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (K.\,dx + L.\,dy)^2$$

Setzt man $dy = p.\,dx$ ſo kömmt dieſes Quadrat $= (1 + p^2 + K^2 + 2.\,K.\,L.\,p + L^2.\,p^2).\,dx^2$

6. Alſo ſoll

$$\int\sqrt{}\,(1 + p^2 + K^2 + 2.\,K.\,L.\,p + L^2.\,p^2).\,dx$$

ein Kleinſtes ſeyn.

7. Die Wurzelgröſſe iſt, was in der Variationsrechnung V heiſſt. Alſo

$$V.\,dV = (K + L.\,p).\,dK + (K.\,p + p^2\,L).\,dL + (K.\,L + L^2.\,p + p).\,dp$$

8. Wenn man die Differentiale von K und L aus (3) nimmt ſo kömmt

$$V.\,dV = \left.\begin{matrix} K.\,E \\ + L.\,E.\,p \\ + K.\,F.\,p \\ + L.\,F.\,p^2 \end{matrix}\right\}.\,dx + \left.\begin{matrix} K.\,F \\ + L.\,F.\,p \\ + K.\,G.\,p \\ + L.\,G.\,p^2 \end{matrix}\right\}.\,dy$$

$$\left.\begin{matrix} + p \\ + K.L \\ + L^2.p \end{matrix}\right\}.dp$$

9. Wenn man jeden der Factoren bey dx; dy; dp; mit V dividirt, ſo ſind die Quotienten, der erſte M, der zweyte N, der dritte P.

10. Nun ſoll für die kürzeſte Linie auf der krummen Fläche N. dx = dP ſeyn.

$$\frac{K.F + L.F.p + K.G.p + L.G.p^2}{V}.dx$$

$$= d\left(\frac{p + K.L + L^2.p}{V}\right)$$

11. Der Dividend linker Hand iſt =
(K + L. p). (F. dx + G. dy) =
(K + L. p). dL alſo

$$\frac{(K + L.p).dL}{V} = d\left(\frac{p + K.L + L^2.p}{V}\right)$$

12. In (12) iſt das Differential rechter Hand =

$$\frac{V.d(p + K.L + L^2.p) - (p + K.L + L^2.p).dV}{V^2}$$

$$=$$

$$\frac{V^2.d(p + K.L + L^2.p) - (p + K.L + L^2.p).V.dV}{V^3}$$

13. Man multiplicire alſo in (11) rechter und linker Hand mit V^3 ſo kömmt:

$$(K + L.p).V^2.dL = V^2.d(p + K.L. + L^2.p) - (p + K.L + L^2.p).V.dV$$

Daraus

Daraus

14. $(p + K.L + L^2.p).V.dV$
$$= V^2.\left\{\begin{array}{l} d(p + K.L + L^2.p) \\ -(K + L.p).dL \end{array}\right\}$$

15. Was rechter Hand in V^2 multiplicirt wird iſt $= (L^2 + 1).dp + L.dK + L.p.dL$. Ferner iſt $V^2 = 1 + p^2 + K^2 + 2.K.L.p + L.p^2$

16. Alſo das Product rechter Hand in (14)
$$\left(\left.\begin{array}{l} 1 + L + K^2.L + 2.K.L \\ \quad + K^2 \qquad\qquad + 2.K^3 \end{array}\right\} p + \left.\begin{array}{l} 1 \\ + 2.L^2 \\ + L^4 \end{array}\right\}.p^2\right).dp$$
$$+ (+K^2.L + L + 2.K.L^2.p + (L + L^3).p^2).dK$$
$$+ (+(L + K^2.L).p + 2.K.L^2.p^2 + (L + L^3).p^3).dL$$

17. Ferner $V.dV = (K.L + L^2.p + p).dp$
$$+ (K + L.p).dK$$
$$+ (K.p + L.p^2).dL$$
Dieß wird multiplicirt mit $p + K.L + L^2.p$

18. Alſo das Product linker Hand in (14)
$$(K.L^2 + 2.(K.L + K.L^3).p + (1 + 2.L^2 + L^4).p^2).dp$$
$$+ (K^2.L + (K + 2.K.L^2).p + (L + L^3).p^2).dK$$
$$+ ((K^2.L.p + (K + 2.K.L^2).p^2 + (L + L^3).p^3).dL$$

19. Nun bringe man Alles auf die rechte Seite ſo kömmt
$$0 = (1 + L^2 + K^2).dp + (L - K.p).dK$$
$$+ (L.p - K.p^2).dL$$

20. Alſo ſtatt dp, und p ihre Werthe geſetzt

$$(1 + L^2 + K^2) . \frac{ddy}{dx} = \frac{K. dy - L. dx}{dx} . dK + \frac{(K. dy^2 - L. dy. dx)}{dx^2} . dL$$

21. Daraus kömmt

$$dx. ddy = \frac{(K. dy - L. dx).(dK. dx + dL. dy)}{1 + K^2 + L^2}$$

Dieſe Differentialgleichung für die Projection (4) iſt vom zweyten Grade, bey ihrer Integration kommen alſo zwo Conſtanten. Man kann zweene Puncte willkührlich annehmen.

22. Aus (2) iſt

$ddz = dK. dx + dL. dy + L. ddy$ alſo der Dividend in (21) rechter Hand

$(K. dy - L. dx). ddz$

$- (K. dy - L. dx). L. ddy$

23. So kömmt in (21)

$$\left. \begin{array}{l} (1 + K^2 + L^2). dx \\ + K. L. dy - L^2. dx \end{array} \right\} . ddy = (K. dy - L. dx). ddz$$

24. Alſo aus (2)

$$(dx + K. dz). ddy = (K. dy - L. dx). ddz$$

25. Man multiplicire auf jeder Seite mit dz und ſchreibe deſſelben Werth (2) in das Product mit dx. ddy, ſo kömmt

(K. dx^2

$$(K. dx^2 + L. dy. dx + K. dz^2). ddy = (K. dy - L. dx). dz. ddz$$

auf beyden Seiten addirt

$$(K. dy^2 - L. dx. dy). ddy = (K. dy^2 - L. dx. dy). ddy$$

So kömmt

$$K. (dx^2 + dy^2 + dz^2). ddy = (K. dy - L. dx). (dz. ddz + dy. ddy)$$

alſo

$$\frac{dy. ddy + dz. ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{K. ddy}{K. dy - L. dx}$$

$$= \frac{K. ddz}{dx + K. dz} \quad (24)$$

26. In (24) multiplicire man auf beyden Seiten mit dx; und wo in den Producten $K. dx$ vorkömmt, ſchreibe man ſtatt deſſen $dz - L. dy$ (2) ſo kömmt

$$(dx^2 + dz^2 - L. dy. dz). ddy = (dy. dz - L. dx^2 - L. dy^2). ddz$$

Man addire auf beyden Seiten

$$dy^2. ddy - L. dz^2. ddz = dy^2. ddy - L. dz^2. ddz$$

ſo kömmt

$$\frac{dy. ddy + dz\, ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + L. ddz}{dy + L. dz}$$

27. Was in der letzten Gleichung (25) linker Hand ſteht iſt einer Gröſſe gleich die ſich auf drey Arten ausdrucken läſſt, die beyden erſten

 Aus-

Ausdrückungen ſtehn in (25) die letzte in (26) rechter Hand.

28. Weil in dieſen Ausdrückungen, der Gröſſen K, L, Differentiale nicht vorkommen, iſt es gleich viel ob z ſich in K und L, befindet, oder nicht. Für einen gegebenen Fall, nimmt man die Gleichung an, welche ſich am leichteſten integriren läſſt.

29. In (25 u. 26) ſteht linker Hand das Differential des Logarithmen der Quadratwurzel von $dx^2 + dy^2 + dz^2$

30. Man ſuche die kürzeſte Linie auf der Fläche welche bey Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe beſchrieben wird. Wenn der krummen Linie Abſciſſe $= x$; Ordinate $= X$, eine Function der Abſciſſe, ſo iſt $y^2 + z^2 = X^2$ wie aus An. endl. Gr. (545) erhellt, in der dortigen 26 Fig. iſt $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; und $PM = X$ die Ordinate der krummen Linie welche ſich um die Axe AB dreht.

31. Solchergeſtalt $z.\,dz = X.\,dX - y.\,dy$

alſo (2) $K = \frac{X.\,dX}{z.\,dx}$; $L = -\frac{y}{z}$

32. Man nehme aus den Gleichungen (27) die in welcher K nicht iſt (26) Setzt man in ſie ſtatt L, ſeinen Werth (30) ſo kömmt: (29)

33. $d \log \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \frac{z.\,ddy - y.\,ddz}{z.\,dy - y.\,dz}$ Was rechter Hand ſteht, iſt das Differential des Logarithmen von $z.\,dy - y.\,dz$

34. Alſo, auf beyden Seiten integrirt, und das Zeichen des Logarithmen weggelaſſen: $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \frac{z.\,dy - y.\,dz}{b}$ wo b die Conſt bey dieſer Integration iſt Alſo $z.\,dy - y.\,dz = b.\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$

35. Man ſetze $dX = v.\,dx$ ſo iſt (30) $dz = \frac{X.\,v.\,dx - y.\,dy}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$ und was in (34) zuletzt linker Hand ſteht iſt $\frac{X^2.\,dy - X.\,y.\,v.\,dx}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$

36. Was rechter Hand ſteht, iſt ein Product aus b in die Quadratwurzel aus $\frac{(X^2.\,(1 + v^2) - y^2).\,dx^2 + X^2.\,dy^2. - 2.\,X.v.y.\,dx.\,dy}{X^2 - y^2}$

37. Alſo ſind die Quadrate gleich, von dem was linker Hand ſteht (35) und von dem was rechter Hand ſteht (36).

38. Man multiplicire auf beyden Seiten mit $X^2 - y^2$ und ordne die Gleichung nach dy, ſo kömmt

$$X^2.(b^2 - X^2).dy^2 = 2.(b^2 - X^2).X.v.y.dx.dy \left. \begin{array}{l} + X^2.y^2.v^2 \\ - b^2.(X^2.(1+v^2) - y^2) \end{array} \right\}.dx^2$$

39. Daraus

$$dy = \frac{y.v.dx}{X} \pm \frac{b.dx.\sqrt{((1+v^2).(y^2 - X^2))}}{X.\sqrt{(b^2 - X^2)}}$$

40. Man ſetze $y = X.t$ alſo $dy = X.dt + t.v.dx$; Dieſe Werthe in (39) geſetzt kömmt $\frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)}} = \frac{b.\sqrt{(1+v^2)}.dx}{X.\sqrt{(b^2 - X^2)}}$ Nun ſind X, v, Functionen von x; alſo ſind die veränderlichen Gröſſen t, x; von einander geſondert, und wenn man auf jeder Seite das Differential integrirt, das nur eine veränderliche Gröſſe enthält, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen t und x.

41. Alles bisherige nach Euler Meth. inu. lin. curu. ... c. IV. §. 11. p. 138... 141. Ich hoffe die Rechnung ſo dargeſtellt zu haben daß man ſie beſſer überſehen kann. Beym Euler iſt 139 S. wenigſtens ein Druckfehler, vielleicht noch einer, auch iſt mein Verfahren nach (14) anders als das ſeinige.

42. Geſchichte der Unterſuchungen über die kürzeſte Linie auf einer krummen Fläche, und Stellen wo Exempel gegeben ſind, erzähle ich in meiner weitern Ausführung der Geographie (Gött. 1795) III. Cap. II. Abſchn 87 u. f. §. 91 u. f. Seiten. Hie nenne ich nur Euler de linea breviſſima

viſſima in ſuperficie quacunque duo quaelibet puncta iungente Com. Ac. Petr. T. III. (1732) p. 110. Joh. Bernoulli hat Eulern die Frage vorgelegt. Io. Bern. In ſuperf. quac. curua ducere lineam inter duo puncta breuiſſimam Op. Io. Bern. T. IV. n. 166. Dieſer Band enthält Aufſätze die zuerſt 1742, gedruckt worden.

43. Hie dergleichen Exempel beyzubringen geſtattet der Raum nicht. Sie erfodern weitläuftige Rechnungen, ſelbſt was ſich aus der Elementargeometrie ſo leicht darthun läſſt, daß auf einer Kugelfläche der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern, Bogen eines gröſſten Kreiſes iſt (Ausführ. d. Geographie I. Cap. V. Lehnſ. 14. S.) Der Vorzug der analytiſchen Rechnung iſt: daß ſie die Frage allgemein beantwortet.

Gröſſtes Vieleck in eine gegebene Menge gegebener gerader Linien eingeſchloſſen.

Aufgabe.

1. Ein Vieleck hat folgende Gränzen: Eine gegebene gerade Linie als Grundlinie, durch ihre beyden Endpuncte gegebene Perpendikel; von dem obern Endpuncte des einen Perpendikels, bis zum obern Endpuncte des andern, eine Zuſammenfügung gerader Linien, deren Menge gegeben iſt. Die Gröſſe von jeder, auch die Ordnung in welcher ſie nach einander folgen. Man verlangt dieſe geraden Linien ſo zu legen, daß ſie

mit den vorhin genannten dreyen, den gröſſten Raum einſchlieſſen. Was wird dazu erfodert?

Die Grundlinie liege auf AB. 48 Fig. ſey $APn = c$; das Perpendikel für den Anfang der Figur $AL = b$, das für das Ende $PnLn = f$. Die Zuſammenfügung der geraden Linien, ſoll ſich in L anfangen, in Ln endigen.

Die gerade Linie $LLn = \sqrt{(c^2 + (b - f^2))}$ ſchlieſſt mit den übrigen dreyen ein gegebenes Trapezium ein. Die Frage iſt alſo eigentlich: Die Zuſammenfügung der geraden Linien ſo zu bewerkſtelligen, daß ſie mit der geraden Linie LLn den gröſſten Raum einſchlieſſen.

2. So ſeyen LL1; L1L2; die beyden erſten der gegebenen geraden Linien, von denen auf die Grundlinie, die Perpendikel LA; L1P1; L2P2; fallen.

3. In der Reihe der geraden Linien, gehe die mte; von Lm bis $L(m+1)$ die $(m+1)$ tr von $L(m+1)$ bis $L(m+2)$ Die Perpendikel von ihren Gränzen auf die Grundlinie, treffen ſolche in Pm, $P(m+1)$; $P(m+2)$.

4. Die beyden letzten Linien, haben zu ihren Gränzpuncten $L(n-2)$; $L(n-1)$; Ln; die Perpendikel treffen die Grundlinie in $P(n-2)$; $P(n-1)$; Pn.

5. Perpendikel vom Gränzpuncte einer Linie heiſſt: Ordinate, Es ſchneidet auf der Grundlinie, von A an Abſciſſe ab.

6. Die

6. Die Menge der geraden Linien ſey = n; die erſte unter ihnen iſt LL 1; die mte; LmL (m + 1) ſo iſt m eine unbeſtimmte ganze Zahl, die von 0 bis an n − 1 wächſt.

7. Es ſey die erſte gerade Linie LL 1 = a 0; die zweyte L 1 L 2 = a 1 ſo die mte, LmL (m + 1) = am; die (m + 1)te L (m + 1) L (m + 2) = a (m + 1); die letzte L (n − 1) Ln = a (n − 1)

8. So bekömmt jede Ordinate die Zahl die am Endpuncte der geraden Linie ſteht von welchem ſie herabfällt, die Abſciſſe eben die Zahl.

Die erſte Ordinate LA iſt Ordinate 0; ihre Abſciſſe, Abſciſſe 0 ſelbſt = 0. Die zweyte Ordinate iſt L 1 P 1; Ordinate 2; ihre Abſciſſe, AP 1; Abſciſſe 1.

Die Zahlen, welche ich den Ordinaten und Abſciſſen beyſchreibe, geben an, die wievielte jede in ihre Reiher unter den folgenden iſt.

9. So ſind Lm Pm; L (m + 1) L (m + 2); Ordinate m; Ordinate (m + 1); ihren Unterſchied L (m + 1) P (m + 1) − Lm Pm nenne ich Δ Lm Pm oder Δ Ordinate m;

APm; AP (m + 1) ſind Abſciſſe m, Abſciſſe (m + 1) ihren Unterſchied PmP (m + 2) nenne ich Δ APm oder Δ Abſciſſe.

Ich

Ich brauche den groſſen vierten Buchſtaben weil die Unterſchiede endliche Gröſſen ſind, nicht Differentiale.

10. Ich nenne $AP = xm$; $PmLm = ym$ Die Buchſtaben x; y; können jede Abſciſſe und Ordinate (8) bedeuten, $xo = o$; $yo = AL$.

11. So iſt $AP(m+1) = xm + \Delta xm$; $P(m+1)L(m+1) = ym + \Delta ym$, und das Trapezium $LmL(m+1)P(m+1)Pm = (ym + \frac{1}{2}\Delta ym).\Delta xm$.

Seine oberſte Seite iſt gegeben alſo (7) $\Delta ym = \sqrt{((am)^2 - (\Delta xm)^2)}$

12. Die Figur (2; 3; 4;) beſteht aus m ſolchen Trapezien, jeder Werth von xm (6) giebt eins.

13. Bedeutet alſo S ihre Summe ſo kann man jedes Stück der Figur ſo ausdrucken $S((ym + \frac{1}{2}\Delta ym).\Delta xm)$; die ganze kömmt wenn $m = n$.

14. Läſſt man jede der Coordinaten und ihre Differenzen um etwas unendlich kleines variiren, ſo hat man die Variation deſſen was hinter S ſteht. Und die Summe der Variationen deſſen was hinter S ſteht, iſt die Variation der Summe deſſen was hinter S ſteht, oder: Variation der Figur.

15. Von $ym.\Delta xm + \frac{1}{2}.\Delta ym.\Delta xm$ iſt die Variation
$= (ym + \frac{1}{2}\Delta ym).\delta\Delta xm + \Delta xm.\delta ym + \frac{1}{2}.\Delta xm.\delta\Delta ym$.

16.

16. Des Trapezium obere Seite iſt gegeben, variirt nicht; alſo variirt $(\Delta x m)^2 + (\Delta y m)^2$ nicht. Das giebt

$\delta \Delta x m = - \frac{\Delta y m}{\Delta x m} . \delta \Delta y m$ (Eben wie es ſich bey einer krummen Linie, mit Differentialen ihrer Abſciſſe und Ordinate verhält, wenn das Differential der Länge der krummen Linie unveränderlich iſt.)

17. So kömmt die Variation (8)

$$\delta y m. \Delta x m + \left(\tfrac{1}{2} \Delta x m - \frac{y m. \Delta y m}{\Delta x m} - \frac{(\Delta y m)^2}{2. \Delta x m} \right). \delta \Delta y m$$

18. Nun iſt $\Delta y m = y(m+1) - y m$ und die Variation des Unterſchiedes, der Unterſchied der Variationen.

19. Was (17) in die Variation des Unterſchiedes der Ordinaten multiplicirt iſt, nenne ich $F m$. Man begreift daß bey F allemahl die Zahl ſteht, die bey x und y ſteht.

20. So iſt aus (17) die Variation $(\Delta x m - F m). \delta y m + F m. \delta y (m+1)$

Die Ordinaten deren Variationen hie vorkommen ſind die beyden am Anfange und am Ende des Trapezium.

21.

21. $AL = b\,(1)$ gehört als allererſte Ordinate, zur allererſten Abſciſſe die $= 0$ iſt, alſo um die Differenz $AP\,1$ wächſt wenn aus ihr die zweyte Abſciſſe, ... die erſte der folgenden ... wird.

22. Aus 19; 17; alſo iſt für das erſte Trapezium $Fo = \frac{1}{2} AP\,1 - \frac{b.\,\Delta b}{AP\,1} - \frac{(\Delta b)^2}{2.\,AP\,1}$ und nun aus (20) Variation des erſten Trapezium $(AP\,1 - Fo)\,\delta b + Fo.\,\delta P\,1\,L\,1$.

23. Für das letzte Trapezium, nach (6)

$$F(n-1) = \frac{1}{2}\Delta x\,(n-1) - \frac{y\,(n-1).\,\Delta y\,(n-1)}{\Delta x\,(n-1)} - \frac{(\Delta y\,(n-1))^2}{2.\,\Delta x\,(n-1)}$$

und die Variation $=$

$$(\Delta x\,(n-1) - F\,(n-1)).\,\delta y\,(n-1) + F\,(n-1).\,\delta y n$$

24. Das Trapezium deſſen Variation in (20) ſteht, kann jedes ſeyn, nach dem m beſtimmt wird. Man berechne nach eben dem Geſetze, die Variation deſſen das zunächſt nach ihm folgt, imgleichen die Variation deſſen das zunächſt nach dem nur erwähnten folgenden folgt. Dieſer drey Trapezien Variationen zuſammen ſind

$$\left.\begin{matrix}\Delta x m \\ - F m\end{matrix}\right\}\delta y m \quad \left.\begin{matrix}+ \Delta x\,(m+1) \\ - F\,(m+1) \\ + F m\end{matrix}\right\}.\,\delta y\,(m+1)$$

$+ \Delta x$

$$+ \Delta x (m+2)\} \quad + F(m+2).\, \delta y (m+3)$$
$$- F(m+2) \;\big|.\, \delta y (m+2)$$
$$+ F(m+1) \;\big\}$$

25. Nach (20) beſteht die Variation jedes Trapezium aus zwey Stücken, deren eines die Variation der Ordinate enthält an welcher das Trapezium anfängt, das andre, die Variation der Ordinate an welcher das Trapezium aufhört, oder das nächſt folgende anfängt. Alſo geben zweyer nach einander folgenden Trapezien Variationen, zuſammen vollſtändig den Coefficienten der Variation des Perpendikels an welchem das zweyte der genannten anfängt.

So ſind bey den (24) befindlichen Variationen vier nach einander folgenden Ordinaten, die Coefficienten der Variationen der beyden mittlern vollſtändig, zu dem der Variation der erſten kömmt noch etwas aus der Variation des vorhergehenden Trapezium, und zu dem der Variation der letzten, noch was aus der Variation des folgenden Trapezium.

26. So machen der Trapezien Variationen zuſammen eine Reihe aus, jedes Glied derſelben iſt ein Product aus einem Coefficienten in eine Variation einer Ordinate, die Ordinaten folgen nach der Ordnung, das erſte und letzte Glied ſtehn (22; 23)

27. Dieſe Reihe Summe ſoll = 0 ſeyn. Jeder Ordinate Variation, iſt unabhängig von ei-

ner andern Ordinate Variation. Folglich muß der Coefficient bey jeder Ordinate Variation $= 0$ ſeyn.

28. Die Coefficienten bey den Variationen der erſten Ordinate b; und der letzten $y n = f$ ſtehn in (22; 23). Weil bey dem erſten kein Trapezium vorhergeht, beym letzten keines folgt, ſo entſtehn ſie nicht ſo wie jeder der übrigen (25). Aber dieſe anomaliſchen Coefficienten, ſind gar nicht vorhanden, weil die erſte und die letzte Ordinate nicht variiren (1). So giebt es nur Coefficienten für Variationen der Ordinaten von $y\,1$ bis mit $y\,(n - 1)$.

29. Man ſetze alſo in (24) von den beyden Coefficienten die da vollſtändig vorhanden ſind (25) den erſten $= 0$.

Nun heiſſt $Fm + \Delta Fm = F(m + 1)$; alſo iſt $\Delta x\,(m + 1) - \Delta Fm = 0$, oder dieſe beyden Differenzen ſind gleich.

30. Dieſe Gleichheit ſagt ſoviel: Wenn ſich eine Abſciſſe in ihre nächſtfolgende ändert, ſo beträgt das ſoviel, als wenn ſich das F das der Abſciſſe gehört die vor der ſich ändernden vorhergeht, in ſein nächſtfolgendes ändert.

Alſo; die beyden Gröſſen $x\,(m + 1)$; Fm; ändern ſich allemahl eine ſoviel als die andre, was auch m iſt. Folglich bleibt ihr Unterſchied immer derſelbe, oder es iſt $x\,(m + 1) - Fm = g$ einer

ner Gröſſe von der ich jezo nur noch weiß daß ſie unveränderlich iſt, nicht wie groß ſie ſelbſt iſt.

31. Weil $x(m+1) = xm + \Delta xm$; ſo iſt (19), wenn man alles mit $2. \Delta xm$ multiplicirt:

$$\begin{matrix} 2.\, xm.\, \Delta xm + (\Delta xm)^2 \\ + 2.\, ym.\, \Delta ym + (\Delta ym)^2 \end{matrix} = 2.\, g.\, \Delta xm.$$

32. I. Was linker Hand des Gleichheitszeichens ſteht, iſt $\Delta\,((xm)^2 + (ym)^2)$ Alſo kömmt endlich die Gleichung zwiſchen Abſciſſen und Ordinaten ſelbſt

$$(xm)^2 + (ym)^2 = 2.\, g.\, xm + b^2$$

II. Nähmlich die Gleichung gilt für jedes Paar zuſammengehörige Coordinaten, die beyden erſten ſind o und b (21).

III. Die beyden letzten ſind c, f (1) alſo $c^2 + f^2 = 2.\, g.\, c + b^2$; folglich die beſtändige Gröſſe die man bisher noch nicht kannte (30)

$$g = \frac{c^2 + f^2 - b^2}{2.\, c}$$

33. Die bisher gebrauchten Coordinaten ändern ſich um endliche Unterſchiede. So iſt die Gleichung zwiſchen ihnen nicht für eine krumme Linie, ſondern für eine Reihe gerader. Sie muß in der $p^2 + q^2 = 2.\, g.\, p + b^2$ enthalten ſeyn, wenn man unter p und q. Gröſſen verſteht, die ſich durch Differentiale ändern. Ich ſuche alſo was für einer krummen Linie dieſe Gleichung gehört.

 34.

34. Die krumme Linie iſt vom zweyten Grade, wird durch die Abſciſſenlinie in ähnliche Hälften getheilt, hat für $p = 0$ zur bejahten Ordinate b.

35. I. Für $q = 0$ iſt $p = g \pm \surd (g^2 + b^2)$ Man nehme $AB = g + \surd (g^2 + b^2)$ $AC = \surd (g^2 + b^2) - g$; AC iſt der verneinte Werth von p für $q = 0$, wird deßwegen dem bejahten AB entgegengeſetzt genommen.

So iſt $CB = 2. \surd (g^2 + b^2)$ Man halbire CB in K, ſo iſt $AK = g$.

II. Man rechne Abſciſſen $= u$ von K ſo daß $u = g - p$ oder $p = g - u$, ſo wird die Gleichung $u^2 + q^2 = g^2 + b^2$ gehört alſo einem Kreiſe deſſen Mittelpunct K, Halbmeſſer $= \surd (g^2 + b^2)$ welcher aus (32) gegeben iſt. Er heiſſe $= r$.

36. Ohne an Variationen zu denken könnte man ſich folgende Aufgabe der Elementargeometrie vorlegen:

Es ſind $APn = c$; $AL = b$; $PnLn = f$, gegeben; Man ſoll einen Kreis durch L und Ln ziehen, der ſeinen Mittelpunct in der geraden Linie hat, auf welcher c liegt.

Dieſer noch unbekannte Mittelpunct ſey K; der unbekannte Halbmeſſer $= r$; So iſt $\surd (r^2 - b^2) + \surd (r^2 - f^2) = c$.

Ich

Ich ſetze $\sqrt{(r^2 - b^2)} - \sqrt{(r^2 - f^2)} = w$
alſo $c^2 + 2.c.w + w^2 = 4.r^2 - 4b^2$

$$c^2 - 2.c.w + w^2 = 4r^2 - 4.f^2$$

$$c^2 + w^2 = 4.r^2 - 2.(b^2 + f^2)$$

$c.w = 2.(f^2 - b^2)$ alſo

$$4.r^2 = c^2 + 2.(f^2 + b^2) + \frac{4.(f^2 - b^2)^2}{c^2}$$

37. Mit des Halbmeſſers Länge durchſchneide man aus L die Abſciſſenlinie, ſo hat man den Mittelpunct K.

Man könnte den Durchſchnitt nehmen der linker Hand von A fällt. Da käme nur A B mit der Figur darüber, linker Hand, AC rechter Hand.

38. Aus der geraden Linie L Ln (1) als Sehne, und dem Halbmeſſer, giebt ſich der Winkel L K Ln.

39. Für $f = b$ kömmt $g = \frac{1}{2}c$. Der Halbmeſſer $= \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ und die Sehne (38) $= c$.

Setzt man $f = b = 0$, ſo iſt der Halbmeſſer $= \frac{1}{2}c$ die Sehne ſein Doppeltes; C fällt auf A und B auf Pn.

40 Die geraden Linien (1) müſſen alſo Sehnen des Kreisbogens L Ln ſeyn. Die Abſciſſen und Ordinaten (9; 10;) finden ſich unter den p und q (33)

41. Halbmeſſer, Mittelpunct, Kreisbogen der den Winkel am Mittelpuncte miſſt, werden allein aus c, b, f (1) beſtimmt, die geraden Linien von deren Zuſammenfügung (1) redet, haben in dieſe Beſtimmung gar keinen Einfluß.

42. Die Unterſuchung lehrt alſo ſoviel: Man habe in den Bogen LLn; n gerade Linien als Sehnen getragen, ſo ſchlieſſen ſie mit der geraden Linie LLn, einen gröſſern Raum ein, als wenn man eben die geraden Linien, in eben der Ordnung, über eben der LLn, ſo zuſammenfügt, daß ſie nicht Sehnen des beſtimmten Bogens ſind.

43. Dieſe Seiten des gröſſten Vielecks, werden alſo aus dem Kreisbogen beſtimmt von dem ſie Sehnen ſind.

Gegebene Seiten, werden nicht allemahl Sehnen eines Kreisbogens ſeyn, der ganz ohne ihre Betrachtung beſtimmt wird.

Die Unterſuchung lehrt alſo nicht: Aus gegebenen Seiten das gröſſte Vieleck zu machen.

44. Selbſt, wo ſich über der gegebenen Linie, aus gegebenen Seiten, ein gröſſtes Vieleck machen läſſt, möchte ſie nicht allemahl zur bequemſten Bewerkſtelligung führen.

45. Geſetzt über der geraden Linie LLn ſollten drey gegebene gerade Linien ſtehn (1) die erſte

(7)

(7) = a der dritten gleich, die zweyte a 1 der LLn gleich. Dieſe drey geraden Linien, können nicht anders zuſammengefügt werden, als in drey Seiten eines Parallelogramm, davon LLn die vierte iſt. Sie ſchlieſſen mit dieſer vierten einen gröſſten Raum ein, wenn das Parallelogramm ein Rechteck wird. Alsdann aber, liegt der Mittelpunct des Kreiſes, von dem ſowohl LLn als die drey übrigen geraden Linien Sehnen ſind, im Durchſchnitte von des Rechtecks Diagonalen.

46. Es ſey der Halbmeſſer (35) = r; die gerade Linie LLn = h (1), der Winkel LKLn

$$= k \text{ alſo } \sin \tfrac{1}{2} k = \frac{h}{2.r}.$$

Der Bogen r. k iſt alſo durch r und h gegeben. Theilt man ihn in n Theile, gleiche oder ungleiche, und zieht jedes Sehne, ſo machen dieſe Sehnen über h ein Vieleck, gröſſer als ihre Längen machen wenn ſie über eben der h ſo zuſammengefügt werden, daß ſie nicht Sehnen der Theile des Bogens wären. Die Summe dieſer Längen beträgt mehr als h, weniger als r. k.

Aber nicht aus jeder geraden Linie deren Länge zwiſchen die nur genannten Gränzen fällt, laſſen ſich n Theile machen, deren jeder Sehne eines von n Bogen wäre die zuſammen r. k betragen.

47. In Couſin Leçons de calcul differentiel et de calcul integral Par. 1777; redet des I. Th.

6. Cap. de la methode des Variations. Unter den Exempeln durch welche er den Gebrauch dieſer Methode erläutert, iſt das erſte 326 S. Entre tous les polygones que l'on peut former, avec un même nombre de cotés donnés, on demande celui qui a la plus grande ſurface. Er fällt von den Endpuncten jeder Seite des Polygons das er ſucht Perpendikel auf eine Abſciſſenlinie, zwiſchen ihnen, dem Stücke der Abſciſſenlinie das zwiſchen ſie fällt, und der Seite, iſt ein Trapezium enthalten deſſen Variation er ſucht aus der Bedingung daß die Seite nicht variirt. Er findet auch, das gröſſte Polygon ſey, deſſen Seiten ſich in einen Kreis beſchreiben laſſen.

Er betrachtet ein Trapezium in der Figur, ohne derſelben Anfang und Ende darzuſtellen, nennt die Coordinaten die des Trapezium Anfange gehören x, y, bezeichnet z. E. folgende Abſciſſe mit x^{I} vorhergehende mit ${}^{I}x$ und da ſich ſo nicht angeben läſſt wie weit man vorwärts oder rückwärts geht, ſo bekenne ich daß mir ſein Verfahren dunkel vorkömmt.

48. Ich habe geſucht meinen Vortrag ſo einzurichten, daß man ſieht wo man anfängt, und aufhört, wie Halbmeſſer und Mittelpunct des Kreiſes beſtimmt werden, und was man eigentlich mit der ganzen Unterſuchung leiſtet, welches meiner Einſicht nach nicht ganz iſt was man nach Couſins Ausdrucke der Aufgabe erwarten könnte.

49. Meine Abſicht bey dieſer Unterſuchung, war: zu zeigen wie Variationen und Anwendungen derſelben angebracht werden, wo Gröſſen ſich durch endliche Unterſchiede ändern.

50. Nur die gewöhnliche Rechnung für Gröſſte und Kleinſte braucht L'Huilier, Principiorum calculi differentialis et integralis expoſitio elementaris §. 186; p. 273 für folgende Aufgabe: Von einer geradelinichten Figur ſind alle Seiten bis auf eine der Gröſſe nach gegeben: Man ſucht die Figur deren Innhalt am gröſſten iſt.

Zur Geſchichte der Variationsrechnung.

1. Hugenius (Traité de la lumière, ... par C. H. D. Z. (Chrétien Huygens de Zuylichem) Leid. 1690; 4.) ſtellt ſich vor Licht werde durch Elaſticität der Aetherttheilchen fortgepflanzt die den leuchtenden Punct umgeben. In ihnen entſtehn Wellen, und wenn eine ſolche Welle das Auge rührt, erſcheint der Punct in einer geraden Linie welche auf ſie ſenkrecht iſt. Hugen ſtellt dieſes in einer Figur 44 S. vor, und zeigt daraus warum in Materie deren Dichte veränderlich iſt, ein Punct durch Refraction höher erſcheint als er ohne ſie erſcheinen würde. Alle Wellen werden durch eine krumme Linie aus dem leuchtenden Puncte ſenkrecht geſchnitten. Der Punct erſcheint dem Auge in dieſer Linie Tangente.

2. Man ſtelle An. Un. 1. T. 7. F. die Cycloide ſo daß ihr Punct A der oberſte iſt, und

ein Körper auf ihr nach APF ſiele. Zu dem Falle durch AP braucht er eine gewiſſe Zeit; Man kann eine Verticallinie angeben, durch welche er in eben der Zeit ſiele; Sie mag = k heiſſen.

Nun ſtelle man eben ſo eine andre Cycloide, von einem andern Kreiſe beſchrieben, die ſich auch in A anfängt. Durch einen Bogen von ihr der AP2 heiſſen mag, falle ein Körper in eben der Zeit, in welcher er durch k fällt.

Und ſo durch einer dritten Cycloide Bogen AP3; und einer vierten AP4 u. ſ. w.

Alle dieſe Puncte P, P2, P3 ... liegen in einer krummen Linie die beym Joh. Bernoulli Synchrona heiſſt Act. Er. 1697. Mai. Op. T. I. n. 37, p. 193, ſie ſchneidet die Cycloiden alle ſenkrecht, wie ſagt B. Hugens krumme Linie, deſſelben Wellen.

Blos geometriſch gefragt: Eine krumme Linie zu finden, welche alle Cycloiden die gemeinſchaftlichen Anfang haben ſenkrecht ſchneidet? wäre ſagt B etwas ſehr ſchweres, aber aus Betrachtung des Falles auf der Cycloide, läſſt es ſich ſehr leicht herleiten.

Wer nun ſeine Methode verſuchen will endigt B. der ſuche eine Linie, welche der Lage nach ordentlich gegebene krumme Linien, nicht algebraiſche,

braiſche, das wäre nicht gar zu ſchwer, ſondern tranſcendentiſche z. E. logarithmiſche, die über einer Axe, durch einen Punct gezogen ſind, alle ſenkrecht ſchneidet.

3. Hie hat man alſo variirende krumme Linien, nur iſt ihre Beſchaffenheit gegeben, daß es z. E. logarithmiſche ſeyn ſollen, in der Variationsrechnung war nichts von der Beſchaffenheit der variirenden krummen Linien gegeben. Ich glaube daher man mache mit Rechte davon den Anfang dieſer Geſchichte. Zugleich zeigt ſich, was Hugens Lichtwellen für Theil daran haben.

Wenn man mit Bernoullin annimmt, der Sinus der Refraction, verhält ſich an jeder Stelle wie die Rarität des Mittels oder wie die Geſchwindigkeit des Lichtkügelchens, ſo iſt die Eigenſchaft der krummen Linie welche der Gang des Lichtes macht, daß ſich überall der Sinus ihrer Neigung gegen die Verticallinie, wie die Geſchwindigkeit verhält. Verhalten ſich die Raritäten wie die Geſchwindigkeiten eines fallenden Körpers, ſo iſt die Krümmung des Ganges des Lichts die Brachyſtochrone.

Hätte Bernoulli nicht über Hugens phyſiſche Theorie vom Lichte ſpeculirt, die man jetzo eben nicht als erwieſen annimmt, ſo wäre er vielleicht nicht auf ſolche geometriſche Unterſuchungen gekommen.

4. Die

4. Die krumme Linie zu finden welche unzähliche logarithmiſche ſenkrecht ſchneidet, lehrte Jacob Bernoulli Act. Erud. Lipſ. 1698; Mai. Op. Iac. B. T. II. n. 81. und fügte Fragen von andern krummen Linien bey.

Joh. Bernoulli nennte ſolche Linien traiectorias, quae alias ordinatim datas normaliter, vel in angulo quouis dato, ſeu etiam data lege variante traiiciunt, wenn der Winkel ein rechter iſt; orthogonales. Act. Er. 1698. Oct. Op. Io. B. T. I. n. 52. p. 266.

Dieſe Linien haben eine Menge Unterſuchungen veranlaſſt, deren Erzählung ich hie nicht unternehme, weil ich die gegebenen Linien nur als das älteſte Beyſpiel von variirten erwähne.

5. Begreiflich kann man Linien von übrigens gegebenen Eigenſchaften in mehr Abſichten als variirt betrachten. Man ſtelle ſich logarithmiſche Linien über einer Aſymptote vor, die alle für die Abſciſſe = 0, einerley Ordinate haben, alſo durch einen Punct durchgehn; Sie unterſcheiden ſich bekanntermaſſen durch ihre Subtangente.

Von dem gemeinſchaftlichen Puncte, ſind auf allen dieſen logarithmiſchen Linien gleich lange Bogen genommen, durch derſelben Endpuncte geht eine krumme Linie.

Man verlangt die Tangente dieſer krummen Linie, an einem Puncte den ſie mit einer der logarithmiſchen Linien gemein hat.

6. Man

6. Man ziehe durch den Anfang der Abſciſſen ein Perpendikel auf die Aſymptote, und fälle auf dieſes Perpendikel wiederum eins, von einem Puncte der logarithmiſchen Linie die a zur Subtangente hat. Es iſt ſo groß als die Abſciſſe der logarithmiſchen Linie auf der Aſymptote, und ſchneidet auf dem erſt gezogenen Perpendikel ein Stück ab, das der gewöhnlichen Ordinate der logarithmiſchen Linie gleich iſt; Nennt man alſo Ordinate und Abſciſſe wie bey der logarithmiſchen Linie gewöhnlich iſt, ſo iſt das abgeſchnittne Perpendikel $= y$ und das abſchneidende, ... Abſtand des Puncts der logarithmiſchen Linie von dem Perpendikel auf die Aſymptote $= x = a.$ $\int \frac{dy}{y}$. Dieſer Abſtand iſt auf einer geraden Linie die der Aſymptote parallel iſt.

7. Heiſſt einer zweyten logarithmiſchen Linie Subtangente (a) ſo hat der Punct von ihr welcher ſich in nur erwähnter Parallele befindet, von dem Perpendikel auf die Aſymptote den Abſtand $(a). \int \frac{dy}{y}$ Für beyde logarithmiſche Linien iſt y einerley.

8. Sind alſo beyder logarithmiſchen Linien Subtangenten unendlich wenig unterſchieden, ſo iſt der Parallele mit der Aſymptote Stück zwi-

ſchen

ſchen ihnen = $da. \int \frac{dy}{y}$. Da differentiirt man die Subtangente bey ungeänderter Abſciſſe.

9. Zwiſchen dem Puncte wo die zweyte logarithmiſche Linie von der Parallele geſchnitten wird, und dem Endpuncte des Bogens von ihr der mit dem Bogen der erſten gleiche Länge hat, befindet ſich ein unendlich kleiner Bogen, dieſer Bogen, nur genannter Abſtand (8) und die unendlich kleine Linie durch der gleich langen Bogen Endpuncte geben ein unendlich kleines Dreyeck, deſſelben zuletzt genannte Seite, iſt das Element der in (5) geſuchten Tangente.

10. Dieſes Dreyeck betrachte ich nicht weiter, ich erwähne es nur wegen des Zuſammenhangs mit der Tangente. Eigentlich wollte ich nur zeigen daß man bey ein Paar einander unendlich nahen krummen Linien, eine Gröſſe die in jeder für ſich veränderlich iſt, ungeändert laſſen kann, und eine differentiiren, die in jeder krummen Linie für ſich unveränderlich iſt.

11. In Leibnitii et Io. Bernoullii Commercium Philoſophicum et Mathematicum, iſt der 59 Br. von Leibnizen 1697 im Auguſt geſchrieben. Bernoulli hatte eine allgemeine Methode gewünſcht, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehn, deren Puncte durch Quadraturen nach einer gewiſſen Ordnung gegebener krummen Linien beſtimmt

beſtimmt werden. L. hat, ſeiner Gewohnheit gemäß auf einer Reiſe darüber nachgedacht, und eröffnet ſeine Erfindung. Das Exempel von logarithmiſchen Linien das ich beygebracht habe, giebt er zur Erläuterung der allgemeinen Methode ob es gleich für ſich noch eingeſchränkter könnte behandelt werden. Er nennt x was ich wie gewöhnlich y nenne, und a Parameter. Das Verfahren ſelbſt giebt er als eine neue Anwendung der Methoden an, die Bernoulli mit ihm gemeinſchaftlich hatte, und empfiehlt ihm im 60. Briefe ſie geheim zu halten, bis ſie beyde ſolche ſelbſt genugſam gebraucht hätten, es liege darinnen viel mehr als man beym erſten Anblicke muthmaſſen möchte, man ſolle alſo Andern nichts davon ſagen bis man es ſelbſt nach Würden gebraucht habe. Es werden auch aus dieſer neuen Methode zu differentiiren neue zu ſummiren entſtehn zu denen man ſonſt nicht gelangte.

Der 61. Brief iſt Bernoullis Antwort wo er unter andern auch dieſe neue Methode rühmt.

In den Ueberſchriften der Briefe heiſſt ſie: methodus differentiandi de curua in curuam. Auch im 63. Briefe, der von Bernoullin iſt, findet ſich etwas davon.

12. Die Geſchichte der erſten analytiſchen Behandlung iſoperimetriſcher Aufgaben, erhält zugleich das Andenken eines Zwiſtes zwiſchen den

bey=

beyden Brüdern die von Leibnizens Rechnung des Unendlichen zuerſt den Werth erkannten, ſie ausbreiteten und erweiterten. Der ältere von ihnen Jacob Bernoulli, Prof. zu Baſel, gab in Act. Erud. 1697. Mai. Auflöſung der Aufgabe ſeines Bruders Johanns, damahls Profeſſors zu Gröningen, von der curua oligochrona. (Man ſ. hie, die Brachyſtochrone 43). Erinnerte zugleich, dieſe Speculationen bahnten den Weg zu ſchwerern Aufgaben, z. E. den iſoperimetriſchen. Daß der Kreis die krumme Linie ſey welche den gröſſten Raum einſchlieſſt, glaube man insgemein, und das mit Recht, aber ohne Beweis. Dieſe Frage, und verwandte, legt Jacob, ſeinem Bruder vor, durch die Methode der Gröſſten und Kleinſten zu beantworten.

In Act. Er. May 1698; löſt er auch einige Fragen auf die Johann im Journ. des Sav. Aug. 1697. aufgegeben hatte: Auf einem runden Körper die kürzeſte Linie zu ziehn. Wenn ähnliche krumme Linien, um einen Punct ähnlich liegen, durch welchen eine gerade Linie geht, deren Lage gegeben iſt, ſo wie noch einer andern geraden Linie ihre, den gröſſten oder kleinſten Bogen zu finden welcher zwiſchen dieſen geraden Linien enthalten iſt.

13. Im Journal des Sav. Dec. 1697. erſchien ein Brief Johanns an Varignon ſur le problème des iſoperimètres (Op. Io. B. T. I. n. 40)

40) der ſich auch lateiniſch in Act. Er. Jan. 1698. findet. Joh. erinnert, daß der Kreis den gröſſten Raum einſchlieſſe, habe Pappus erwieſen L. V. Pr. 10. und löſet dann ſeines Bruders Aufgaben auf.

Ins Journ. d. Sav. 1698; 17 Fevr. ward eingerückt: Hr. B. Profeſſor zu Baſel behaupte, die vornehmſte ſeiner Aufgaben welche die iſoperimetriſchen Figuren betrifft, ſey nicht vollkommen richtig aufgelöſt. Bernoulli zu Gröningen antwortete darauf in J. d. S. 1698; 21 Apr. und ſo wechſelten beyde in dieſem Journale noch einige Schriften, nicht ganz freundſchaftlich. Op. Iac. Bern. T. I. n. 83 . . . 89.

14. In Act. Erud. 1700. Iun. erſchien Iacobi Bernoullii ſolutio propria problematis iſoperimetrici. Nur Differentialgleichungen in einer Tafel dargeſtellt, ohne den Weg wie ſie gefunden werden. Cramer zeigt dieſen, in ſeinen Anmerkungen über dieſen Aufſatz Op. Iac. n. 93.

15. Analyſis magni problematis iſoperimetrici eine Diſputation die unter Jac. Bern. Joh. Jac. Epiſcopius 1. März 1701. vertheidigt, trägt die Auflöſung vor; findet ſich in Act. Erud. Mai. 1701; Op. Iac. B. n. 96. B. erklärt ſich, er nenne die Aufgabe groß, nicht ſo wohl wegen ihrer Schwürigkeit, ob ſie gleich auch unter die ſchwerſten gehöre, ſondern weil ſie diene die Grän-

zen der Wiſſenſchaft ungemein zu erweitern. Sein erſter Lehrſatz giebt in Differentialen, höherer und höherer Ordnungen, Unterſchiede zunächſt nach einander folgenden Ordinaten und Abſciſſen. Der zweyte, betrachtet in einer krummen Linie vier einander unendlich nahe Puncte, B, F, G, C, von deren jedem ein Perpendikel auf die Abſciſſenlinie gelaſſen iſt. Die beyden äuſerſten B, C, bleiben unbeweglich, die mittlern F, G, verrücken ſich, jeder in ſeinem Perpendikel, doch ſo daß die Summe der drey geraden Linien BF + FG + GC ungeändert bleibt, da wird dann das Verhalten der Aenderungen ihrer Entfernungen von der Abſciſſenlinie unterſucht.

Dieß nur als eine Probe von Jacobs Verfahren, wo ſich alſo auch Variation zeigt.

16. Johann theilte ſeine Auflöſung der iſoperimetriſchen Aufgabe im Junius 1698. Leibnizen mit, und da Jacob das (14) erwähnte bekannt gemacht hatte, ſchickte er ſolche im Jänner 1701 an die pariſer Akad. d. W. verſiegelt, nicht eher zu eröffnen, bis ſein Bruder ſeine Analyſis herausgegeben hätte. Dieſe erſchien (15) Es gab Schwierigkeiten bey der Akademie wegen der Bekanntmachung, Jacob ſtarb 16. Aug. 1705, und die Akademie eröffnete das Verſiegelte 17. Apr 1706. Johanns Aufſatz erſchien in den Mém. de l'Acad. 1706. (Op. Io. Bern. n. 75.)

Jn

In der Anmerkung dabey, ſteht, was ich zunächſt erzählt habe.

17. Johanns erſte Aufgabe iſt dieſe: Eine gegebene gerade Linie wird von einer krummen in zween gegebenen Puncten geſchnitten: Unter allen krummen Linien von gleicher Länge, welche das leiſten, ſoll man diejenige finden, bey welcher, Functionen ihrer Ordinaten, ſelbſt als Ordinaten eben der Abſciſſen betrachtet, eine krumme Linie geben, deren Fläche die gröſſte unter allen Flächen krummer Linien iſt welche ſich auf eben die Art beſtimmen laſſen.

Er erinnert: Dieſer Umſtand des Gröſſten, welcher für die ganze krumme Linie verlangt wird, die von dem einen gegebenen Puncte der Abſciſſenlinie bis zum andern geht, finde auch bey jedem Theile ſtatt, der ſich vom erſten der gegebenen Puncte bis an eine unbeſtimmte Stelle erſtreckte. Nun ſtellt er ſich zwey an einander liegende Elemente der geſuchten krummen Linie vor, FO, Oφ, zu ihnen gehören zwey Elemente der krummen Linie deren Ordinaten Functionen der geſuchten ſind. Aus F, φ, als Brennpuncten, mit einer Axe = FO + Oφ, beſchreibt er eine Ellipſe, deren beyde Elemente Fω, $\omega\varphi$ ſind, ... das heiſſt alſo: er läſſt der geſuchten krummen Linie Bogen FOφ, variiren, ... nun ſucht er was dieſes in der krummen Linie ändert, deren Ordinaten Functionen der geſuchten ſind.

Die zweyte Aufgabe zeigt wie man aus der krummen Linie deren Ordinaten Functionen waren, umgekehrt die zuerſt geſuchte krumme Linie findet, alſo directe und indirecte Methode einander beſtätigen. Der ganze Aufſatz nimmt in den Werken etwas über vier Quartblätter ein.

18. In dieſer Sammlung zweytem Bande, n. 103. finden ſich: Bemerkungen über das was bisher zur Auflöſung iſoperimetriſcher Aufgaben gethan iſt, nebſt einer neuen kurzen und leichten Methode ſie ohne Rechnung aufzulöſen, welche ſich auch auf verwandte Aufgaben erſtreckt; franzöſiſch aus den Mém. de l'Ac. 1718; ſteht auch lateiniſch in Act. Er. 1718. Ian. Er verbeſſert einen Fehler der ſich aus Unachtſamkeit in vorige Auflöſung eingeſchlichen hatte, und giebt eine neue Art, nicht nur ſeines Bruders Aufgaben, ſondern auch verwandte aufzulöſen. Er betrachtet wie ſein Bruder, einen unendlich kleinen Bogen der geſuchten krummen Linie, als aus drey geraden Elementen zuſammengeſetzt, wendet einen Grundſatz an der aus dem Geſetze der Einförmigkeit hergenommen iſt, und findet die geſuchten Gleichungen, aus Betrachtung der Figur faſt ohne einige Rechnungen, braucht alſo die mühſame Analyſis ſeines Bruders nicht, die Taylor abkürzen und erläutern wollte, aber noch viel dunkler gemacht hat. Sein Verfahren läſſt ſich hie, kurz und ohne mehr Figuren nicht beybringen.

gen. Es betrachtet auch Variation des unendlich kleinen Bogens der geſuchten krummen Linie.

Taylor hatte wegen des Verſehens Bernoullin Vorwürfe gemacht, Nicolaus Bernoulli vertheidigt ſeinen Vater. Op. Io. B. T. II. n. 118; und 120.

19. In Mém. de l'Ac. d. Sc. 1734; 510 S. des holl. Drucks, findet ſich: Sur les courbes tautochrones par M. Fontaine. Tautochrone heiſſt eine krumme Linie, auf der alle Bogen bis an den niedrigſten Punct im Niederſteigen, oder von ihm, im Aufſteigen, beſchrieben werden. (Meine höhere Mechanik; II. Abſchn. 53. §.) Damahls hatte man noch keine Methode, dergleichen für jede Vorausſetzung der Schwere und des Wiederſtandes zu finden. In dieſer Abſicht betrachtet Fontaine zweyerley Aenderungen der Coordinaten, in einer und derſelben krummen Linie, und aus einer krummen Linie in die andre, er bezeichnet jene wie gewöhnlich als Differentiale, dieſe, wie die Engländer Fluxionen bezeichnen. Die letzte Bezeichnung deutet alſo bey ihm Variationen an. So kann man von ihm ſagen er habe zuerſt etwas von Variationsrechnung gebraucht.

20. Hr. Friedr. Wilh. Aug. Murhard aus Caſſel, gab bey Erlangung der höchſten akademiſchen Würde in der Philoſophie: Specimen

hiſtoriae atque principiorum calculi quem vocant variationum. Gott. 1796. Nebſt einigem von dem was ich beygebracht habe, nennt er als den erſten Erfinder der Variationsrechnung und derſelben Anwendung auf iſoperimetriſche Fragen, de la Grange; Miſcellanea Taurinenſia T. II. für 1760; 61; p. 173; (Turin 1762) Eſſay d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales. Auch 196. S. Application de la methode précedente à la ſolution de differens problémes de Dynamique.

In der Pariſer Akademie fand d. l. Gr. Widerſpruch, Mém. de l'ac. 1767; 551 S. der Pariſer Ausgabe: Eclairciſſement ſur les methodes de trouver les courbes qui jouiſſent de quelque proprieté du maximum ou du minimum par M. le chevalier de Borda, und 588 S. Addition à la methode pour la ſolution des problémes de maximis et minimis par M. Fontaine.

F. ſagt l. Gr. habe ſich in ſeinem neuen Wege verirrt weil er die wahre Theorie nicht gekannt, und ſchlägt zwo andre Methoden vor.

Nach Hrn. Murhards Urtheile, iſt die erſte einerley mit Eulers ſeiner in dem Buche methodus inueniendi curuas... die andre mit de la Grange ſeiner.

Auch

Auch Borda, äuſerte, er habe Gleichungen gefunden, die von l. Grange ſeinen unterſchieden wären.

La Grange vertheidigte ſich dagegen, Miſcell. Taurin. T. III. für 1766. . 69; p. 163. Sur la methode des variations, wo er ſich auch über einige andre Geometer beklagt, welche ihn wegen dieſer Methode beneideten.

L. Gr. hatte ſeine Methode ſchon 1755 Eulern mitgetheilt und dieſer ſolche gebilligt und für vollkommen zulänglich erklärt.

Das bisherige führe ich aus Hrn. Murhard Nachrichten an.

21. Soviel erhellt wohl daraus daß l. Gr. ſeine Methode nicht deutlich und überzeugend genug vorgetragen hat. Eulers Vortrag den ich gebraucht habe läſſt wohl keinen Einwendungen Platz. Die bernoulliſche Methode, Elemente der krummen Linie zu betrachten welche zwiſchen ein Paar gegebenen Puncten ihre Lage ändern, (15; 17;) hat er erſtlich in Aufſätzen für die kaiſ. petersb. Ak. d. W. erweitert, dann auch, mehr mit analytiſcher Rechnung behandelt.

Eloge de Monſieur Leonard Euler. . . par Nicolas Fuſs. . St. Petersbourg 1783. Es iſt ein

vollſtändiges Verzeichniß von Eulers Werken bey: gefügt. Ich bringe daraus von 78 u. f. S. bey, was hieher gehört, und erſpare mir ſo die Mühe, die Aufſätze in der Sammlung der Akademie die ich freylich ſelbſt beſitze nachzuſuchen.

Problematis iſoperimetrici in latiſſimo ſenſu accepti ſolutio generalis; Comm. Ac. Sc. Petr. T. VI. 1739.

De linea celerrimi deſcenſus in medio quocunque reſiſtente T. VII. 1740.

Curuarum maximi minimique proprietate gaudentium inuentio noua et facilis T. VIII. 1741.

Methodus inueniendi infinitas curuas iſoperimetricas communi proprietate praeditas. Noui Commentarii T. VI. 1761.

Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. N. C. T. X. 1766.

Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi C. N. T. XVI. 1772.

In N. C. T. X. ſtehn vor der Analytica explicatio . . Elementa calculi variationum, ſie ſind in dem Verzeichniſſe ſelbſt vergeſſen, aber am Ende als eine Omiſſion angezeigt. Euler erinnert im Anfange dieſes Aufſatzes, die Unterſuchungen der ſynchronarum und traiectoriarum, veranlaſſten, bey einer Reihe krummen Linien,

einen

einen veränderlichen Parameter anzunehmen, und ſo zum Ex. von $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ die Aenderung zu ſuchen, indem ſich Parameter a um da ändert. So was könne man calculum variationum nennen, und nicht nur ſo bey einer Reihe beſtimmter krummen Linien anwenden, ſondern auf alle krumme Linien ohne Einſchränkung erſtrecken, wie, wenn man unter allen krummen Linien diejenige ſuchte, die eine gewiſſe Eigenſchaft des Gröſſten oder Kleinſten hat.

22. Paul Friſius, giebt einen Vortrag der Variationsrechnung an, nach dem er unterſchiedenes das zu ihrer Geſchichte gehört erzählt hat. Op. T.I. der Algebram und Geometriam analyticam enthält, Mediol. 1782; 4; p. 414. Ich ſchreibe ſeine Worte her:

His autem omnibus conſideratis, iam aliquot abhinc annis, in diſſ. ad Senenſem Ac. data, animaduerti, non geminata characteriſtica, altera quae variationes quantitatis alicuius exprimit, generales illas probl. iſoperimetricor. formulas, ex notis aliis differentialis calculi principiis colligi. Si ſcilicet, ſcribendo $dy + \varphi$ loco dy, et $ddy + d\varphi$ loco ddy, propoſita maximi aut minimi proprietas transferatur in proximum figurae locum, ac differentiis ſummisque de more acceptis, termini omnes, qui quantitatem φ inuoluunt, ſimul nihilo exaequentur. Non quod variationis calculus vlla ratione cum

cum calculo differentiali confundi poſſit, vt perperam nonnulli intelligunt, ſed, quod citra illud D. Fontaine theorema, et ſolis calculi differentialis ſubſidiis, eaedem illae generales formulae iſoperimetricorum problematum reſoluendorum facile colligantur, quae huc vſque ex aliis calculi variationum formulis ſunt erutae.

23. In: Memorie della Società Italiana, T. V. Verona 1790; p. 130; findet ſich: Prodromo d'oſſervazioni, ſopra il Trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi del Sign. Marcheſe de Condorçet, l'anno 1765; di Pietro Ferroni.

Ferronius erinnert; der Keim der Variationsrechnung, liege in Leibnizens differentiatione de curua in curuam (hie; 11.) Auch was Condorçet équations de condition nennt, und ohne Beweis giebt, laſſe ſich leicht aus Leibnizens Lehren herleiten.

24. Mich deucht die Bemerkung des Ferronius, beantwortet auch ſogleich die Frage welche von vielen Rechnern als ſehr ſchwer iſt angeſehen worden: Ob Differentialrechnung und Variationsrechnung, einerley ſind oder wie ſich Euler calc. Variat. §. 3. ausdruckt: Variationen von Differentialen himmelweit unterſchieden ſind. Leibniz hatte ja ſchon geſagt, daß aus einer krummen Linie in die andre differentiirt wird.

25. Noch eine Betrachtung über den Gang den dieſe Unterſuchungen genommen haben.

Die erſten iſoperimetriſchen Fragen, über geradelinichte Figuren die bey gleichem Umfange gröſſten Junhalt haben, beantwortet Pappus V. B. ganz geometriſch. Auch der Bernoullie erſte allgemeinere Aufgaben, ſtellen krumme Linien dar, in denen ſich ein Theil des Umfangs änderte und zeigen was daraus folgt. Ebenfalls Euler Methodus inueniendi lineas curuas .... betrachtet die Folgen in einer krummen Linie, aus Aenderung einer Stelle in ihr, und findet ſelbſt Calc. Var. §. 18. geometriſche Darſtellung ſehr dienlich dieſe Speculationen zu erläutern, die in ihrer Allgemeinheit zu abſtract und vage ſcheinen.

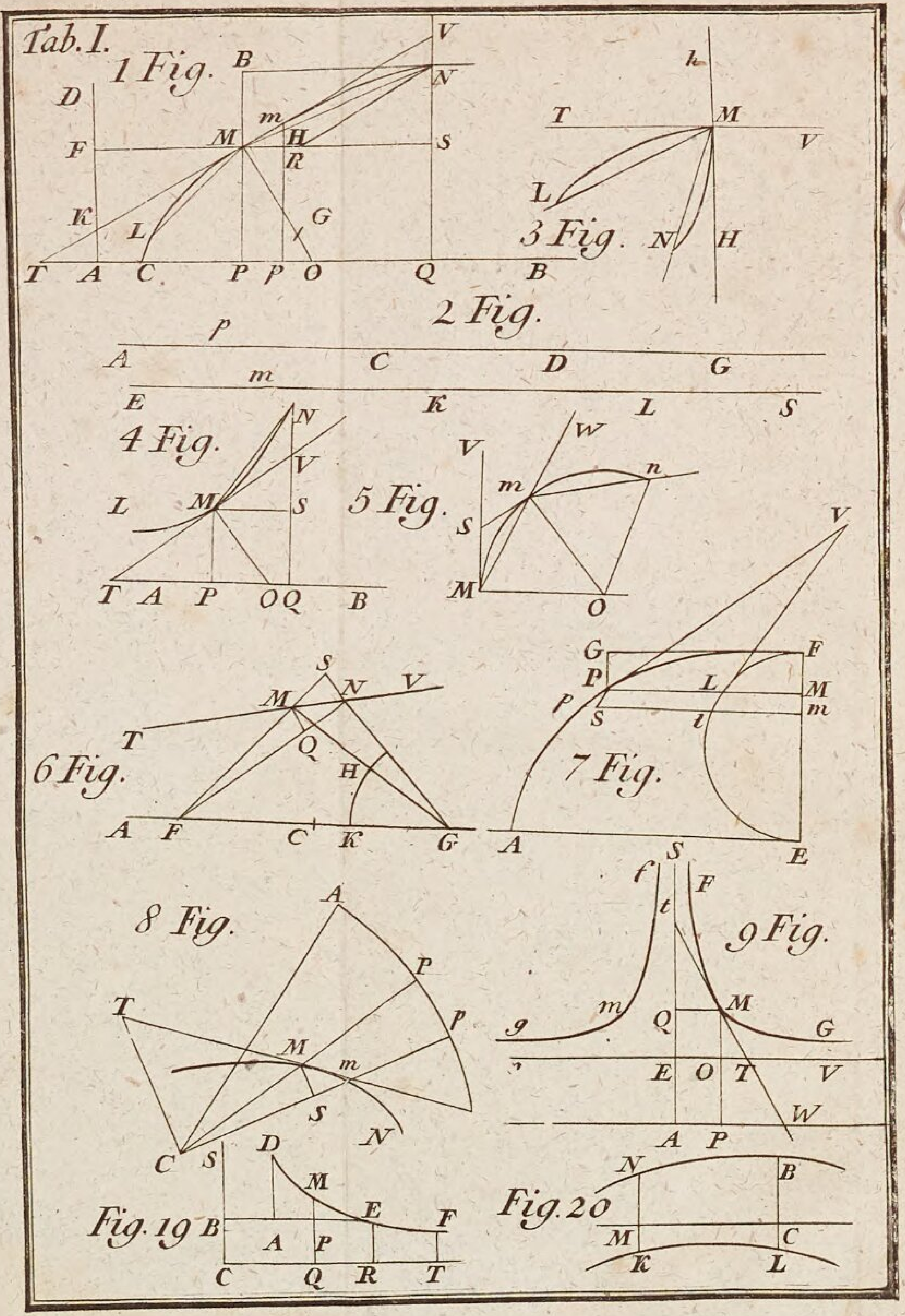
Ich darf wohl dieſer Autorität gemäß von einem Vortrage denken, der nur Rechnungsformeln ohne Erläuterung durch Figuren giebt. Vielleicht mit deßwegen, iſt la Granges Verfahren mißverſtanden, und gemißbilliget worden.

Es klingt ſonderbar, krumme Linien die gewiſſe Bedingungen erfüllen, alſo geometriſche Gegenſtände, durch Methoden finden die keine geometriſchen Betrachtungen erfodern. Die Formeln werden doch immer anfangs aus geometriſcher Betrachtung hergeleitet ſeyn, ſo gut als Formeln der analytiſchen Trigonometrie, bey deren manchen, z. B. der vielfachen Winkel, man

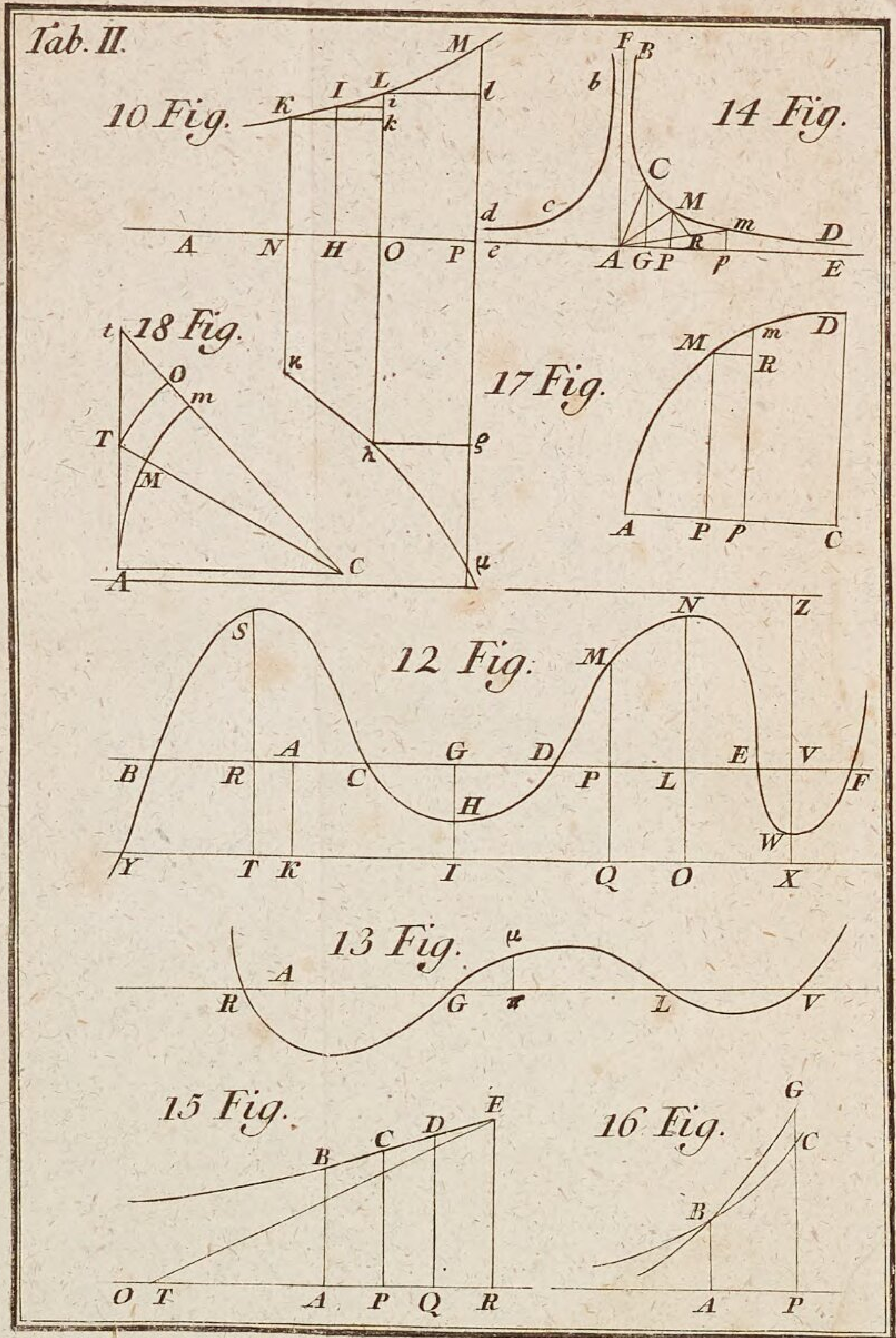
die

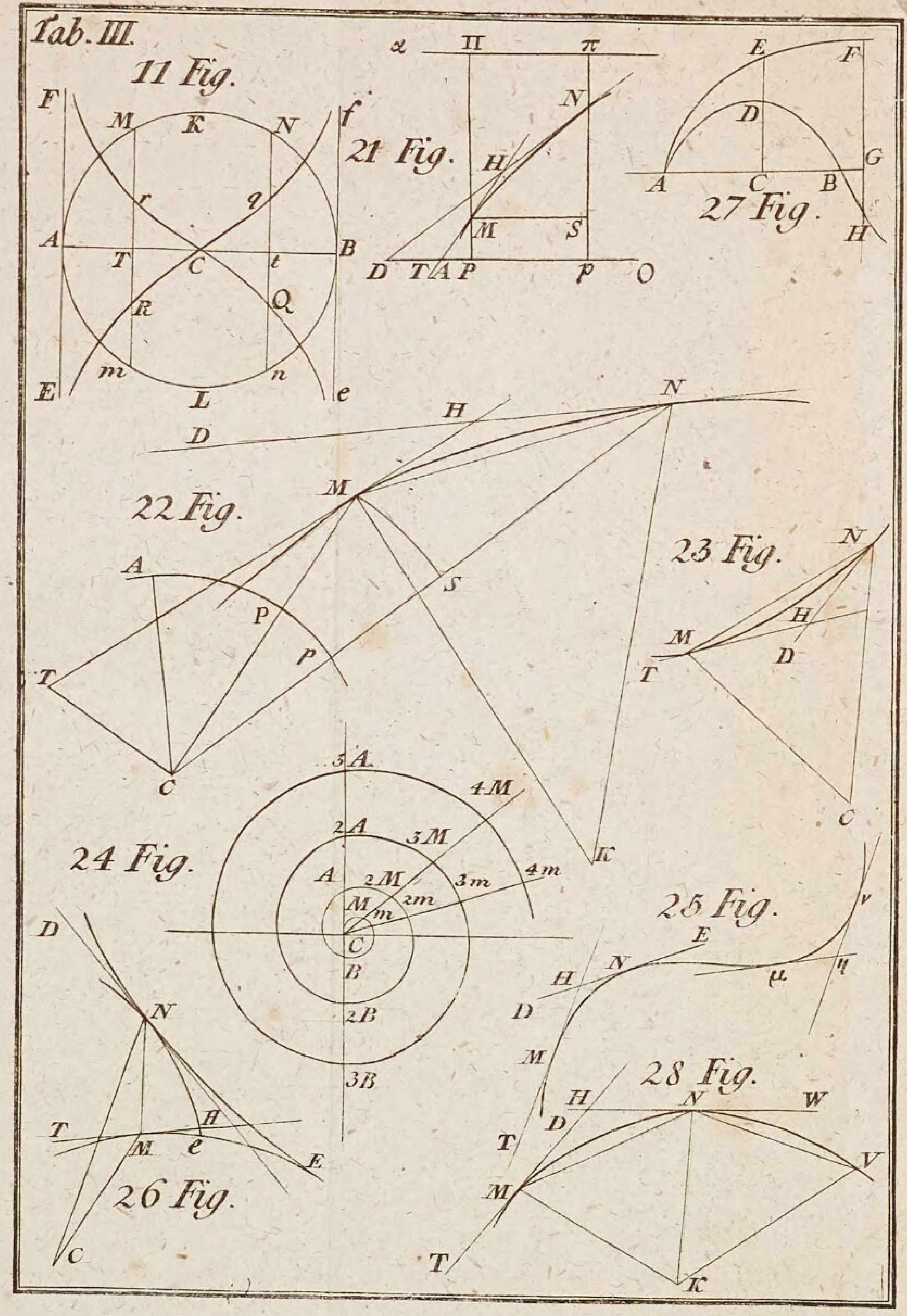
die Figur nicht allemahl zeichnet. Wird aber bey Fortſetzung und Verwickelung ſolcher Formeln geometriſche Darſtellung ganz vernachläſſigt, ſo kann Undeutlichkeit, wohl Zweifel und Streit veranlaſſen. Immer wäre daher rathſam, der griechiſchen Geometer deutliches und ſicheres Verfahren Betrachtung der Figur, nicht ganz bey Seite zu ſetzen.

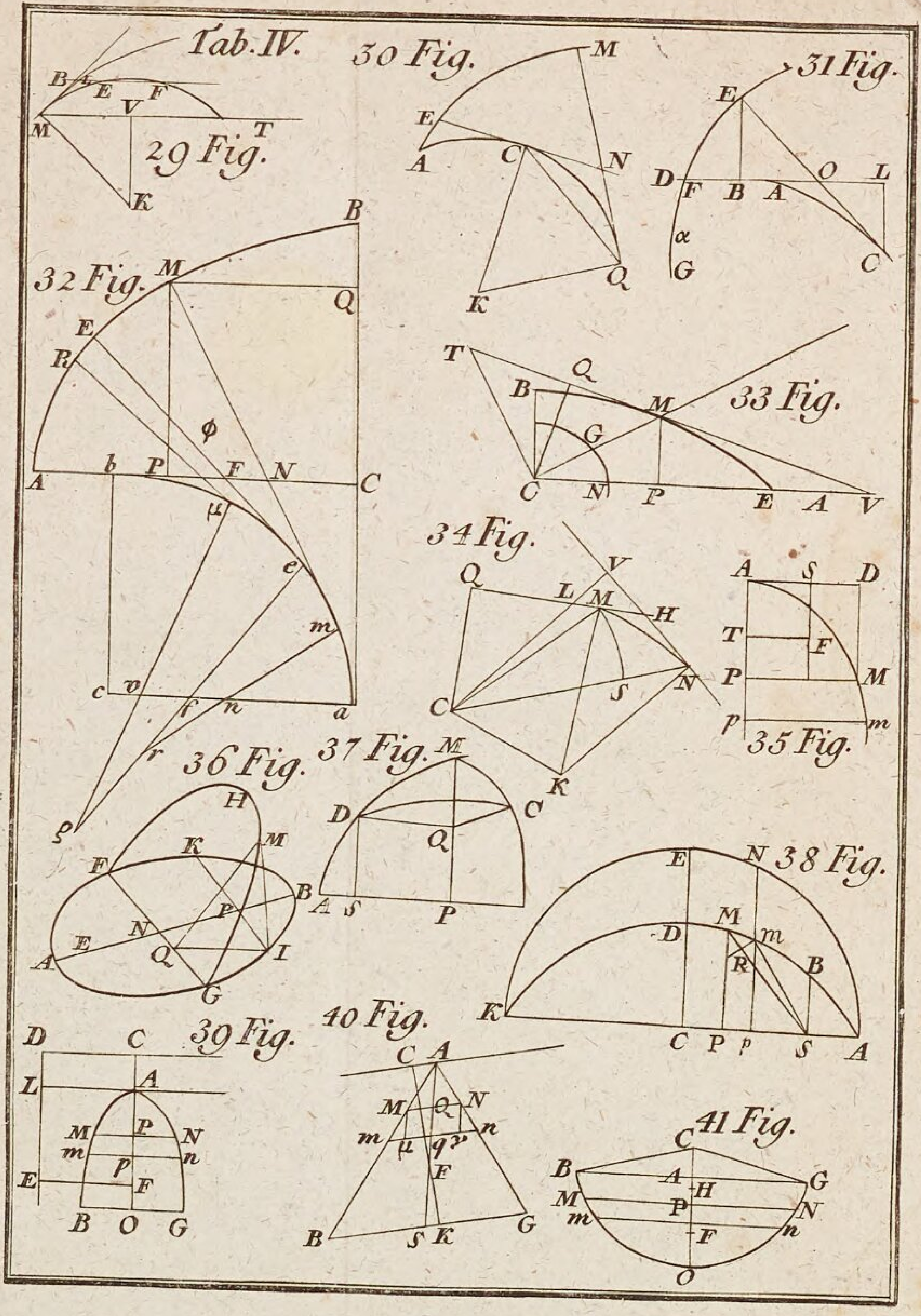
STAATSBIBLIOTHEK BAMBERG

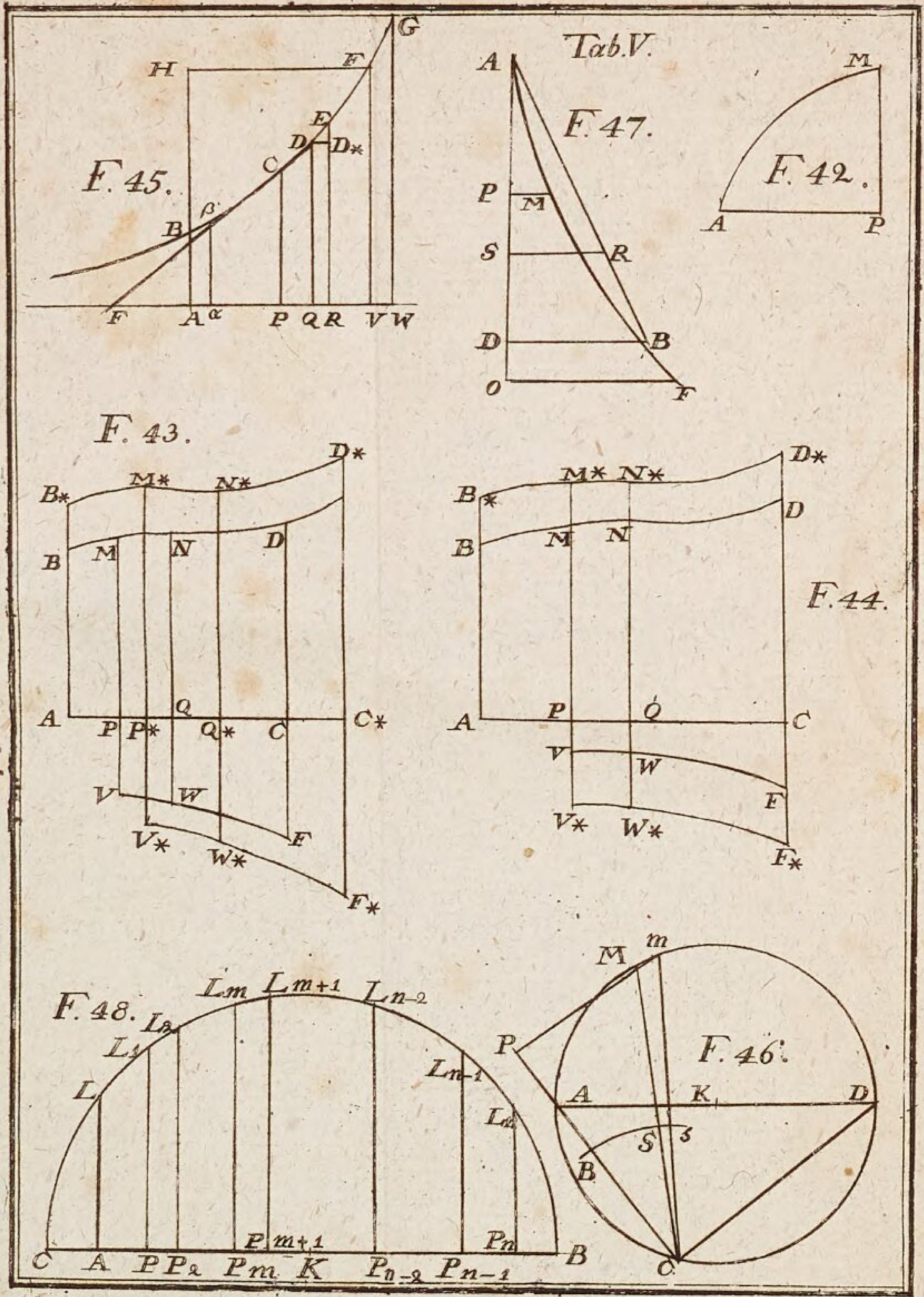

Tab. I.
1 Fig.
2 Fig.
3 Fig.
4 Fig.
5 Fig.
6 Fig.
7 Fig.
8 Fig.
9 Fig.
Fig. 19
Fig. 20

Kästner's


Tab. II.
10 Fig.
14 Fig.
18 Fig.
17 Fig.
12 Fig.
13 Fig.
15 Fig.
16 Fig.


Tab. III.
11 Fig.
F M K N f
r q
A T C t B
R Q
E m L n e
21 Fig.
α Π π
N
H
M S
D T A P p O
27 Fig.
E F
D
G
A C B
H
22 Fig.
D H N
M
A
S
p
P
T
C
K
23 Fig.
N
H
M
D
T
C
24 Fig.
3A
4M
2A 3M
A 2M 3m 4m
M 2m
m
C
B
2B
3B
25 Fig.
E
H N
D μ η ν
M
26 Fig.
D
N
T H
M e
E
C
28 Fig.
H N W
D
T
V
M
T
K


Tab. IV.
29 Fig.
30 Fig.
31 Fig.
32 Fig.
33 Fig.
34 Fig.
35 Fig.
36 Fig.
37 Fig.
38 Fig.
39 Fig.
40 Fig.
41 Fig.



Kästners Mathematik III T. II

~~3 fl. 18 ½ kr.~~

Gesteigert Kemnath den 23ten
Okt. 1821 erste u. 2te Ab-
theil um 45 kr.

SBB01340126445 6

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf, 1719-1800

Mathematische Anfangsgründe

Bd.: 3,2

Göttingen 1799

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.177(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11740013-8
VD18 80367763-001